

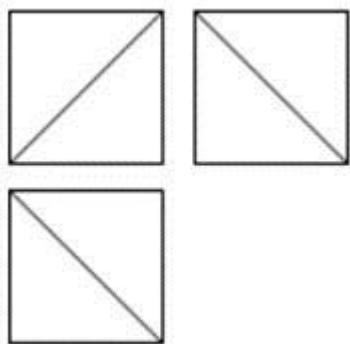
新疆昌吉州行知学校 2024 届学业水平考试数学试题模拟仿真卷 (4)

请考生注意:

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上, 请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前, 认真阅读答题纸上的《注意事项》, 按规定答题。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如下图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_4 = 5, S_9 = 81$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 23 B. 25 C. 28 D. 29

3. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ D. $(0, e)$

4. 复数 $z = \frac{(i-1)^2 + 4}{i+1}$ 的虚部为 ()

- A. -1 B. -3 C. 1 D. 2

5. 刘徽(约公元 225 年-295 年), 魏晋期间伟大的数学家, 中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的, “割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣”, 这可视为中国古代极限观念的佳作, 割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示), 当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积, 运用割圆术的思想, 得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为 ()



- A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

6. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 + i$ ，则 $|z|$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

7. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ， $g(x) = (2m+3)x + n$ ，若对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，记 $(2m+3)n$ 的最小值为 $f(m, n)$ ，则 $f(m, n)$ 最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

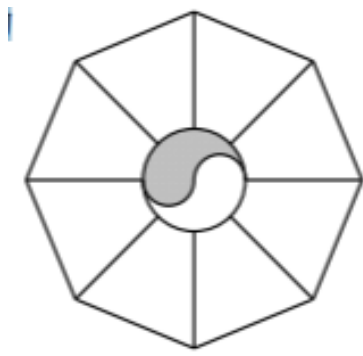
8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_3 = 7$ ， $S_3 = 9$ ，则 $a_{10} =$ ()

- A. 25 B. 32 C. 35 D. 40

9. $\frac{(1-2x)^7}{x}$ 的展开式中 x^2 的系数为 ()

- A. -84 B. 84 C. -280 D. 280

10. 《易经》包含着很多哲理，在信息学、天文学中都有广泛的应用，《易经》的博大精深，对今天的几何学和其它学科仍有深刻的影响。下图就是易经中记载的几何图形——八卦田，图中正八边形代表八卦，中间的圆代表阴阳太极图，八块面积相等的曲边梯形代表八卦田。已知正八边形的边长为 $10m$ ，阴阳太极图的半径为 $4m$ ，则每块八卦田的面积约为 ()



- A. $47.79m^2$ B. $54.07m^2$
C. $57.21m^2$ D. $114.43m^2$

11. 要排出高三某班一天中，语文、数学、英语各 2 节，自习课 1 节的功课表，其中上午 5 节，下午 2 节，若要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻（注意：上午第五节和下午第一节不算相邻），则不同的排法种数是 ()

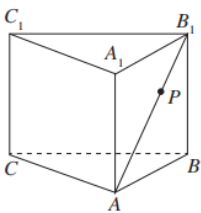
- A. 84 B. 54 C. 42 D. 18

12. 已知直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2$ ($t \in R$) 有公共点, 则 $t(4 - t)$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{32}{9}$ D. $\frac{32}{7}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB = AC = \sqrt{6}$, $BC = 2BB_1 = 2\sqrt{2}$, 点 P 为线段 AB_1 上一动点, 则 $C_1P + BP$ 的最小值为_____.



14. 已知关于 x 的不等式 $(ax - a^2 - 4)(x - 4) > 0$ 的解集为 A , 且 A 中共含有 n 个整数, 则当 n 最小时实数 a 的值为_____.

15. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

16. 甲、乙两人下棋, 两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$, 乙获胜的概率是 $\frac{1}{3}$, 则乙不输的概率是_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某商场为改进服务质量, 随机抽取了 200 名进场购物的顾客进行问卷调查。调查后, 就顾客“购物体验”的满意度统计如下:

	满意	不满意
男	40	40
女	80	40

- (1) 是否有 97.5% 的把握认为顾客购物体验的满意度与性别有关?
- (2) 为答谢顾客, 该商场对某款价格为 100 元/件的商品开展促销活动。据统计, 在此期间顾客购买该商品的支付情况如下:

支付方式	现金支付	购物卡支付	APP 支付
频率	10%	30%	60%

优惠方式	按 9 折支付	按 8 折支付	其中有 1/3 的顾客按 4 折支付, 1/2 的顾客按 6 折支付, 1/6 的顾客按 8 折支付
------	---------	---------	--

将上述频率作为相应事件发生的概率, 记某顾客购买一件该促销商品所支付的金额为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

附表及公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

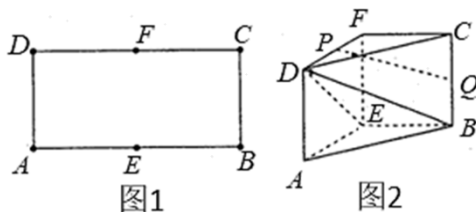
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 满足条件 $c = 2b - \sqrt{2}a, C = \frac{\pi}{4}$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高为 $\sqrt{3}$, 求 AB 的长.

19. (12 分) 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2BC = 4$, E, F 分别为 AB, CD 的中点. 沿 EF 将矩形 $AEFD$ 折起, 使 $\angle AEB = 135^\circ$, 如图所示. 设 P, Q 分别为线段 DF, BC 的中点, 连接 PQ .



(1) 求证: $PQ \parallel$ 平面 DEB ;

(2) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in \mathbb{N}^*$), $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列.

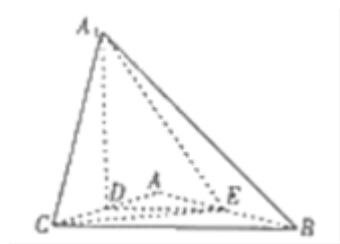
(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n}$, 证明: $1, T_n < 2$.

21. (12 分) 已知实数 x, y, z 满足 $\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} = 2$, 证明: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \sqrt{2}$.

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}, AC = 2$. D, E 分别为 AC, AB 的中点, 沿 DE 将 $\triangle ADE$

折起,得到如图所示的四棱锥 $A_1 - BCDE$.



(I)求证: 平面 $A_1DC \perp$ 平面 A_1BC .

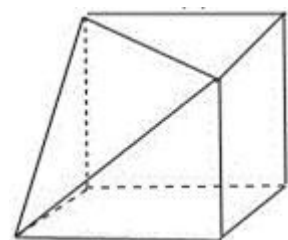
(II)当三棱锥 $C - A_1BE$ 的体积取最大值时,求平面 A_1CD 与平面 A_1BE 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、 D

【解析】



试题分析: 如图所示, 截去部分是正方体的一个角,其体积是正方体体积的 $\frac{1}{6}$,剩余部分体积是正方体体积的 $\frac{5}{6}$,所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$,故选 D.

考点: 本题主要考查三视图及几何体体积的计算.

2、 D

【解析】

由 $S_9 = 81$ 可求 $a_5 = 9$, 再求公差, 再求解即可.

【详解】

解: $\{a_n\}$ 是等差数列

$$\therefore S_9 = 9a_5 = 81$$

$$\therefore a_5 = 9, \text{ 又 } Q a_4 = 5,$$

$$\therefore \text{公差为 } d = 4,$$

$$\therefore a_{10} = a_4 + 6d = 29,$$

故选：D

【点睛】

考查等差数列的有关性质、运算求解能力和推理论证能力，是基础题.

3、D

【解析】

由题可知，可转化为曲线 $g(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有两个公共点，可转化为方程 $ax - 2 = \ln x$ 有两解，构造函数

$$h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}, \text{ 利用导数研究函数单调性，分析即得解}$$

【详解】

函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $y = \ln x$ 上，

即曲线 $g(x) = ax - 2$ 与 $y = \ln x$ 有两个公共点，

即方程 $ax - 2 = \ln x$ 有两解，

$$\text{即 } a = \frac{2 + \ln x}{x} \text{ 有两解，}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{2 + \ln x}{x},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2},$$

则当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x > \frac{1}{e}$ 时， $h'(x) < 0$ ，

故 $x = \frac{1}{e}$ 时 $h(x)$ 取得极大值 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e$ ，也即为最大值，

当 $x \rightarrow 0$ 时， $h(x) \rightarrow -\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow 0$ ，

所以 $0 < a < e$ 满足条件.

故选：D

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的零点，考查了学生综合分析，转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于较难题.

4、B

【解析】

对复数 z 进行化简计算, 得到答案.

【详解】

$$z = \frac{(i-1)^2 + 4}{i+1} = \frac{4-2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{2} = 1-3i$$

所以 z 的虚部为 -3

故选 B 项.

【点睛】

本题考查复数的计算, 虚部的概念, 属于简单题.

5、A

【解析】

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, 当 $n=180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积,

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$,

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,

所以当 $n=180$ 时, 可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$,

故选:A

【点睛】

本题考查三角形面积公式的应用, 考查阅读分析能力.

6、C

【解析】

由复数的除法运算整理已知求得复数 z , 进而求得其模.

【详解】

因为 $\frac{1}{z} = 1+i \Rightarrow z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故选: C

【点睛】

本题考查复数的除法运算与求复数的模，属于基础题.

7、C

【解析】

对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，因为 $\ln x \leq (2m+3)x + n$ ，对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，可得 $2m+3 > 0$ ，

令 $y = \ln x - (2m+3)x - n$ ，可得 $y' = \frac{1}{x} - (2m+3)$ ，结合已知，即可求得答案.

【详解】

Q 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立

$\therefore \ln x \leq (2m+3)x + n$ ，对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

$\therefore 2m+3 > 0$

令 $y = \ln x - (2m+3)x - n$ ，

可得 $y' = \frac{1}{x} - (2m+3)$

令 $y' = 0$ ，得 $x = \frac{1}{2m+3}$

当 $x > \frac{1}{2m+3}$ ， $y' < 0$

当 $0 < x < \frac{1}{2m+3}$ $y' > 0$

$\therefore x = \frac{1}{2m+3}$ ， $y_{\max} = \ln \frac{1}{2m+3} - 1 - n \leq 0$ ， $2m+3 \geq e^{-1-n}$

故 $(2m+3)n \geq \frac{n}{e^{n+1}} = f(m, n)$

Q $f'(m, n) = \frac{1-n}{e^{n+1}}$

令 $\frac{1-n}{e^{n+1}} = 0$ ，得 $n = 1$

$\therefore$ 当 $n > 1$ 时， $f'(m, n) < 0$

当 $n < 1$ ， $f'(m, n) > 0$

$\therefore$ 当 $n = 1$ 时， $f(m, n)_{\max} = \frac{1}{e^2}$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了根据不等式恒成立求最值问题，解题关键是掌握不等式恒成立的解法和导数求函数单调性的解法，考查了分析能力和计算能力，属于难题.

8、C

【解析】

设出等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差，即可根据题意列出两个方程，求出通项公式，从而求得 a_{10} 。

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，则

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 7 \\ S_3 = 3a_1 + 3d = 9 \end{cases}, \text{解得 } a_1 = -1, d = 4, \therefore a_n = 4n - 5, \text{ 即有 } a_{10} = 4 \times 10 - 5 = 35.$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式的求法和应用，涉及等差数列的前 n 项和公式的应用，属于容易题。

9、C

【解析】

由题意，根据二项式定理展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ，得 $(1-2x)^7$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = (-2)^k C_7^k x^k$ ，则

$$\frac{(1-2x)^7}{x} \text{ 展开式的通项为 } T_{k+1} = (-2)^k C_7^k x^{k-1}, \text{ 由 } k-1=2, \text{ 得 } k=3, \text{ 所以所求 } x^2 \text{ 的系数为 } (-2)^3 C_7^3 = -280. \text{ 故选}$$

C.

点睛：此题主要考查二项式定理的通项公式的应用，以及组合数、整数幂的运算等有关方面的知识，属于中低档题，也是常考知识点.在二项式定理的应用中，注意区分二项式系数与系数，先求出通项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ，再根据所求问题，通过确定未知的次数，求出 r ，将 r 的值代入通项公式进行计算，从而问题可得解。

10、B

【解析】

由图利用三角形的面积公式可得正八边形中每个三角形的面积，再计算出圆面积的 $\frac{1}{8}$ ，两面积作差即可求解。

【详解】

由图，正八边形分割成8个等腰三角形，顶角为 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，

设三角形的腰为 a ，

$$\text{由正弦定理可得 } \frac{a}{\sin \frac{135^\circ}{2}} = \frac{10}{\sin 45^\circ}, \text{ 解得 } a = 10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2},$$

所以三角形的面积为：

$$S = \frac{1}{2} \times \left(10\sqrt{2} \sin \frac{135^\circ}{2} \right)^2 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \cos 135^\circ}{2} = 25(\sqrt{2} + 1),$$

所以每块八卦田的面积约为: $25(\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{8} \times \pi \times 4^2 \approx 54.07$.

故选: B

【点睛】

本题考查了正弦定理解三角形、三角形的面积公式, 需熟记定理与面积公式, 属于基础题.

11、C

【解析】

根据题意, 分两种情况进行讨论: ①语文和数学都安排在上午; ②语文和数学一个安排在上午, 一个安排在下午. 分别求出每一种情况的安排方法数目, 由分类加法计数原理可得答案.

【详解】

根据题意, 分两种情况进行讨论:

①语文和数学都安排在上午, 要求2节语文课必须相邻且2节数学课也必须相邻, 将2节语文课和2节数学课分别捆绑, 然后在剩余3节课中选1节到上午, 由于2节英语课不加以区分, 此时, 排法种数为 $\frac{C_3^1 A_2^2 A_3^3}{A_2^2} = 18$ 种;

②语文和数学都一个安排在上午, 一个安排在下午.

语文和数学一个安排在上午, 一个安排在下午, 但2节语文课不加以区分, 2节数学课不加以区分, 2节英语课也不加以区分, 此时, 排法种数为 $\frac{C_2^1 A_4^4}{A_2^2} = 24$ 种.

综上所述, 共有 $18 + 24 = 42$ 种不同的排法.

故选: C.

【点睛】

本题考查排列、组合的应用, 涉及分类计数原理的应用, 属于中等题.

12、C

【解析】

根据 $x^2 + y^2 = 2t - t^2$ ($t \in R$) 表示圆和直线 $x + y = t$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2t - t^2$ ($t \in R$) 有公共点, 得到 $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$, 再利用二次函数的性质求解.

【详解】

因为 $x^2 + y^2 = 2t - t^2$ ($t \in R$) 表示圆,

所以 $2t - t^2 > 0$, 解得 $0 < t < 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945011242332012003>