

济宁市第一中学 2024 届高三 3 月份定时检测

数学试题

一、单选题（每题 5 分，共 40 分）

- 二项式 $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^4$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 ()
 A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- 平面向量 a, b 满足 $|a|=2, |b|=3, |\vec{a}+b|=4$, 则 b 在 a 方向上的投影向量为 ()
 A. $\frac{\sqrt{15}}{12}\vec{a}$ B. $\frac{1}{4}\vec{a}$ C. $\frac{3}{8}\vec{a}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}\vec{a}$
- 若函数 $f(x) = \cos(\pi x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于直线 $x = \frac{1}{3}$ 对称, 则 $\varphi =$ ()
 A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- 从 $1, 2, \dots, 9$ 这九个数字中任取两个, 这两个数的和为质数的概率为 ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{13}{36}$
- 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 各顶点都在同一球面上, 且正四棱锥底面边长为 4, 体积为 $\frac{64}{3}$, 则该球表面积为 ()
 A. 9π B. 36π C. 4π D. $\frac{4\pi}{3}$
- 设抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F , 过抛物线上点 P 作其准线的垂线, 设垂足为 Q , 若 $\angle PQF = 30^\circ$, 则 $|PQ| =$ ()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 设 $a = e^{\frac{10}{33}}, b = \ln \frac{11}{10}, c = \frac{\ln 2.2}{10}$, 则 ()
 A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$
- 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $b_n = \sin(a_n)$, 存在正整数 t ($t \leq 8$), 使得 $b_{n+t} = b_n, n \in \mathbf{N}^*$. 若集合 $S = \{x | x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中只含有 4 个元素, 则 t 的可能取值有 () 个
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、多选题（每题 6 分，共 18 分）

- 已知圆 $C_1: (x-3)^2 + y^2 = 1, C_2: x^2 + (y-a)^2 = 16$, 则下列结论正确的有 ()
 A. 若圆 C_1 和圆 C_2 外离, 则 $a > 4$

B. 若圆 C_1 和圆 C_2 外切, 则 $a = \pm 4$

C. 当 $a = 0$ 时, 圆 C_1 和圆 C_2 有且仅有一条公切线

D. 当 $a = -2$ 时, 圆 C_1 和圆 C_2 相交

10. 已知 z_1 、 z_2 都是复数, 下列正确的是 ()

A. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 = \pm z_2$

B. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

C. 若 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$

D. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos 2x}$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称

C. 不等式 $f(x) > x$ 无解

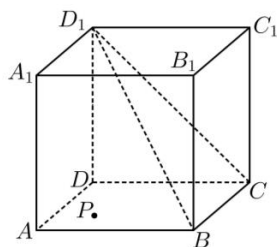
D. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、填空题(每题 5 分, 共 15 分)

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与直线 $l: x + 2y - 5 = 0$ 垂直, 则 C 的离心率为_____.

13. 甲袋中有 5 个红球和 3 个白球, 乙袋中有 4 个红球和 2 个白球, 如果所有小球只存在颜色的差别, 并且整个取球过程是盲取, 分两步进行: 第一步, 先从甲袋中随机取出一球放入乙袋, 分别用 A_1 、 A_2 表示由甲袋中取出红球、白球的事件; 第二步, 再从乙袋中随机取出两球, 用 B 表示第二步由乙袋中取出的球是“两球都为红球”的事件, 则事件 B 的概率是_____.

14. 如图, 已知点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 内(包含边界)一个动点, 若点 P 到点 A 的距离是点 P 到 BB_1 的距离的两倍, 则点 P 的轨迹的长度为_____.



四、解答题（共 77 分）

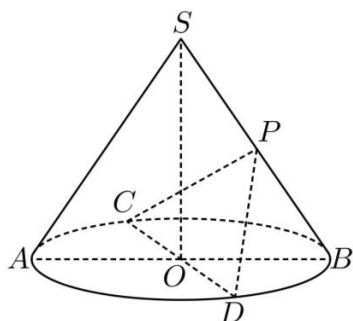
15. （13 分）在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

$$\sqrt{3}(a\cos C + c\cos A) = b\sin B.$$

(1)求角 B 的值；

(2)若 $b = 2\sqrt{3}$ ，求 $a^2 + c^2$ 的取值范围.

16. （15 分）如图， S 为圆锥顶点， O 是圆锥底面圆的圆心， AB, CD 是长度为 2 的底圆的两条直径， $AB \cap CD = O$ ，且 $SO = SO$ ， P 为母线 SB 上一点.



(1)求证：当 P 为 SB 中点时， $SA \parallel$ 平面 PCD ；

(2)若 $\angle AOC = 60^\circ$ ，二面角 $P-CD-B$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{21}}{21}$ ，试确定 P 点的位置.

17. （15 分）我国无人机发展迅猛，在全球具有领先优势，已经成为“中国制造”一张靓丽的新名片，并广泛用于森林消防、抢险救灾、环境监测等领域.某森林消防支队在一次消防演练中利用无人机进行投弹灭火试验，消防员甲操控无人机对同一目标起火点进行了三次投弹试验，已知无人机每次投弹时击中目标的概率都为 $\frac{4}{5}$ ，每次投弹是否击中目标相互独立.无人机击中目标一次起火点被扑灭的概率为 $\frac{1}{2}$ ，击中目标两次起火点被扑灭的概率为 $\frac{2}{3}$ ，击中目标三次起火点必定被扑灭.

(1)求起火点被无人机击中次数的分布列及数学期望；

(2)求起火点被无人机击中且被扑灭的概率.

18. (17分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}$, 点 $(3, 1)$ 在双曲线 C 上. 过 C 的左焦点 F 作直线 l 交 C 的左支于 A, B 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 $M(-2, 0)$, 试问: 是否存在直线 l , 使得点 M 在以 AB 为直径的圆上? 请说明理由.

(3) 点 $P(-4, 2)$, 直线 AP 交直线 $x = -2$ 于点 Q . 设直线 QA, QB 的斜率分别为 k_1, k_2 . 求证: $k_1 - k_2$ 为定值.

19. (17分) 已知函数 $f(x) = a(2x \ln x - x + 1) + x, g(x) = \sin x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a = 0, x > 0$ 时, 若在 $g(x)$ 的图象上有一点列

$A_i \left(\frac{1}{2^i}, g\left(\frac{1}{2^i}\right) \right) (i = 1, 2, 3, \dots, n, i \in \mathbf{N}^*, n \in \mathbf{N})$, 若直线 $A_i A_{i+1}$ 的斜率为 $k_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$,

(i) 求证: $g(x) > f(x) - \frac{1}{6}x^3$;

(ii) 求证: $\sum_{i=1}^n k_i > n - \frac{1}{9}$.

济宁市第一中学 2024 届高三 3 月份定时检测

数学试题及参考答案

一、单选题

1. 二项式 $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^4$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【分析】

利用二项式定理的通项公式即可求解.

【详解】

由二项式定理可知, $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^4$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_4^r (x^2)^{4-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r C_4^r x^{8-3r},$$

令 $8-3r=2$, 解得 $r=2$,

$$\text{所以 } T_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times C_4^2 x^2 = \frac{3}{2} x^2,$$

所以二项式 $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^4$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 $\frac{3}{2}$.

故选 : B.

2. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为

()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{12} \vec{a}$ B. $\frac{1}{4} \vec{a}$ C. $\frac{3}{8} \vec{a}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8} \vec{a}$

【答案】C

【分析】

由题设条件, 利用向量的模长公式求得 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, 再利用 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量的公式

$$\frac{|\vec{b}| \cos \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \text{ 即可求得.}$$

【详解】由 $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = 4$ 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$,

而 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{|\vec{b}|\cos\langle\vec{b},\vec{a}\rangle}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{\frac{3}{2}}{4}\vec{a}=\frac{3}{8}\vec{a}$.

故选：C.

3. 若函数 $f(x)=\cos(\pi x+\varphi)$ ($0<\varphi<\pi$) 的图象关于直线 $x=\frac{1}{3}$ 对称, 则 $\varphi=(\quad)$

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

【分析】

由余弦函数的对称性直接求解.

【详解】

因为 $f(x)=\cos(\pi x+\varphi)$ ($0<\varphi<\pi$) 的图象关于直线 $x=\frac{1}{3}$ 对称,

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$),

因为 $0<\varphi<\pi$, 所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

故选：C.

4. 从 1,2,3,4,5,6,7,8,9 这九个数字中任取两个, 这两个数的和为质数的概率为 $(\quad)$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{13}{36}$

【答案】C

【分析】

求所有组合个数, 列举和为质数的情况, 古典概型求概率.

【详解】

这九个数字中任取两个, 有 C_9^2 种取法,

和为质数有 $(1,2)(1,4)(2,3)(1,6)(2,5)(3,4)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6)(4,9)(5,8)(6,7)(8,9)$ 14 种情况, 共

因此所求概率为 $\frac{14}{C_9^2}=\frac{7}{18}$.

故选：C.

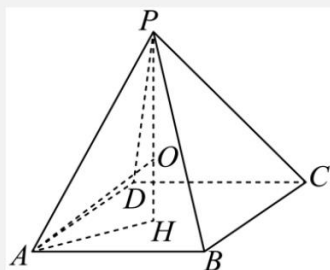
5. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 各顶点都在同一球面上, 且正四棱锥底面边长为 4, 体积为 $\frac{64}{3}$, 则该球表面积为 $(\quad)$

- A. 9π B. 36π C. 4π D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】B

【分析】根据体积可求正四棱锥的高，再结合外接球球心的性质可求其半径，故可求外接球的表面积.

【详解】



如图，设 P 在底面 $ABCD$ 的射影为 H ，则 $PH \perp$ 平面 $ABCD$,

且 H 为 AC, BD 的交点.

因为正四棱锥底面边长为 4，故底面正方形的面积可为 16，且 $AH = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

故 $\frac{1}{3} \times PH \times 16 = \frac{64}{3}$ ，故 $PH = 4$.

由正四棱锥的对称性可知 O 在直线 PH 上，设外接球的半径为 R ,

则 $OH = |4 - R|$ ，故 $R^2 = 8 + (4 - R)^2$ ，故 $R = 3$ ，

故正四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 $4 \times \pi \times 9 = 36\pi$ ，

故选：B.

6. 设抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，过抛物线上点 P 作其准线的垂线，设垂足为 Q ，若

$\angle PQF = 30^\circ$ ，则 $|PQ| =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

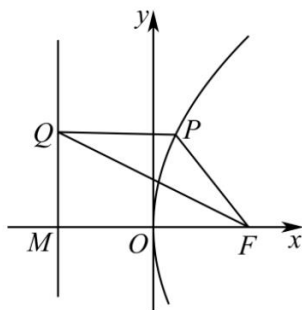
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【分析】

由题意得 $\angle QFM = 30^\circ$ ，结合正切定义以及 $|FM| = 1$ 可得 $|QF|$ ，进一步即可求解.

【详解】如图所示：



M 为准线与 x 轴的交点，

因为 $\angle PQF = 30^\circ$ ，且 $|PF| = |PQ|$ ，所以 $\angle PFQ = 30^\circ, \angle QPF = 120^\circ$ ，

因为 $FM \parallel PQ$ ，所以 $\angle QFM = 30^\circ$ ，

$$\text{而 } \tan 30^\circ = \frac{|QM|}{|MF|} = \frac{|QM|}{1} = |QM| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } |QF| = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } |PF| = |PQ| = \frac{|QF|}{2} \div \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}.$$

故选：A.

7. 设 $a = e^{\frac{10}{33}}$, $b = \ln \frac{11}{10}$, $c = \frac{\ln 2.2}{10}$, 则 ()

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $b < c < a$

D. $a < c < b$

【答案】B

【分析】

由题意可得 $a > 1$, $b < 1$, $c < 1$, 即可得 $a > b$, $a > c$, 再比较 b 与 c 的大小关系, 借助对数运算转化为比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小关系, 结合放缩计算即可得.

【详解】 $a = e^{\frac{10}{33}} > e^0 = 1$, $b = \ln \frac{11}{10} < 1$, $c = \frac{\ln 2.2}{10} < 1$, 故 $a > b$, $a > c$,

要比较 $\ln \frac{11}{10}$ 与 $\frac{\ln 2.2}{10}$ 的大小, 即比较 $\ln \left(\frac{11}{10} \right)^{10}$ 与 $\ln 2.2$ 的大小,

等价于比较 $(1.1)^{10}$ 与 2.2 的大小, 等价于比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小,

$$\text{又 } (1.1)^9 = 1.1 \times (1.1)^8 = 1.1 \times (1.21)^4 > 1.1 \times (1.2)^4$$

$$= 1.1 \times (1.44)^2 > 1.1 \times (1.4)^2 = 1.1 \times 1.96 > 2,$$

$$\text{故 } (1.1)^9 > 2, \text{ 即 } \ln \frac{11}{10} > \frac{\ln 2.2}{10}, \text{ 即 } b > c,$$

故 $c < b < a$.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于比较 b 与 c 的大小关系, 可借助对数运算转化为比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小关系, 再借助放缩帮助运算即可得.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $b_n = \sin(a_n)$, 存在正整数 t ($t \leq 8$), 使得 $b_{n+t} = b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. 若

集合 $S = \{x | x = b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 中只含有 4 个元素, 则 t 的可能取值有 () 个

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【分析】考虑 $t \leq 3$ 不符合题意, $t = 4, 6, 7, 8$ 时, 列举出满足条件的集合, 再考虑 $t = 5$ 时不成立, 得到答案.

【详解】当 $t \leq 3$ 时, $b_{n+t} = b_n$, 根据周期性知集合最多有 3 个元素, 不符合;

当 $t = 4$ 时, $b_{n+4} = b_n$, 取 $a_n = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{6}$, 此时 $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$, 满足条件;

当 $t = 5$ 时, $b_{n+5} = b_n$, 即 $\sin(a_n + 5d) = \sin a_n$, $d = \frac{2k\pi}{5}, k \in Z$, 在单位圆的五等分点上不可能取到 4 个不同的正弦值, 故不满足;

当 $t = 6$ 时, $b_{n+6} = b_n$, 取 $a_n = \frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}$, 此时 $S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1 \right\}$, 满足条件;

当 $t = 7$ 时, $b_{n+7} = b_n$, 取 $a_n = \frac{2\pi}{7}n - \frac{\pi}{2}$, 此时 $S = \left\{ -\sin \frac{3\pi}{14}, -1, \sin \frac{\pi}{14}, \sin \frac{5\pi}{14} \right\}$, 满足条件;

当 $t = 8$ 时, $b_{n+8} = b_n$, 取 $a_n = \frac{\pi}{4}n - \frac{5\pi}{8}$, 此时 $S = \left\{ -\sin \frac{\pi}{8}, -\sin \frac{3\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}, \sin \frac{3\pi}{8} \right\}$, 满足条件;

故选: C

二、多选题

9. 已知圆 $C_1: (x-3)^2 + y^2 = 1$, $C_2: x^2 + (y-a)^2 = 16$, 则下列结论正确的有 ()

- A. 若圆 C_1 和圆 C_2 外离, 则 $a > 4$
- B. 若圆 C_1 和圆 C_2 外切, 则 $a = \pm 4$
- C. 当 $a = 0$ 时, 圆 C_1 和圆 C_2 有且仅有一条公切线
- D. 当 $a = -2$ 时, 圆 C_1 和圆 C_2 相交

【答案】BCD

【分析】

根据圆与圆的位置关系对选项进行分析, 从而确定正确答案.

【详解】 $C_1(3, 0), C_2(0, a), |C_1C_2| = \sqrt{9+a^2}, r_1=1, r_2=4$.

若 C_1 和 C_2 外离, 则 $|C_1C_2| = \sqrt{9+a^2} > r_1 + r_2 = 5$, 解得 $a > 4$ 或 $a < -4$, 故 A 错误;

若 C_1 和 C_2 外切, $|C_1C_2| = \sqrt{9+a^2} = 5$, 解得 $a = \pm 4$, 故 B 正确;

当 $a = 0$ 时, $|C_1C_2| = 3 = r_2 - r_1$, C_1 和 C_2 内切, 故 C 正确;

当 $a = -2$ 时, $3 < |C_1C_2| = \sqrt{13} < 5$, C_1 和 C_2 相交, 故 D 正确.

故选: BCD

10. 已知 z_1, z_2 都是复数, 下列正确的是 ()

- A. 若 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1 = \pm z_2$
- B. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- C. 若 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ，则 $z_1 z_2 = 0$
- D. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

【答案】BD

【分析】

利用特殊值判断 A、C，根据复数代数形式的运算法则及复数的模判断 B、D.

【详解】对于 A：令 $z_1 = 2 + i$ 、 $z_2 = 1 + 2i$ ，则 $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$ ，显然不满足 $z_1 = \pm z_2$ ，故 A 错误；

对于 C：令 $z_1 = 1 + i$ 、 $z_2 = 1 - i$ ，则 $z_1 + z_2 = 2$ ， $z_1 - z_2 = 2i$ ，
所以 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ，但是 $z_1 z_2 = (1 + i)(1 - i) = 2$ ，
设 $z_1 = a + bi$ ， $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)，故 C 错误；

所以 $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$ ，

则 $|z_1 \cdot z_2| = |ac - bd + (ad + bc)i|$
 $= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$ ，
 又 $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$ ，

所以 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ，故 B 正确；

$\overline{z_1 \cdot z_2} = ac - bd - (ad + bc)i$ ，又 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i$ ，

所以 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ，故 D 正确.

故选：BD

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos 2x}$ ，则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
- C. 不等式 $f(x) > x$ 无解
- D. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】BD

【分析】

对于选项 A: 验证 $f(\pi + x) = f(x)$ 是否成立即可判断；对于选项 B: 验证