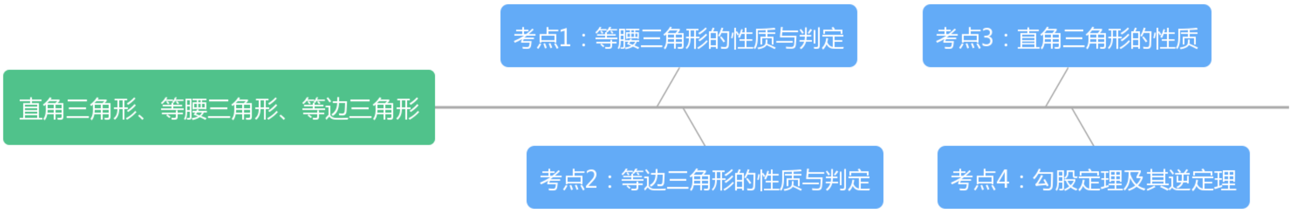
专题 14　直角三角形、等腰三角形、等边三角形

知识导航



知识整理

1. 等腰三角形

（1）定义:两边相等的三角形叫做等腰三角形.

（2）性质:①等腰三角形的两腰相等;

②等腰三角形的两底角相等,即“等边对等角”;

③等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合，即“三线合一”;

④等腰三角形是轴对称图形，有一条对称轴,对称轴是底边的垂直平分线.

（3）判定:

①有两条边相等的三角形是等腰三角形;

②有两个角相等的三角形是等腰三角形，即“等角对等边”.

2. 等边三角形

（1）定义:三边相等的三角形是等边三角形.

（2）性质:

①等边三角形的三边相等，三角相等,且都等于 60°;

②“三线合一”;

③等边三角形是轴对称图形，有三条对称轴.

（3）判定:

①三条边都相等的三角形是等边三角形;

②三个角都相等的三角形是等边三角形;

③有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形.

3. 直角三角形

（1）性质:

①直角三角形的两锐角互余;

②直角三角形 30°角所对的直角边等于斜边的一半;

③直角三角形中,斜边上的 中线长等于斜边长的一半.

（2）判定:有一个角是直角的三角形是直角三角形.

（3）勾股定理及其逆定理

①勾股定理:直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方;

②勾股定理的逆定理:若一个三角形中有两边的平方和等于第三边的平方，则这个三角形是直角三角形.

考点讲解

考点 1：等腰三角形的性质与判定

【例 1】（2022·江苏宿迁·中考真题）若等腰三角形的两边长分别是 3cm 和 5cm，则这个等腰三角形的周长是（　　）

A．8cm　　B．13cm　　C．8cm 或 13cm　　D．11cm 或 13cm

【答案】D

【分析】题目给出等腰三角形有两条边长为 3 和 5，而没有明确腰、底分别是多少，所以要进行讨论，还要应用三角形的三边关系验证能否组成三角形.

【详解】解：当 3 是腰时，∵3＋3＞5，∴3，3，5 能组成三角形，

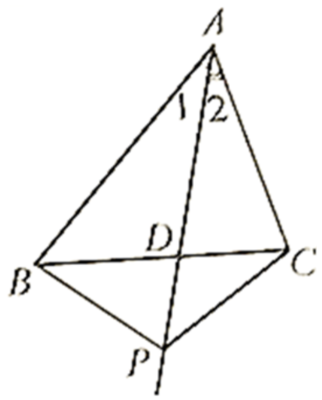
此时等腰三角形的周长为 3＋3＋5＝11（cm），

当 5 是腰时，∵3＋5＞5，5，5，3 能够组成三角形，

此时等腰三角形的周长为 5＋5＋3＝13（cm），

则三角形的周长为 11cm 或 13cm．故选：D

【例 2】（2022·浙江台州·中考真题）如图，点D在$\triangle ABC$的边BC上，点P在射线AD上（不与点A，D重合），连接PB，PC．下列命题中，假命题是（　　）



A．若 $AB=AC$，$AD\perp BC$，则 $PB=PC$　　B．若 $PB=PC$，$AD\perp BC$，则 $AB=AC$

C．若 $AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，则 $PB=PC$　　D．若 $PB=PC$，$\angle 1=\angle 2$，则 $AB=AC$

【答案】D

【分析】根据等腰三角形三线合一的性质证明 PD 是否是 BC 的垂直平分线，判断即可．

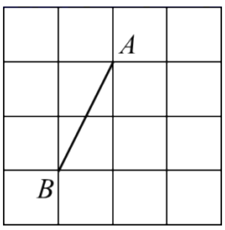
【详解】因为 $AB=AC$，且 $AD\perp BC$，得 AP 是 BC 的垂直平分线，所以 $PB=PC$，则 A 是真命题；

因为 $PB=PC$，且 $AD\perp BC$，得 AP 是 BC 的垂直平分线，所以 $AB=AC$，则 B 是真命题；

因为 $AB=AC$，且$\angle 1=\angle 2$，得 AP 是 BC 的垂直平分线，所以 $PB=PC$，则 C 是真命题；

因为 $PB=PC$，$\triangle BCP$ 是等腰三角形，$\angle 1=\angle 2$，不能判断 AP 是 BC 的垂直平分线，所以 AB 和 AC 不一定相等，则 D 是假命题．故选：D．

【例 3】（2021·江苏扬州市）如图，在 4×4 的正方形网格中有两个格点 A、B，连接 AB，在网格中再找一个格点 C，使得$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，满足条件的格点 C 的个数是（　　）



A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【答案】B

【分析】根据题意，结合图形，分两种情况讨论：①AB 为等腰直角$\triangle ABC$ 底边；②AB 为等腰直角$\triangle ABC$ 其中的一条腰．

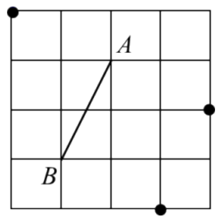
【详解】解：如图：分情况讨论：

①AB 为等腰直角$\triangle ABC$ 底边时，符合条件的 C 点有 0 个；

②AB 为等腰直角$\triangle ABC$ 其中的一条腰时，符合条件的 C 点有 3 个．

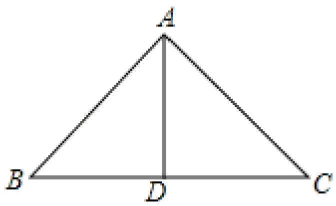
故共有 3 个点，

故选：B．



跟踪训练

1．（2020•福建）如图，AD 是等腰三角形 ABC 的顶角平分线，BD＝5，则 CD 等于（　　）



A．10　　　　B．5　　　　C．4　　　　D．3

【分析】根据等腰三角形三线合一的性质即可求解．

【详解】∵AD 是等腰三角形 ABC 的顶角平分线，BD＝5，

∴CD＝5．

故选：B．

2．（2020•齐齐哈尔）等腰三角形的两条边长分别为 3 和 4，则这个等腰三角形的周长是________．

【分析】分 3 是腰长与底边长两种情况讨论求解即可．

【详解】①3 是腰长时，三角形的三边分别为 3、3、4，

∵此时能组成三角形，

∴周长＝3+3+4＝10；

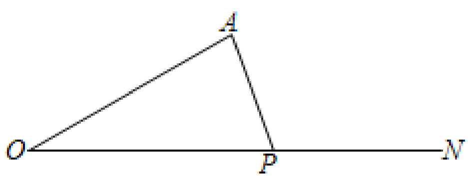
②3 是底边长时，三角形的三边分别为 3、4、4，此时能组成三角形，

所以周长＝3+4+4＝11．

综上所述，这个等腰三角形的周长是 10 或 11．

故答案为：10 或 11．

3．如图，点 P 是射线 ON 上一动点，$\angle AON$＝30°，当$\triangle AOP$ 为等腰三角形时，$\angle A$ 的度数一定不可能是（　　）



A．120°　　　　　　B．75°　　　　　　C．60°　　　　　　D．30°

【分析】分三种情形讨论即可：a、当点 O 为等腰三角形顶点．b、当点 A 为等腰三角形顶点．C、当点 P 为顶点．

【解答】解：当点 O 为等腰三角形顶点时，$\angle A=75°$，

当点 A 为等腰三角形顶点时，$\angle A=120°$，

当点 P 为顶点时，$\angle A=30°$，

综上，$\angle A$ 的度数为 30°或 75°或 120°，一定不可能等于 60°，

故选：C．

4．（2022·云南·中考真题）已知$\triangle ABC$是等腰三角形．若$\angle A$=40°，则$\triangle ABC$的顶角度数是____．

【答案】40°或 100°

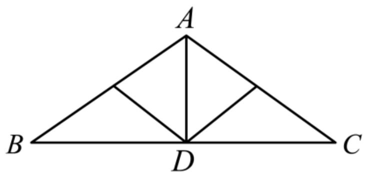
【分析】分$\angle A$为三角形顶角或底角两种情况讨论，即可求解．

【详解】解：当$\angle A$为三角形顶角时，则$\triangle ABC$的顶角度数是 40°；

当$\angle A$为三角形底角时，则$\triangle ABC$的顶角度数是 180°-40°-40°=100°；

故答案为：40°或 100°．

5．（2022·山东滨州·中考真题）如图，屋顶钢架外框是等腰三角形，其中$AB=AC$，立柱$AD\perp BC$，且顶角$\angle BAC=120°$，则$\angle C$的大小为_______．



【答案】30°##30 度

【分析】先由等边对等角得到$\angle B=\angle C$，再根据三角形的内角和进行求解即可．

【详解】$\because AB=AC$，

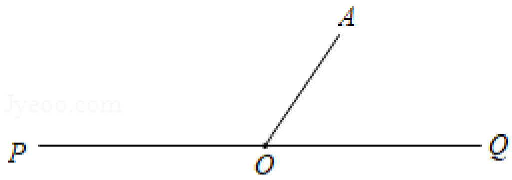
$\therefore \angle B=\angle C$，

$\because \angle BAC=120°$，$\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore \angle C=\dfrac{180°-120°}{2}=30°$，

故答案为：30°．

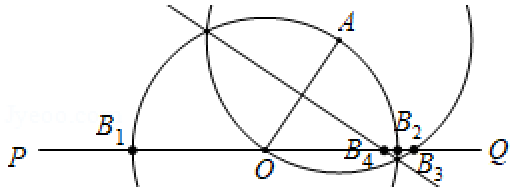
6．如图，直线 PQ 上有一点 O，点 A 为直线外一点，连接 OA，在直线 PQ 上找一点 B，使得$\triangle AOB$是等腰三角形，这样的点 B 最多有_____个．



【分析】分别以 A、O 为圆心 AO 长为半径画弧，作 AO 的垂直平分线，即可在直线 PQ 上找一点 B，使得 $\triangle AOB$ 是等腰三角形．

【详解】解：如图所示，分别以 A、O 为圆心，AO 长为半径画弧，与直线 PQ 的交点 B_1，B_2，B_3 符合题意；作 AO 的垂直平分线，与直线 PQ 的交点 B_4 符合题意，若 B_2，B_3，B_4 不重合，则最多有 4 个．

故答案为：4．



7．（2022·江苏苏州·中考真题）定义：一个三角形的一边长是另一边长的 2 倍，这样的三角形叫做“倍长三角形”．若等腰$\triangle ABC$ 是“倍长三角形”，底边 BC 的长为 3，则腰 AB 的长为______．

【答案】6

【分析】分类讨论：$AB=AC=2BC$ 或 $BC=2AB=2AC$，然后根据三角形三边关系即可得出结果．

【详解】解：$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，底边 $BC=3 \therefore AB=AC$

当 $AB=AC=2BC$ 时，$\triangle ABC$ 是“倍长三角形”；

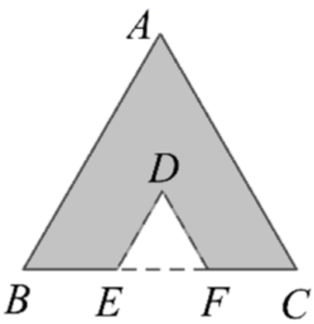
当 $BC=2AB=2AC$ 时，$AB+AC=BC$，根据三角形三边关系，此时 A、B、C 不构成三角形，不符合题意；

所以当等腰$\triangle ABC$ 是“倍长三角形”，底边 BC 的长为 3，则腰 AB 的长为 6．

故答案为 6．

考点 2：等边三角形的性质与判定

【例 4】如图，等边三角形纸片 ABC 的周长为 6，E，F 是边 BC 上的三等分点．分别过点 E，F 沿着平行于 BA，CA 的方向各剪一刀，则剪下的$\triangle DEF$ 的周长是（ ）



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】B

【分析】根据边三角形纸片 ABC 的周长为 6 可求 BC=2，根据三等分点的定义可求 EF 的长，再根据等边三角形的判定与性质即可求解．

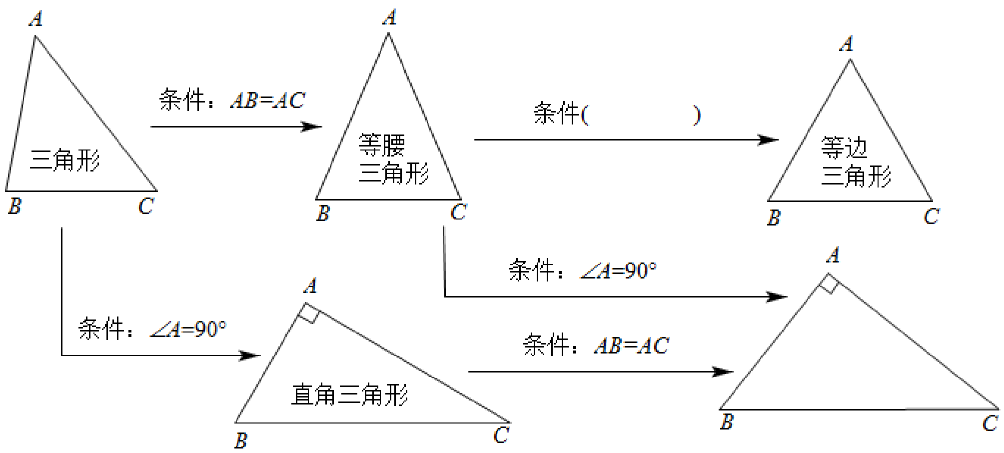
【详解】解：∵等边三角形纸片 ABC 的周长为 6，∴ $BC=2$

∵E，F 是边 BC 上的三等分点，∴EF=$\frac{2}{3}$，∵△ABC 是等边三角形，∴∠B=∠C=60°，

又∵DE∥AB，DF∥AC，∴∠DEF=∠B=60°，∠DFE=∠C=60°，

∴△DEF 是等边三角形，∴剪下的△DEF 的周长是$\frac{2}{3}$×3=2．故选：B．

【例 5】（2022·浙江嘉兴·中考真题）小曹同学复习时将几种三角形的关系整理如图，请帮他在横线上____填上一个适当的条件．



【答案】$\angle A=60°$（答案不唯一）

【分析】利用等边三角形的判定定理即可求解．

【详解】解：添加 $\angle A=60°$，理由如下：

QVABC 为等腰三角形，

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{180°-\angle A}{2}=60°$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

故答案为：$\angle A=60^{\circ}$（答案不唯一）.

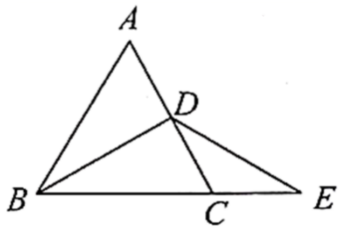
规律方法

（1）等边三角形与全等三角形的结合运用;

（2）等边三角形与含 30°角的直角三角形的结合运用.

跟踪训练

1．如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是中线，延长 BC 至 E，使 $CE=CD$，则下列结论错误的是（　　）



A．$\angle CED=30^{\circ}$　　B．$\angle BDE=120^{\circ}$　　C．$DE=BD$　　D．$DE=AB$

【答案】D

【分析】因为△ABC 是等边三角形，又 BD 是 AC 上的中线，所以有∠ADB＝∠CDB＝90°，且∠ABD＝∠CBD＝30°，∠ACB＝∠CDE＋∠DEC＝60°，又 CD＝CE，可得∠CDE＝∠CED＝30°，所以就有∠CBD＝∠DEC，即 DE＝BD，∠BDE＝∠CDB＋∠CDE＝120°.由此得出答案解决问题.

【详解】解：∵△ABC 是等边三角形，∴∠ABC=∠ACB＝60°，

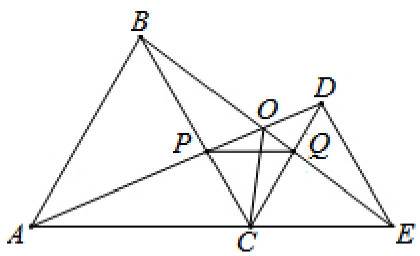
∵BD 是 AC 上的中线，∴∠ADB＝∠CDB＝90°，∠ABD＝∠CBD＝30°，

∵∠ACB＝∠CDE＋∠DEC＝60°，又 CD＝CE，∴∠CDE＝∠CED＝30°，

∴∠CBD＝∠DEC，∴DE=BD，∠BDE＝∠CDB＋∠CDE＝120°，故 ABC 均正确．故选：D．

2．如图，A，B，E 三点在同一直线上，$\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 都是等边三角形，连接 AD，BE，OC：下列结论中正确的是（　　）

①$\triangle ACD\cong\triangle BCE$；②$\triangle CPQ$ 是等边三角形；③OC 平分 $\angle AOE$；④$\triangle BPO\cong\triangle EDO$.



A．①②　　B．①②③　　C．①②④　　D．①②③④

【答案】B

【分析】利用等边三角形的性质，三角形的全等，逐一判断即可.

【详解】∵$\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 都是等边三角形，∴$CA=CB$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle ECD=60°$，

∴$\angle ACB+\angle PCQ=\angle ECD+\angle PCQ$，$\angle PCD=60°$，∴$\angle ACD=\angle BCE$，

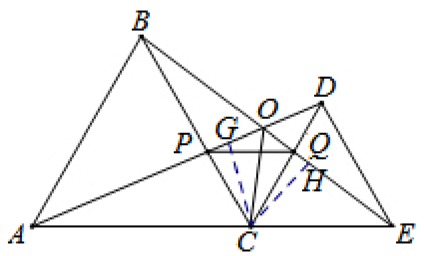
∴$\triangle ACD\cong\triangle BCE$，　∴①的说法是正确的；

∵$\triangle ACD\cong\triangle BCE$，∴$\angle PDC=\angle QEC$，

∵$\angle PCD=\angle QCE=60°$，$CD=CE$，∴$\triangle PCD\cong\triangle QCE$，

∴$PC=QC$，∴$\triangle CPQ$ 是等边三角形；∴②的说法是正确的；

∵$\triangle PCD\cong\triangle QCE$，∴$PD=QE$，$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle QCE}$，



过点 C 作 $CG\perp PD$，垂足为 G，$CH\perp QE$，垂足为 H，

∴$\frac{1}{2}PD\bullet CG=\frac{1}{2}QE\bullet CE$，∴$CG=CH$，∴$OC$ 平分 $\angle AOE$，∴③的说法是正确的；

无法证明$\triangle BPO\cong\triangle EDO$．∴④的说法是错误的；故答案为①②③，故选 B.

3．下列条件不能得到等边三角形的是(　)

A．有两个内角是$60°$的三角形　　B．有一个角是$60°$的等腰三角形

C．腰和底相等的等腰三角形　　D．有两个角相等的等腰三角形

【答案】D

【分析】根据等边三角形的定义可知：满足三边相等、有一个角为60°且两边相等、有两个内角为60°这三个条件中的任意一个条件即为等边三角形，根据这个定义进行逐项分析即可得到答案.

【详解】A、有两个内角是60°，因为三角形内角和是180°，可知另一个角也是60°，故该三角形为等边三角形，故本选项不合题意；

B、有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形，故本选项不合题意；

C、腰和底相等的等腰三角形，即三边都相等的三角形是等边三角形，故本选项不合题意；

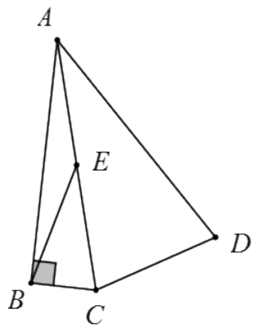
D、等腰三角形中两个底角是相等的，故不能判定该三角形是等边三角形，故本选项符合题意；

故答案为 D.

4．（2021·广东）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，点 E 是 AC 的中点，且 $AC=AD$

（1）尺规作图：作 $\angle CAD$ 的平分线 AF，交 CD 于点 F，连结 EF、BF（保留作图痕迹，不写作法）；

（2）在（1）所作的图中，若 $\angle BAD=45°$，且 $\angle CAD=2\angle BAC$，证明：$\triangle BEF$ 为等边三角形．



【答案】（1）图见解析；（2）证明见解析．

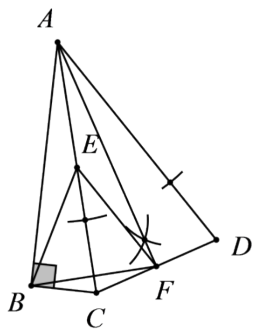
【分析】

（1）根据基本作图—角平分线作法，作出 $\angle CAD$ 的平分线 AF 即可解答；

（2）根据直角三角形斜边中线性质得到 $BE=\frac{1}{2}AC$ 并求出 $\angle BEC=\angle BAC+\angle ABE=30°$，再根据等腰三角形三线合一性质得出 $CF=DF$，从而得到 EF 为中位线，进而可证 $BE=EF$，$\angle BEF=60°$，从而由有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形得出结论．

【详解】

解：（1）如图，AF 平分 $\angle CAD$，



（2）$\because \angle BAD=45°$，且 $\angle CAD=2\angle BAC$，

$\therefore \angle CAD=30°$，$\angle BAC=15°$，

$\because AE=EC$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore BE=AE=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore \angle ABE=\angle BAC=15°$，

$\therefore \angle BEC = \angle BAC + \angle ABE = 30°$，

又$\because AF$ 平分 $\angle CAD$， $AC = AD$，

$\therefore CF = DF$，

又$\because AE = EC$，

$\therefore EF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AC$， $EF // AD$，

$\therefore \angle CEF = \angle CAD = 30°$，

$\therefore \angle BEF = \angle BEC + \angle CEF = 60°$

又$\because BE = EF = \frac{1}{2}AC$

$\therefore \triangle BEF$ 为等边三角形.

5. （2021·江苏连云港市）在数学兴趣小组活动中，小亮进行数学探究活动.

（1）$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，E 是边 AC 上的一点，且 $AE = 1$，小亮以 BE 为边作等边三角形 BEF，如图 1，求 CF 的长；

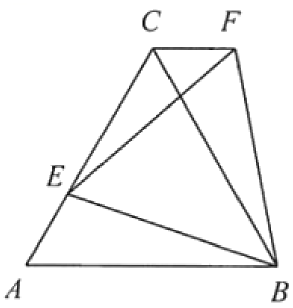


图 1

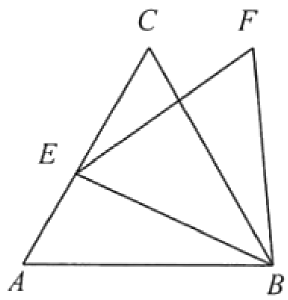


图 2

（2）$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，E 是边 AC 上的一个动点，小亮以 BE 为边作等边三角形 BEF，如图 2，在点 E 从点 C 到点 A 的运动过程中，求点 F 所经过的路径长；

（3）$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，M 是高 CD 上的一个动点，小亮以 BM 为边作等边三角形 BMN，如图 3，在点 M 从点 C 到点 D 的运动过程中，求点 N 所经过的路径长；

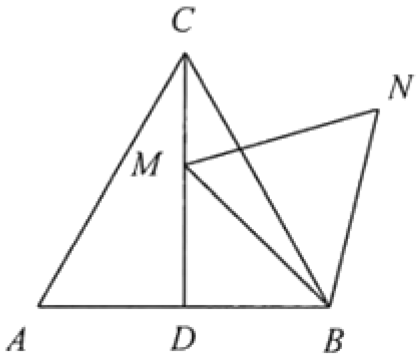


图 3

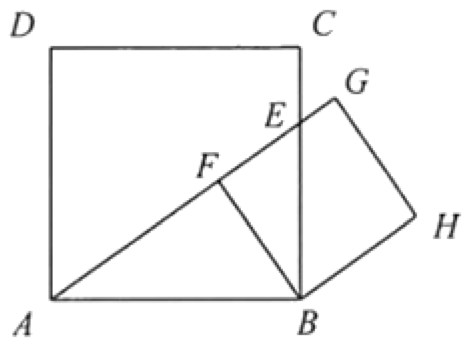


图 4

（4）正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E 是边 CB 上的一个动点，在点 E 从点 C 到点 B 的运动过程中，小亮以 B 为顶点作正方形 $BFGH$，其中点 F、G 都在直线 AE 上，如图 4，当点 E 到达点 B 时，点 F、G、H 与点 B 重合．则点 H 所经过的路径长为______，点 G 所经过的路径长为______．

【答案】（1）1；（2）3；（3）$\frac{3}{2}\sqrt{3}$；（4）$\frac{3}{4}\pi$；$\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$

【分析】

（1）由 ΔABC、ΔBEF 是等边三角形，$BA=BC$，$BE=BF$，$\angle ABE=\angle CBF$，可证 $\Delta ABE≌\Delta CBF$ 即可；

（2）连接 CF，ΔABC、ΔBEF 是等边三角形，可证 $\Delta ABE≌\Delta CBF$，可得 $\angle BCF=\angle ABC$，又点 E 在 C 处时，$CF=AC$，点 E 在 A 处时，点 F 与 C 重合．可得点 F 运动的路径的长 $=AC=3$；

（3）取 BC 中点 H，连接 HN，由 ΔABC、ΔBMN 是等边三角形，可证 $\Delta DBM≌\Delta HBN$，可得 $NH\perp BC$．又点 M 在 C 处时，$HN=CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，点 M 在 D 处时，点 N 与 H 重合．可求点 N 所经过的路径的长 $=CD=\frac{3}{2}\sqrt{3}$；

（4）连接 CG，AC，OB，由∠CGA=90°，点 G 在以 AC 中点为圆心，AC 为直径的 $\overset{\frown}{BC}$ 上运动，由四边形 $ABCD$ 为正方形，BC 为边长，设 OC=x，由勾股定理 $CO^2+BO^2=BC^2$ 即，可求 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，点 G 所经过的路径长为 $\overset{\frown}{BC}$ 长=$\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$，点 H 所经过的路径长为 $\overset{\frown}{BN}$ 的长 $=\frac{3}{4}\pi$．

【详解】

解:（1）∵ΔABC、ΔBEF 是等边三角形，