专题 1.7 认识三角形-三角形的内角（知识讲解）

【学习目标】

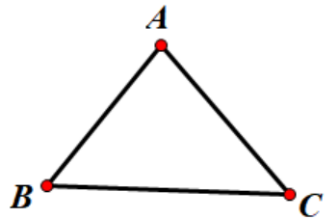
1．通过平行线性质和平角定义理解三角形内角和；

2．掌握三角形内角和及三角形的外角与内角的关系；

3．能够运用三角形内角和定理进行相关角的计算及相关证明问题.

【知识点梳理】

【知识点一】三角形内角和定理：三角形的内角和为 180°．



几何语言：如上图，在 ΔABC 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ ．

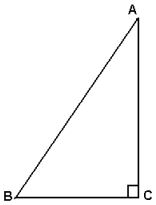
特别说明：应用三角形内角和定理可以解决以下三类问题：

①在三角形中已知任意两个角的度数可以求出第三个角的度数；

②已知三角形三个内角的关系，可以求出其内角的度数；

③求一个三角形中各角之间的关系.

【知识点二】直角三角形两锐角和：如果一个三角形是直角三角形，那么这个三角形有两个角互余. 反过来，有两个角互余的三角形是直角三角形.



几何语言：如上图，在 ΔABC 中，$\angle C=90^0 \Leftrightarrow \angle A+\angle B=90^0$ ．

特别说明：如果直角三角形中有一个锐角为 45°，那么这个直角三角形的另一个锐角也是 45°，且此直角三角形是等腰直角三角形.

【典型例题】

类型一、三角形的内角和

例 1．完成下面的证明已知：如图，点 D，E，F 分别是三角形 ABC 的边 BC，CA，AB 上的点，$DE//BA$，$DF//CA$.

求证：∠*A*＋∠*B*＋∠*C*＝180°.

证明：∵*DE*//*BA*，

∴∠3＝____（　　），

∠2＝____（　　）.

∵*DF*//*CA*，

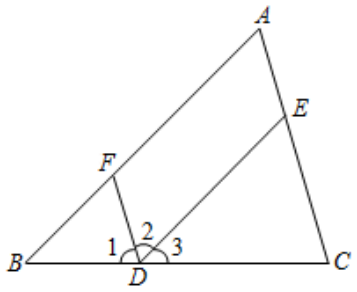
∴∠1＝____（　　），

∠*BFD*＝____（　　）.

∴∠2＝____（　　）.

∵∠1＋∠2＋∠3＝180°（平角的定义），

∴∠*A*＋∠*B*＋∠*C*＝180°（等量代换）.



【答案】∠*B*，两直线平行，同位角相等；∠*BFD*，两直线平行，内错角相等；∠*C*，两直线平行，同位角相等；∠*A*，两直线平行，同位角相等；∠*A*，等量代换

【分析】先根据平行线的性质得出∠*A*=∠2，∠1=∠*C*，∠3=∠*B*，再由平角的定义即可得出结论.

解：∵*DE*//*B*

∴∠3＝∠*B*（两直线平行，同位角相等），

∠2＝∠*BFD*（两直线平行，内错角相等），

∵*DF*//*CA*，

∴∠1＝∠*C*（两直线平行，同位角相等），

∠*A*＝∠*BFD*（两直线平行，同位角相等），

∴∠2＝∠*A*（等量代换）.

∵∠1+∠2+∠3＝180°（平角的定义），

∴∠*A*+∠*B*+∠*C*＝180°（等量代换）.

故答案为：$\angle B$，两直线平行，同位角相等；$\angle BFD$，两直线平行，内错角相等；$\angle C$，两直线平行，同位角相等；$\angle A$，两直线平行，同位角相等；$\angle A$，等量代换.

【点拨】本题考查了平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解答本题的关键．平行线的性质：①两直线平行同位角相等，②两直线平行内错角相等，③两直线平行同旁内角互补.

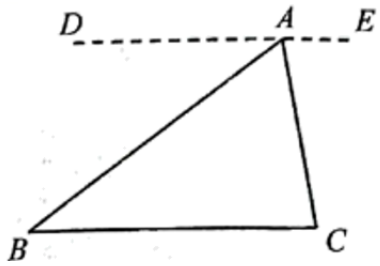
举一反三：

【变式 1】 在探索并证明三角形的内角和定理“三角形三个内角的和等于 180°”时，圆圆同学添加的辅助线为“过点 A 作直线 $DE \parallel BC$”．请写出“已知”、“求证”，并补全证明.

已知：

求证：

证明：过点 A 作直线 $DE \parallel BC$.



【答案】已知：如图，$\triangle ABC$；求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$；证明见分析.

【分析】根据平行线的性质和平角的定义即可证明.

解：如图，$\triangle ABC$.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

证明：如图，过点 A 作直线 $DE \parallel BC$.

$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \angle B=\angle DAB$，$\angle C=\angle EAC$（两直线平行，内错角相等）.

$\because \angle DAB+\angle BAC+\angle EAC=180°$（平角定义），

$\therefore \angle B+\angle BAC+\angle C=180°$.

即三角形内角和为$180°$.

【点拨】本题考查三角形内角和定理的证明，平行线的性质，平角的定义．掌握两直线平行，内错角相等是解题关键.

【变式 2】 在小学，我们曾经通过动手操作，利用拼图的方法研究了三角形三个内角的数量关系．如图，把三角形 ABC 分成三部分，然后以某一顶点（如点 B）为集中点，把

三个角拼在一起，观察发现恰好构成了平角，从而得到了“三角形三个内角的和是 180°”的结论．但是，通过本学期的学习我们知道：由观察、实验、归纳、类比、猜想得到的结论还需要通过证明来确认它的正确性．

小聪认真研究了拼图的操作方法，形成了证明命题“三角形三个内角的和是 180°”的思路：

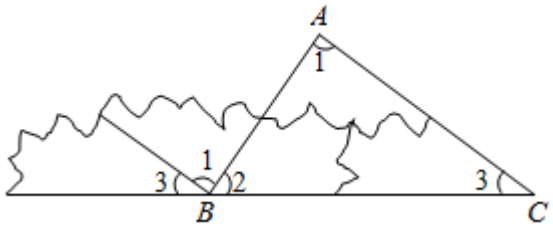
①画出命题对应的几何图形；

②写出已知，求证；

③受拼接方法的启发画出辅助线；

④写出证明过程．

请你参考小聪解决问题的思路，写出证明该命题的完整过程．

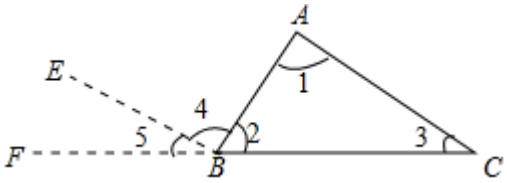


【分析】根据要求画出△*ABC*，写出已知，求证．构造平行线，利用平行线的性质解决问题即可．

解：△*ABC*．

求证：∠*A*+∠*B*+∠*C*=180°．

证明：如图，延长 *CB* 到 *F*，过点 *B* 作 *BE*∥*AC*．



∵*BE*∥*AC*，

∴∠1=∠4，∠5=∠3，

∵∠2+∠4+∠5=180°，

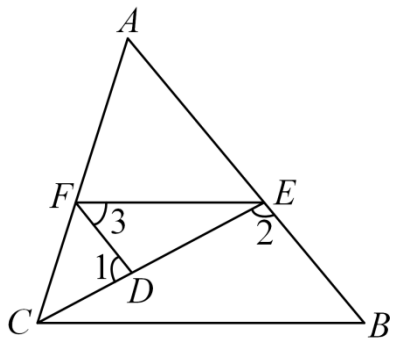
∴∠1+∠2+∠3=180°，

即∠*A*+∠*ABC*+∠*C*=180°．

【点拨】本题考查三角形内角和定理的证明，平行线的性质，平角的定义等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行线解决问题．

类型二、与平行线有关的内角和问题

例 2. 如图，已知$\angle 1+\angle 2=180°$，且$\angle 3=\angle B$.



(1)求证：ĐAFE = ĐACB，请完成下面的证明：

$\because \angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 1+\angle AEC=180°$，

$\therefore \angle AEC=\angle 1$

$\therefore AB \parallel FD$（_____），

$\therefore \angle 3=$_____（_____），

又$\because \angle 3=\angle B$（已知），

$\therefore \angle AEF=\angle B$（_____），

$\therefore FE \parallel CB$（同位角相等，两直线平行）

$\therefore$ĐAFE = ĐACB（_____）；

(2)若CE平分$\angle ACB$，且$\angle 2=110°$，$\angle 3=50°$，求$\angle ACB$的度数.

【答案】(1)两直线平行，同位角相等；$\angle AEF$；同位角相等，两直线平行；等量代换；两直线平行，同位角相等；(2)40°.

【分析】

（1）求出$\angle FDE=\angle 2$，根据三角形内角和定理求出$\angle FEC=\angle ECB$，根据平行线的判定得出$EF \parallel BC$，根据平行线的性质得出即可；

（2）根据$\angle 3=\angle B$得$\angle B=50°$，根据三角形内角和定理求出$\angle ECB=20°$，根据角平分线定义得出$\angle ACB=2\angle ECB=40°$，即可得出答案.

解：(1)$\because \angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 1+\angle AEC=180°$，

$\therefore \angle AEC=\angle 1$

$\therefore AB \parallel FD$（同位角相等，两直线平行），

$\therefore \angle 3=\angle AEF$（两直线平行，内错角相等），

又$\because \angle 3=\angle B$（已知），

∴∠*AEF*=∠*B*（等量代换），

∴*FE*∥*CB*（同位角相等，两直线平行）

∴∠*AFE*=∠*ACB*（两直线平行，同位角相等）；

故答案为：同位角相等，两直线平行；∠*AEF*；两直线平行，内错角相等；等量代换；两直线平行，同位角相等；

(2)∵∠3=∠*B*，∠3=50°，

∴∠*B*=50°，

∵∠2+∠*B*+∠*ECB*=180°，∠2=110°，

∴∠*ECB*=20°，

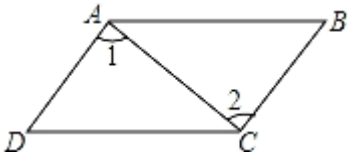
∵*CE* 平分∠*ACB*，

∴∠*ACB*=2∠*ECB*=40°.

【点拨】本题考查了平行线的性质和判定，三角形内角和定理的应用以及角平分线的计算，能综合运用定理进行推理是解此题的关键.

举一反三：

【变式 1】 已知：如图，*AB*∥*CD*，∠*B*＝∠*D*. 求证：∠1＝∠2.



【分析】根据平行线的性质得出∠*BAC*＝∠*DCA*，进而利用三角形内角和定理得出∠1＝∠2.

解：∵*AB*∥*CD*，

∴∠*BAC*＝∠*DCA*，

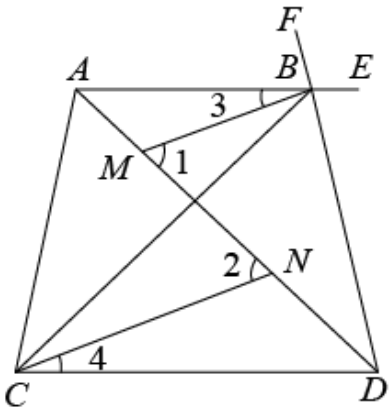
又∵∠*B*＝∠*D*，

∴∠1＝180°-∠*D*-∠*ACD*，∠2＝180°-∠*B*-∠*BAC*=180°-∠*D*-∠*ACD*，

∴∠1＝∠2.

【点拨】此题主要考查了平行线的性质以及三角形内角和定理，熟练掌握平行线的性质是解题关键.

【变式 2】 如图，∠1＝∠2， ∠3＝∠4.



(1)试说明 $AB \parallel CD$；

(2)若 $\angle BAD = \angle BDA$，且 $\angle EBF = 110°$，求 $\angle ADC$ 的度数.

【答案】(1)见分析　(2)35°

【分析】

（1）根据 $\angle 1 = \angle 2$，可得 $BM \parallel CN$，从而得到 $\angle CBM = \angle BCN$，再由 $\angle 3 = \angle 4$，可得 $\angle ABC = \angle BCD$，即可求证；

（2）根据对顶角相等可得 $\angle ABD = 110°$，再由三角形的内角和定理可得 $\angle BAD = 35°$，然后根据 $AB \parallel CD$，即可求解.

(1)解：$\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore BM \parallel CN$，

$\therefore \angle CBM = \angle BCN$，

$\because \angle 3 = \angle 4$，

$\therefore \angle 3 + \angle CBM = \angle 4 + \angle BCN$，即 $\angle ABC = \angle BCD$，

$\therefore AB \parallel CD$；

(2)解：$\because \angle ABD = \angle EBF$，$\angle EBF = 110°$，

$\therefore \angle ABD = 110°$，

$\therefore \angle BAD + \angle BDA = 70°$，

$\because \angle BAD = \angle BDA$，

$\therefore \angle BAD = 35°$，

$\because AB \parallel CD$，

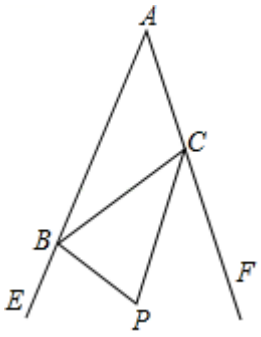
$\therefore \angle ADC = \angle BAD = 35°$.

【点拨】本题主要考查了平行线的性质和判定，对顶角的性质，三角形的内角和定理，

熟练掌握平行线的性质和判定，对顶角的性质，三角形的内角和定理是解题的关键.

类型三、三角形折叠有关角度问题

例 3. 已知：如图，△*ABC* 的两个外角的平分线交于点 *P*，如果∠*A*＝40°，求∠*BPC* 的度数.



【答案】70°，详见分析

【分析】先根据三角形内角和定理得到∠*ABC*+∠*ACB*＝140°，再根据角平分线的定义、三角形内角和定理计算即可.

解：∵∠*A*＝40°，

∴∠*ABC*+∠*ACB*＝180°﹣40°＝140°，

∴∠*EBC*+∠*FCB*＝360°﹣140°＝220°，

∵*BP*、*CP* 是△*ABC* 的外角平分线，

∴$\angle PBC=\frac{1}{2}\angle EBC$，$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle FCB$，

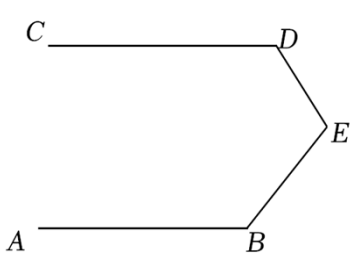
∴$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}$（∠*EBC*+∠*FCB*）＝110°，

∴∠*BPC*＝180°﹣（∠*PBC*+∠*PCB*）＝70°.

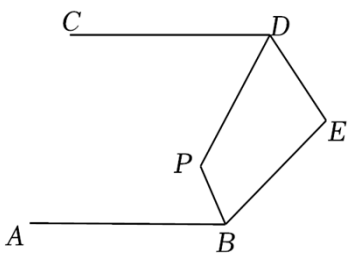
【点拨】本题考查的是三角形内角和定理、角平分线的定义，掌握三角形内角和定理是解题的关键.

举一反三：

【变式 1】已知 *AB* // *CD*，解决下列问题：



①



②

(1)如图①，写出∠*ABE*、∠*CDE* 和∠*E* 之间的数量关系，并说明理由；

(2)如图②，*BP*、*DP* 分别平分∠*ABE*、∠*CDE*，若∠*E*＝100°，求∠*P* 的度数．

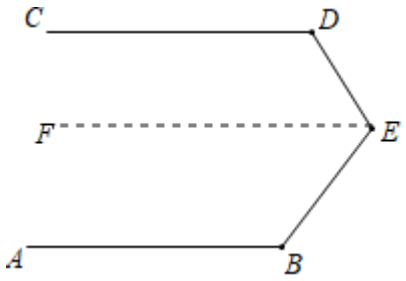
【答案】(1)∠*ABE*+∠*CDE*+∠*DEB*＝360°，理由见分析　(2)130°

【分析】

（1）过 *E* 作 *EF*∥*AB*，根据平行线的性质即可得出结论；

（2）根据得出三角关系，以及角平分线定义求出四边形 *PBED* 中的三个角，进而利用四边形内角和求出所求角的度数即可．

解：(1)根据题意得：∠*ABE*+∠*CDE*+∠*E*＝360°，理由如下：



过 *E* 作 *EF*∥*AB*，

∴∠*FEB*+∠*EBA*＝180°，

∵*CD*∥*AB*，*EF*∥*AB*，

∴*CD*∥*EF*，

∴∠*CDE*+∠*DEF*＝180°，

∴∠*CDE*+∠*DEB*+∠*ABE*＝360°，

故答案为：∠*ABE*+∠*CDE*+∠*E*＝360°；

(2)∵*BP*、*DP* 分别平分∠*ABE*、∠*CDE*，

∴$\angle EDP=\frac{1}{2}\angle CDE$，$\angle EBP=\frac{1}{2}\angle ABE$，

即∠*CDE*＝2∠*EDP*，∠*ABE*＝2∠*EBP*，

代入（1）的等式得：2∠*EBP*+2∠*EDP*+∠*E*＝360°，

∵∠*E*＝100°，

∴$\angle EBP+\angle EDP=180°-\frac{1}{2}\angle E=130°$，

在四边形 *PBED* 中，

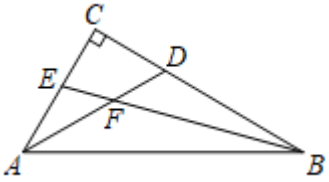
∠*P*＝360°－（∠*EBP*+∠*EDP*+∠*E*）

＝360°－（130°+100°）

＝130°.

【点拨】本题考查平行线的性质和角平分线的性质；熟练掌握平行线的性质和角平分线的性质的运用是解决本题的关键.

【变式 2】 如图，在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AD，BE 分别平分$\angle CAB$和$\angle CBA$，AD，BE 相交于点 F，求$\angle AFE$ 的度数.



【答案】45°

【分析】根据三角形角平分线的定义可得$\angle FAB+\angle FBA=\frac{1}{2}\left(\angle CAB+\angle CBA\right)$，根据三角形内角和定理即可求解.

解：∵在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

$\therefore \angle CAB+CBA=90°$

∵ AD，BE 分别平分$\angle CAB$和$\angle CBA$，

$\therefore \angle FAB=\frac{1}{2}\angle CAB,\angle FBA=\frac{1}{2}\angle CBA$

$\therefore \angle FAB+\angle FBA=\frac{1}{2}\left(\angle CAB+\angle CBA\right)=45°$

$\therefore \angle AFB=180°-\left(\angle FAB+\angle FBA\right)=135°$

$\therefore \angle AFE=45°$.

【点拨】本题考查了三角形的角平分线的性质，三角形内角和定理，掌握三角形角平分线的定义是解题的关键.

类型四、三角形内角和定理的应用

例 4. 如图，在$\triangle ABC$中，点 D 为 BC 上一点，将△ABD 沿 AD 翻折得到$\triangle AED$，AE 与 BC 相交于点 F，若 AE 平分$\angle CAD$，$\angle B=40°$，$\angle C=35°$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/938034123040006054