

二次函数与幂函数-一轮复习考点专练

核心考点 1 求二次函数的解析式

角度 1 求二次函数的解析式

1. 已知函数 $f(x) = -x^2 + bx + c$ ，且 $f(x+1) = f(1-x)$ ，函数 $f(x)$ 的最大值为 1，若当

$n > m > 0$ ， $x \in [m, n]$ 时， $f(x)$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]$ ，则 $mn =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D. 2

2. 已知函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ ($m, n \in \mathbf{R}$)，关于 x 的不等式 $x < f(x)$ 的解集为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $m = -1, n = 1$

B. 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = 1$

C. 不等式 $f(x) < f(f(x))$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

D. 若 $h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x \leq \frac{1}{2}, \\ f(x), & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 且 $h(x) < h(2x+2)$ ，则 x 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

3. 已知一元二次函数 $f(x)$ 满足： $f(1) = 1$ ，且 $0 \leq f(x) \leq 2x^2$ 恒成立，则 $f(x) =$ _____；

若 $a_n = f(1) + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \dots + \frac{f(n)}{n}$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 _____.

4. 若二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) + f(x) = -x^2 - 5x - \frac{5}{2}$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

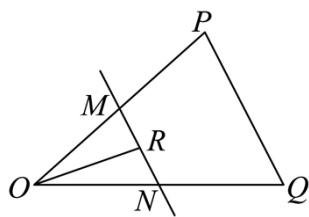
(2) 若函数 $g(x) = x \ln x + f(x)$ ，解关于 x 的不等式： $g(x^2 + x) \geq g(2)$.

核心考点 2 二次函数的性质

角度 1 求二次函数的值域或最值

5. 如图，在三角形 OPQ 中， M 、 N 分别是边 OP 、 OQ 的中点，点 R 在直线 MN 上，且

$\vec{OR} = x\vec{OP} + y\vec{OQ}$ ($x, y \in \mathbf{R}$)，则代数式 $\sqrt{x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2}}$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, $f(5) = 12$, 且函数 $f(x+2)$ 为偶函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $g(x) = |f(x)|$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的值域.

7. 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$,

(1) 判断当 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由

(2) 若函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $[1, a]$ ($a > 1$), 求实数 a 的值;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上单调递减, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, a+1]$, 总有

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 3$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

角度 2 根据二次函数的最值或值域求参数

8. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的最小值为 0, 若关于 x 的不等式 $f(x) < c$ 的解集为

$(m, m+4)$, 则实数 c 的值为 ()

- A. 9 B. 8 C. 6 D. 4

9. 设 θ 为两个非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角, 已知对任意实数 t , $|\vec{b} - t\vec{a}|$ 的最小值为 1, 则 ()

- A. 若 θ 确定, 则 $|\vec{a}|$ 唯一确定 B. 若 θ 确定, 则 $|\vec{b}|$ 唯一确定
C. 若 $|\vec{a}|$ 确定, 则 θ 唯一确定 D. 若 $|\vec{b}|$ 确定, 则 θ 不唯一确定

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x, & x > 0 \\ 2x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在区间 $(a-1, 3-2a)$ 上有最大值, 则实数 a 的取值范围

是_____.

角度 3 判断二次函数的单调性和求解单调区间

11. 已知方程 $x + 5 + \ln x = 0$ 和 $x + 5 + e^x = 0$ 的解分别是 α 和 β , 则函数 $f(x) = (x + \alpha)(x + \beta)$

的单调递减区间是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ B. $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ C. $(-\infty, 5]$ D. $[5, +\infty)$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 f(x-1)$, 则函数 $g(x)$ 的递减区间是_____.

13. 已知函数 $f(x) = -x|x-a| + 1 (x \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 试写出函数 $g(x) = f(x) - x$ 的单调区间;

(2) 当 $a > 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值.

角度 4 已知二次函数的单调区间求参数值或范围

14. 已知函数 $f(x) = x^2 - \left|x^2 - \frac{a}{3}x - 9\right|$ 在区间 $(-\infty, -3), (1, +\infty)$ 上都单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $0 < a \leq 4$ B. $0 < a \leq 8$
C. $0 < a \leq 12$ D. $0 < a \leq 16$

15. 若函数 $f(x) = \left|x^2 - (m-2)x + 1\right|$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调, 则实数 m 的值可以为 ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ 在 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, a+1]$, 总有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$, 则实数 a 的取值范围是_____.

核心考点 3 与二次函数相关的复合函数问题

角度 1 与二次函数相关的复合函数问题

17. 已知函数 $f(x) = -x^2 + bx + c$, 则“ $f\left(f\left(\frac{b}{2}\right)\right) > 0$ ”是“方程 $f(x) = 0$ 有两个不同实数解且方程 $f(f(x)) = 0$ 恰有两个不同实数解”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + mx + n (m, n \in \mathbf{R})$, 关于 x 的不等式 $x < f(x)$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 则 ()

- A. $m = -1, n = 1$

B. 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 的最小值一定为 $g(1) = 1$

C. 不等式 $f(x) < f(f(x))$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

D. 若 $h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & x \leq \frac{1}{2} \\ f(x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$, 且 $h(x) < h(2x+2)$, 则 x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

19. 请先阅读下列材料, 然后回答问题:

对于问题: “已知函数 $f(x) = \frac{1}{3+2x-x^2}$, 问函数 $f(x)$ 是否存在最大值或最小值? 若存在, 求出最大值或最小值, 若不存在, 说明理由.”

一个同学给出了如下解答:

解: 令 $u = 3+2x-x^2$, 则 $u = -(x-1)^2 + 4$. 当 $x=1$ 时, u 有最大值. $u_{\max} = 4$, 显然 u 没有最小值. $\therefore$ 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 有最小值 $\frac{1}{4}$, 没有最大值.

(1) 你认为上述解答是否正确? 若不正确, 说明理由, 并给出正确的解答;

(2) 对于函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ ($a > 0$), 试研究其最值情况.

核心考点 4 根据函数是幂函数求参数值

角度 1 根据函数是幂函数求参数值

20. 已知函数 $f(x) = (m-1)x^{m+1}$ 为幂函数, 则 $f(a^2-2a) + f(2a-a^2) =$ ()

A. 0 B. -1 C. a^2 D. $a^6 - a^4$

21. 已知幂函数 $f(x) = (m^2-2m-2)x^{m^2+m-9}$ 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都满足

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, 若 $f(a)+f(b) > 0$, 则 ()

A. $a+b < 0$ B. $a+b > 0$ C. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$
D. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

22. 若函数 $f(x) = (m+3)x^a$ ($m, a \in \mathbf{R}$) 是幂函数, 且其图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则函数

$g(x) = \log_a(x^2+mx-3)$ 的单调递增区间为_____.

核心考点 5 幂函数的定义域与值域

角度 1 求幂函数的定义域

23. 下列函数中, 与幂函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 有相同定义域的是 ()

- A. $y = \log_2 x$; B. $y = \frac{1}{x}$; C. $y = |x|$; D. $y = 2^x$.

24. 已知幂函数 $f(x) = x^{(m^2+m)^{-1}}$ ($m \in \mathbb{N}_+$).

(1) 试确定该函数的定义域, 并指明该函数在其定义域上的单调性;

(2) 若该函数 $f(x)$ 经过点 $(2, \sqrt{2})$, 试确定 m 的值, 并求满足条件 $f(2-a) > f(a-1)$ 的实数 a 的取值范围.

25. 已知幂函数 $f(x) = x^m$ 的图象过 $(2, \sqrt{2})$.

(1) 求 m 的值与函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 已知 $g(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} + \lg \frac{1-x}{1+x} + m$, 求 $g(m) + g(-m)$ 的值.

角度 2 求幂函数的值域

26. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{2})$, 则函数 $f(x)$ 的值域为

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

27. 若函数 $y = \sqrt{ax^2 + 2ax + 3}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$
C. $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$

28. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4$, 其中 $x \in [-8, 8]$, 则其值域为_____.

角度 3 根据幂函数值域求参数或范围

29. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{\sqrt{1+x^2}}$, 若函数 $g(x) = \frac{a}{x}$ ($a > 0$)

在 $(b, +\infty)$ 上的值域与函数 $f(x)$ 的值域相同, 则 $\frac{a}{b} =$ ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

30. 设 $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若存在实数 t , 使得 $[t] = 1$, $[t^2] = 2$, ..., $[t^n] = n$

同时成立, 则正整数 n 的最大值是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

31. 已知幂函数 $f(x) = (m-1)^2 x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(1) 求 m 的值;

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 记 $f(x)$ 的值域为集合 A , 若集合 $B = [2 - k, 4 - k]$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 k 的取值范围.

参考答案:

1. C

【分析】由已知得 b, c , 求得函数 $f(x)$ 的解析式, 再由二次函数的单调性可求得答案.

【详解】解: $\because f(x+1)=f(1-x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

$$\therefore \frac{b}{2}=1, \text{ 即 } b=2, \therefore f(x)=-(x-1)^2+c+1, \text{ 又 } f(x)_{\max}=1, \therefore c=0,$$

$$\therefore f(x)=-x^2+2x \leq 1, \therefore \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right] \subseteq (-\infty, 1],$$

$$\therefore m > 0, \text{ 且 } \frac{1}{m} \leq 1, \therefore m \geq 1, \therefore f(x) \text{ 在区间 } [m, n] \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{由 } \begin{cases} f(m)=\frac{1}{m}, \\ f(n)=\frac{1}{n} \end{cases} \text{ 得 } -x^2+2x=\frac{1}{x}, \text{ 整理得 } (x-1)(x^2-x-1)=0,$$

$$\text{解得 } x_1=1, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\because n > m \geq 1, \therefore m=1, n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \therefore mn=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

故选: C.

2. AC

【分析】由题意可得, $x=1$ 是 $x^2+(m-1)x+n=0$ 的唯一解, 可求得 $m=-1, n=1$, 从而求出 $f(x)$ 解析式. 再逐一检验各个选项是否正确, 从而得到结论.

【详解】对于 A 选项: $f(x)=x^2+mx+n$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 关于 x 的不等式 $x < f(x)$,

即 $x^2+(m-1)x+n > 0$, 它的解集为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

$\therefore x=1$ 是 $x^2+(m-1)x+n=0$ 的唯一解,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta=(m-1)^2-4n=0 \\ 1+(m-1)+n=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}, \text{ 故 A 选项正确;}$$

由以上可得: $f(x)=x^2-x+1$.

对于 B 选项: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)=x+\frac{1}{x}-1$ ($x \neq 0$), 当 $x < 0$ 时, $g(x) < 0$, 故 B 选项错误;

对于 C 项: 不等式 $f(x) < f(f(x))$, 即 $x^2-x+1 < (x^2-x+1)^2 - (x^2-x+1) + 1$,

即 $(x^2 - x + 1 - 1)^2 > 0$, 即 $x^2 \cdot (x-1)^2 > 0$, 解得 $x < 0$ 或 $0 < x < 1$ 或 $x > 1$,

所以解集为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 故 C 选项正确;

对于 D 选项: 若 $h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, x \leq \frac{1}{2}, \\ f(x), x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, x \leq \frac{1}{2}, \\ x^2 - x + 1, x > \frac{1}{2}, \end{cases}$

可知 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 是常数函数, 且 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h(x) > h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$,

所以 $h(x) < h(2x+2)$ 得: $\frac{1}{2} < x < 2x+2$ 或 $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+2 > \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 $x > -\frac{3}{4}$,

则 x 的取值范围为 $(-\frac{3}{4}, +\infty)$, 故 D 选项错误;

故选: AC.

3. $x^2 \quad \frac{2n}{n+1}$

【分析】令 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 由 $f(1) = 1$ 、不等式恒成立及二次函数的性质求 a 、 b 、 c ,

写出 $f(x)$ 的解析式, 进而可得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 应用裂项相消法求 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和.

【详解】令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $a \neq 0$,

$\because 0 \leq f(x) \leq 2x^2$ 恒成立,

$$\therefore \begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ (a-2)x^2 + bx + c \leq 0 \end{cases} \text{恒成立, 则} \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac \leq 0 \\ a-2 < 0 \\ b^2 - 4c(a-2) \leq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < 2 \\ b^2 \leq 4ac \\ b^2 \leq 4c(a-2) \end{cases}, \text{易知} \begin{cases} 0 < a < 2 \\ 4ac \geq 0 \\ 4c(a-2) \geq 0 \end{cases}, \text{则} \begin{cases} c \geq 0 \\ c \leq 0 \end{cases}, \text{即} c = 0,$$

$\therefore b^2 \leq 0$, 得 $b = 0$, 又 $f(1) = a \times 1^2 + 0 \times 1 + 0 = 1$, 得 $a = 1$,

$\therefore f(x) = x^2$.

$\therefore a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 则 $\frac{1}{a_n} = 2 \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$,

$\therefore \frac{1}{a_n}$ 的前 n 项和 $T_n = 2 \cdot (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 2 \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$.

故答案为: $x^2, \frac{2n}{n+1}$.

4. (1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

(2) $[-2, -1) \cup (0, 1]$

【分析】(1) $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 根据 $f(x+1) + f(x) = -x^2 - 5x - \frac{5}{2}$ 可得出关于 a 、 b 、 c 的方程组, 解出这三个未知数的值, 即可得出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求出函数 $g(x)$ 的定义域, 利用导数分析函数 $g(x)$ 的单调性, 由 $g(x^2 + x) \geq g(2)$ 可得出关于实数 x 的不等式组, 由此可解得实数 x 的取值范围.

【详解】(1) 解: 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

则 $f(x+1) + f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c + ax^2 + bx + c$

$= 2ax^2 + (2a+2b)x + a+b+2c = -x^2 - 5x - \frac{5}{2},$

所以,
$$\begin{cases} 2a = -1 \\ 2a+2b = -5 \\ a+b+2c = -\frac{5}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}, \text{ 故 } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

(2) 解: 函数 $g(x) = x \ln x + f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

且 $g'(x) = \ln x + 1 - x - 2 = \ln x - x - 1,$

令 $h(x) = \ln x - x - 1$, 其中 $x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$

由 $h'(x) > 0$ 可得 $0 < x < 1$, 由 $h'(x) < 0$ 可得 $x > 1$,

所以, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$,

故对任意的 $x > 0$, $g'(x) = h(x) \leq h(1) = 0,$

所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

由 $g(x^2 + x) \geq g(2)$ 可得 $0 < x^2 + x \leq 2$, 解得 $-2 \leq x < -1$ 或 $0 < x \leq 1$,

因此, 不等式 $g(x^2 + x) \geq g(2)$ 的解集为 $[-2, -1) \cup (0, 1]$.

5. C

【分析】根据给定条件，结合共线向量定理的推论可得 $2x+2y=1$ ，再消元借助二次函数求出最小值.

【详解】由 M 、 N 分别是边 OP 、 OQ 的中点，得 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{ON}$ ，而 $\overrightarrow{OR}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}$ ，

于是 $\overrightarrow{OR}=2x\overrightarrow{OM}+2y\overrightarrow{ON}$ ，又点 R 在直线 MN 上，因此 $2x+2y=1$ ，即 $y=\frac{1}{2}-x$ ，

$$\text{则 } \sqrt{x^2+y^2-x-y+\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+(\frac{1}{2}-x)^2-x-(\frac{1}{2}-x)+\frac{1}{2}}=\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{4}},$$

所以当 $x=\frac{1}{4}$ 时， $\sqrt{x^2+y^2-x-y+\frac{1}{2}}$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选：C

6. (1) $f(x)=x^2-4x+7$

(2) 值域为 $[3, 7]$.

【分析】(1) 先由 $f(5)=12$ 得 $5b+c=-13$ ，再由函数的奇偶性得到 $f(x)$ 的对称性，从而利用二次函数的性质求得 b ，进而得解；

(2) 先分析得 $f(x)>0$ 恒成立，从而得到 $g(x)$ ，再利用二次函数的性质即可得解.

【详解】(1) 因为 $f(x)=x^2+bx+c$ ，所以 $f(5)=25+5b+c=12$ ，则 $5b+c=-13$ ，

因为 $f(x+2)$ 为偶函数，而 $f(x)$ 的图象是由 $f(x+2)$ 的图象向右平移 2 个单位而得，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，则 $b=-4$ ，

所以 $c=7$ ，所以 $f(x)=x^2-4x+7$.

(2) 由 (1) 知， $f(x)=x^2-4x+7=(x-2)^2+3\geq 3>0$ ，

所以 $g(x)=|f(x)|=x^2-4x+7$ ，开口向上，对称轴为 $x=2$ ，

所以函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减，在 $[2, 4]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(2)=2^2-4\times 2+7=3$ ， $g(x)_{\max}=g(4)=4^2-4\times 4+7=7$ ，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的值域为 $[3, 7]$.

7. (1)见解析

$$(2) a = 2$$

$$(3) a \in [2, 1 + \sqrt{3}].$$

【分析】(1) 根据函数的奇偶性的定义即可求解

(2) 求出 $f(x)$ 的单调性, 求出函数的最值, 得到关于 a 的方程, 解出即可;

(3) 先由函数的解析式求出其对称轴及单调区间; 然后根据 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 得出 a 的一个取值范围; 再对任意的 $x_1, x_2 \in [1, a+1]$, $|f(x_1) - f(x_2)|_{\max} = |f(a) - f(1)| \leq 3$, 又可求出 a 的一个取值范围; 最后两者取交集, 则问题解决

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2 + 5$, 定义域为 $\mathbb{R}$,

$$\text{此时 } f(-x) = (-x)^2 + 5 = x^2 + 5 = f(x),$$

此时 $f(x)$ 为偶函数;

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } f(-x) = (-x)^2 - 2a(-x) + 5 = x^2 + 2ax + 5, \text{ 由于 } f(-x) \neq f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数,

$$(2) f(x) = x^2 - 2ax + 5, \text{ 开口向上, 对称轴是 } x = a > 1,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, a]$ 递减,

$$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 6 - 2a = a, \quad f(x)_{\min} = f(a) = 5 - a^2 = 1,$$

故 $a = 2$;

$$(3) \text{ 函数 } f(x) = x^2 - 2ax + 5 \text{ 的对称轴是 } x = a, \text{ 则其单调减区间为 } (-\infty, a],$$

因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 所以 $2 \leq a$, 即 $a \geq 2$.

$$\text{则 } |a - 1| \geq |(a + 1) - a| = 1,$$

因此任意的 $x_1, x_2 \in [1, a + 1]$, 总有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 3$, 只需 $|f(a) - f(1)| \leq 3$ 即可,

$$\text{即 } |(a^2 - 2a^2 + 5) - (1 - 2a + 5)| = |a^2 - 2a + 1| = (a - 1)^2 \leq 3, \text{ 即 } -\sqrt{3} \leq a - 1 \leq \sqrt{3},$$

解得: $1 - \sqrt{3} \leq a \leq 1 + \sqrt{3}$, 又 $a \geq 2$,

因此 $a \in [2, 1 + \sqrt{3}]$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/938045013023006115>