

专题 26 活用隐圆的五种定义妙解压轴题

【题型归纳目录】

题型一：隐圆的第一定义：到定点的距离等于定长

题型二：隐圆的第二定义：到两定点距离的平方和为定值

题型三：隐圆的第三定义：到两定点的夹角为 90°

题型四：隐圆的第四定义：边与对角为定值、对角互补、数量积定值

题型五：隐圆的第五定义：到两定点距离之比为定值

【典例例题】

题型一：隐圆的第一定义：到定点的距离等于定长

例 1. (2023·和平区校级月考) 平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|DA|=|DB|=|DC|=2$, 且 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -2$, 动点 P, M 满足 $|AP|=1, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值为()

- A. $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$ C. $\frac{43}{4}$ D. $\frac{49}{4}$

例 2. (2023 春·温州期中) 已知 \vec{a}, \vec{b} 是单位向量, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 若向量 c 满足 $|\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的取值范围是()

- A. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ B. $[1, \sqrt{2}+1]$ C. $[0, 2]$ D. $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$

例 3. (2023·延边州一模) 如果圆 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8$ 上总存在两个点到原点的距离为 $\sqrt{2}$, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-3, 3)$ B. $(-1, 1)$
C. $(-3, 1)$ D. $(-3, -1) \cup (1, 3)$

例 4. (2023·花山区校级期末) 设点 M 为直线 $x=2$ 上的动点, 若在圆 $O: x^2 + y^2 = 3$ 上存在点 N , 使得 $\angle OMN = 30^\circ$, 则 M 的纵坐标的取值范围是()

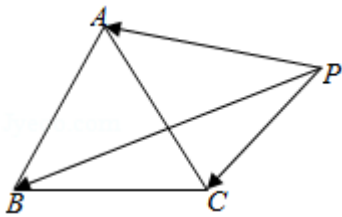
- A. $[-1, 1]$ B. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ C. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

例 5. (2023·广元模拟) 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|DA|=|DB|=|DC|=2$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$, 动点 P, M 满足 $|AP|=1, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$, 则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值为_____.

题型二：隐圆的第二定义：到两定点距离的平方和为定值

例 6. (2023·普陀区二模) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, 点 P 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 且

$|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2 = a$ (a 为常数). 下列结论中, 正确的是()



- A. 当 $0 < a < 1$ 时, 满足条件的点 P 有且只有一个
- B. 当 $a = 1$ 时, 满足条件的点 P 有三个
- C. 当 $a > 1$ 时, 满足条件的点 P 有无数个
- D. 当 a 为任意正实数时, 满足条件的点 P 是有限个

例 7. (2023·江苏模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x + a + 3)^2 + (y - 2a)^2 = 1$ (a 为实数). 若圆 O 和圆 M 上分别存在点 P, Q , 使得 $\angle OQP = 30^\circ$, 则 a 的取值范围为_____.

例 8. (2023·通州区月考) 在平面直角坐标系 xOy 中, $P(2, 2), Q(0, -4)$ 为两个定点, 动点 M 在直线 $x = -1$ 上, 动点 N 满足 $NO^2 + NQ^2 = 16$, 则 $|\vec{PM} + \vec{PN}|$ 的最小值为_____.

例 9. (2023·盐城三模) 已知 A, B, C, D 四点共面, $BC = 2, AB^2 + AC^2 = 20, \vec{CD} = 3\vec{CA}$, 则 $|\vec{BD}|$ 的最大值为_____.

例 10. (2023·大武口区校级期末) 已知圆 $C: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$, 点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 点 P 是圆上的动点, 则 $d = |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

例 11. (2023·大观区校级期中) 正方形 $ABCD$ 与点 P 在同一平面内, 已知该正方形的边长为 1, 且 $|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 = |\vec{PC}|^2$, 求 $|\vec{PD}|$ 的取值范围.

例 12. 已知圆 $C: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$, 点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 点 P 是圆上的动点, 求 $d = |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2$ 的最大值、最小值及对应的 P 点坐标.

题型三: 隐圆的第三定义: 到两定点的夹角为 90°

例 13. (2023 春·湖北期末) 已知 \vec{a}, \vec{b} 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

例 14. (2023 春·龙凤区校级期末) 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-3)^2=10$ 和点 $M(5,t)$, 若圆 C 上存在两点 A, B 使得 $MA \perp MB$, 则实数 t 的取值范围是()

- A. $[3, 5]$ B. $[2, 4]$ C. $[2, 6]$ D. $[1, 5]$

例 15. (2023·荆州区校级期末) 已知 M, N 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上两点, 点 $P(1,2)$, 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{5}-1$ B. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

例 16. (2023·浙江期中) 已知点 $A(1-m,0), B(1+m,0)$, 若圆 $C:x^2+y^2-8x-8y+31=0$ 上存在一点 P , 使得 $PA \perp PB$, 则实数 m 的最大值是()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

例 17. (2023·彭州市校级月考) 设 $m \in R$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是()

- A. $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ B. $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$ C. $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$ D. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$

例 18. (2023·安徽校级月考) 设 $m \in R$, 过定点 A 的动直线 $x+my+m=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+2=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是()

- A. $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$ B. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$ C. $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$ D. $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

例 19. (2023·北京模拟) 已知 $m \in R$, 过定点 A 的动直线 $mx+y=0$ 和过定点 B 的动直线 $x-my-m+3=0$ 交于点 P , 则 $|PA|+\sqrt{3}|PB|$ 的取值范围是()

- A. $(\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ B. $(\sqrt{10}, \sqrt{30}]$ C. $[\sqrt{10}, \sqrt{30})$ D. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$

例 20. (2023 春·大理市校级期末) 已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0), B(m,0), (m>0)$. 若圆 C 上存在点 P , 使得 $\angle APB=90^\circ$, 则 m 的最小值为()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

例 21. (2023 春·红岗区校级期末) 已知圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+24=0$ 和两点 $A(-m,0), B(m,0)(m>0)$

，若圆 C 上存在点 P ，使得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ ，则 m 的最大值与最小值之差为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

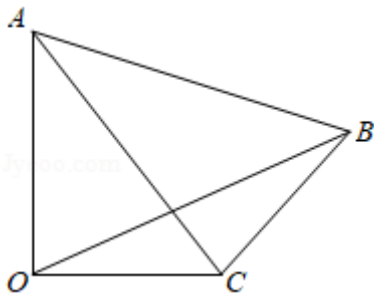
例 22. (2023·兰州一模) 已知圆 $C: (x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 1$ 和两点 $A(-t, 0)$ ， $B(t, 0)(t > 0)$ ，若圆 C 上存在点 P ，使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，则当 t 取得最大值时，点 P 的坐标是()

- A. $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2})$ C. $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ D. $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$

例 23. (2023·海淀区校级三模) 过直线 $l: y = 2x + a$ 上的点作圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的切线，若在直线 l 上存在一点 M ，使得过点 M 的圆 C 的切线 MP ， $MQ(P, Q$ 为切点) 满足 $\angle PMQ = 90^\circ$ ，则 a 的取值范围是()

- A. $[-10, 10]$ B. $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$
C. $(-\infty, -10] \cup [10, +\infty)$ D. $(-\infty, -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}, +\infty)$

例 24. (2023 春·东阳市校级期中) 如图，四边形 $AOCB$ 中， $OA \perp OC$ ， $CA \perp CB$ ， $AC = 2$ ， $CB = \sqrt{2}$ ，则 OB 的长度的取值范围是_____.



例 25. (2023 春·淮安校级期中) 若实数 a, b, c 成等差数列，点 $P(-1, 0)$ 在动直线 $ax + by + c = 0$ 上的射影为 M ，点 N 坐标为 $(3, 3)$ ，则线段 MN 长度的最小值是_____.

题型四：隐圆的第四定义：边与对角为定值、对角互补、数量积定值

例 26. (2023·长治模拟) 已知 \vec{a}, \vec{b} 是平面向量， \vec{e} 是单位向量，若非零向量 \vec{a} 与 \vec{e} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，向量 \vec{b}, \vec{e} 满足 $\vec{b}^2 - 6\vec{e}\vec{b} + 8 = 0$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为_____.

例 27. (2023 春·瑶海区月考) 在平面四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 BD ，已知 $CD = 9$ ， $BD = 16$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，则对角线 AC 的最大值为()

- A. 27 B. 16 C. 10 D. 25

例 28. (2023 秋·沈河区校级期中) 设向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 满足: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$, $\langle \vec{a}-\vec{c}, \vec{b}-\vec{c} \rangle=60^\circ$,

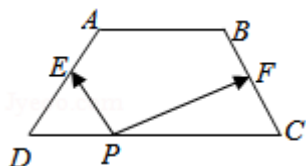
则 $|\vec{c}|$ 的最大值为()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

例 29. (2023·闸北区一模) 在平面内, 设 A , B 为两个不同的定点, 动点 P 满足: $\vec{PA}\cdot\vec{PB}=k^2$ (k 为实常数), 则动点 P 的轨迹为()

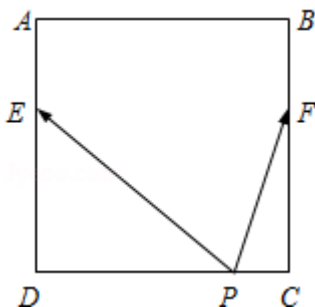
- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 不确定

例 30. (2023·和平区校级一模) 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, $AB=2$, $CD=4$, $BC=AD=\sqrt{5}$, E 和 F 分别为 AD 与 BC 的中点, 对于常数 λ , 在梯形 $ABCD$ 的四条边上恰好有 8 个不同的点 P , 使得 $\vec{PE}\cdot\vec{PF}=\lambda$ 成立, 则实数 λ 的取值范围是()



- A. $(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{20})$ B. $(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$ C. $(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4})$ D. $(-\frac{9}{20}, -\frac{1}{4})$

例 31. (2023·宁城县一模) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 点 E , F 分别在边 AD , BC 上, 且 $DE=2AE$, $CF=2BF$. 如果对于常数 λ , 在正方形 $ABCD$ 的四条边上, 有且只有 6 个不同的点 P 使得 $\vec{PE}\cdot\vec{PF}=\lambda$ 成立, 那么 λ 的取值范围是()



- A. (0,7) B. (4,7) C. (0,4) D. (-5,16)

例 32. (2023·黄浦区校级三模) 在边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中, M 是 BC 的中点, N 是 DA 边上的一点, 且 $|DN|=3|NA|$, 若对于常数 m , 在正方形 $ABCD$ 的边上恰有 6 个不同的点 P 满足: $\vec{PM}\cdot\vec{PN}=m$, 则实数 m 的取值范围是_____.

题型五：隐圆的第五定义：到两定点距离之比为定值

例 33. (2023·湖南·长沙县第一中学模拟预测) 古希腊三大数学家之一阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中指出：平面内与两定点距离的比为常数 k ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 的点的轨迹是圆，已知平面内两点 $A(\sqrt{5}, 0)$, B

$(2\sqrt{5}, 0)$ ，直线 $kx - y - k + 2 = 0$ ，曲线 C 上动点 P 满足 $\frac{|PB|}{|PA|} = \sqrt{2}$ ，则曲线 C 与直线 l 相交于 M 、 N 两点，

则 $|MN|$ 的最短长度为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{10}$

例 34. (2023·全国·高三专题练习) 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，主要研究成果集中在他的代表作《圆锥曲线》一书，阿波罗尼斯圆就是他的研究成果之一。指的是：已知动点 M 与两定点 Q, P 的距离之比

$\frac{|MQ|}{|MP|} = \lambda$ ($\lambda > 0, \lambda \neq 1$)，那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆。已知动点 M 的轨迹是阿波罗尼斯圆，其方程为

$x^2 + y^2 = 1$ ，其中，定点 Q 为 x 轴上一点，定点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{3}, 0)$, $\lambda = 3$ ，若点 $B(1, 1)$ ，则 $3|MP| + |MB|$ 的最

小值为 ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{11}$ C. $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{17}$

例 35. (2023·全国·高三专题练习) 阿波罗尼斯 (公元前 262 年~公元前 190 年)，古希腊人，与阿基米德、欧几里得一起被誉为古希腊三大数学家。阿波罗尼斯研究了众多平面轨迹问题，其中阿波罗尼斯圆是他的

论著中的一个著名问题：已知平面上两点 A, B ，则所有满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda$ ($\lambda > 0$ ，且 $\lambda \neq 1$) 的点 P 的轨迹是一个圆。已知平面内的两个相异定点 P, Q ，动点 M 满足 $|MP| = 2|MQ|$ ，记 M 的轨迹为 C ，若与 C 无公共点的

直线 l 上存在点 R ，使得 $|MR|$ 的最小值为 6，且最大值为 10，则 C 的长度为 ()

- A. 2π B. 4π C. 8π D. 16π

例 36. (2023·全国·高三专题练习) 阿波罗尼斯 (约公元前 262-190 年) 证明过这样一个命题：平面内到两定点距离之比为常数 k ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 的点的轨迹是圆。后人将这个圆称为阿氏圆。若平面内两定点 A, B

间的距离为 2，动点 P 与 A, B 距离之比满足： $|PA| = \sqrt{3}|PB|$ ，当 P, A, B 三点不共线时， $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

例 37. (2023 · 全国 · 高三专题练习) 已知两定点 $P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $Q(m, 0)\left(m < -\frac{1}{2}\right)$, 动点 M 与 P, Q 的距离之比 $\frac{|MQ|}{|MP|} = \lambda$ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$), 那么点 M 的轨迹是阿波罗尼斯圆, 若其方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 则 $\lambda + m$ 的值为

()

- A. -8 B. -4 C. 0 D. 4

例 38. (2023 · 全国 · 高三专题练习) 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家, 与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠, 他对圆锥曲线有深刻而系统的研究, 阿波罗尼斯圆就是他的研究成果之一, 指的是: 已知动点 M 与两个定点 A, B 的距离之比为 λ ($\lambda > 0$, 且 $\lambda \neq 1$), 那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆. 若

平面内两定点 A, B 间的距离为 2, 动点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \sqrt{3}$, 则 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的最大值为 ()

- A. $16 + 8\sqrt{3}$ B. $8 + 4\sqrt{3}$ C. $7 + 4\sqrt{3}$ D. $3 + \sqrt{3}$

例 39. (2023 · 江苏 · 高三专题练习) 古希腊数学家阿波罗尼奥斯 (约公元前 262 ~ 公元前 190 年) 的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果, 著作中有这样一个命题: 平面内与两定点距离的比为常数 k

($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 的点的轨迹是圆, 后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆. 已知 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, 动点 $P(x, y)$ 满足 $\frac{PA}{PO} = 2$, 则动点 P 轨迹与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相离 C. 内切 D. 外切

例 40. (2023 · 河南省杞县高中高三阶段练习 (理)) 古希腊数学家阿波罗尼奥斯 (约公元前 262 ~ 公元前 190 年) 的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果, 著作中这样一个命题: 平面内与两定点距离的比为常数 k ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 的点的轨迹是圆, 后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆, 已知点 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, 圆

$C: (x-2)^2 + (y-m)^2 = \frac{1}{4}$ ($m > 0$), 在圆上存在点 P 满足 $|PA| = 2|PB|$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$ D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right]$

例 41. (2023 · 江苏省江阴高级中学高三开学考试) 希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名他发现: “平面内到两个定点 A, B 的距离之比为定值 λ ($\lambda \neq 1$) 的点的轨迹是圆”. 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2, 1)$, $B(-2, 4)$, 点 P 是满足 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的阿氏圆上的任一点, 则该阿氏圆的方程为 _____; 若点 Q 为抛物线 $E: y^2 = 4x$

上的动点， Q 在 y 轴上的射影为 H ，则 $\frac{1}{2}|PB|+|PQ|+|QH|$ 的最小值为_____.

例 42. (2023·全国·高三专题练习) 被誉为古希腊“数学三巨匠”之一的数学家阿波罗尼斯发现: 平面内一动点 P 到两个不同定点 A, B 的距离之比为常数 $k(k > 0$ 且 $k \neq 1)$ ，则 P 点的轨迹是一个圆心在 AB 直线上的圆，简称“阿氏圆”. 据此请回答如下问题:

已知 $\triangle ABC$ 中， A 为一动点， B, C 为两定点，且 $|AB|=2|AC|$ ， $|BC|=a$ ， $\triangle ABC$ 面积记为 S ，若 $a=3$ 时，则 $S_{\max} =$ _____；若 $S=1$ 时，则 a 取值范围为_____.

专题 26 活用隐圆的五种定义妙解压轴题

【题型归纳目录】

题型一：隐圆的第一定义：到定点的距离等于定长

题型二：隐圆的第二定义：到两定点距离的平方和为定值

题型三：隐圆的第三定义：到两定点的夹角为 90°

题型四：隐圆的第四定义：边与对角为定值、对角互补、数量积定值

题型五：隐圆的第五定义：到两定点距离之比为定值

【典例例题】

题型一：隐圆的第一定义：到定点的距离等于定长

例 1. (2023·和平区校级月考) 平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|DA|=|DB|=|DC|=2$, 且 $\vec{DA} \cdot \vec{DB} = \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \vec{DC} \cdot \vec{DA} = -2$, 动点 P, M 满足 $|AP|=1, \vec{PM} = \vec{MC}$, 则 $|\vec{BM}|^2$ 的最大值为()

- A. $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$ C. $\frac{43}{4}$ D. $\frac{49}{4}$

【解析】解：由题可知 $|\vec{DA}|=|\vec{DB}|=|\vec{DC}|$, 则 D 到 A, B, C 三点的距离相等,

所以 D 是 $\triangle ABC$ 的外心,

又 $\vec{DA} \cdot \vec{DB} = \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \vec{DC} \cdot \vec{DA} = -2$,

变形可得 $\vec{DA} \cdot \vec{DB} - \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \vec{DB}(\vec{DA} - \vec{DC}) = \vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0$,

所以 $DB \perp AC$, 同理可得 $DA \perp BC, DC \perp AB$,

所以 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心,

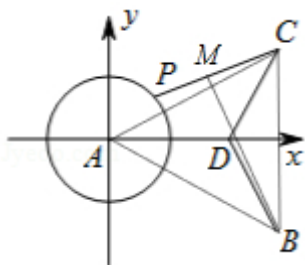
所以 $\triangle ABC$ 的外心与垂心重合,

所以 $\triangle ABC$ 是正三角形, 且 D 是 $\triangle ABC$ 的中心;

由 $\vec{DA} \cdot \vec{DB} = |\vec{DA}| |\vec{DB}| \cos \angle ADB = |\vec{DA}| |\vec{DB}| \left(\cos \frac{1}{2}\right) = -2$, 解得 $|\vec{DA}| = 2$,

所以 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$;

如图所示, 以 A 为坐标原点建立直角坐标系,



则 $B(3, -\sqrt{3}), C(3, \sqrt{3}), D(2, 0), |\vec{AP}| = 1$,

可设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，其中 $\theta \in [0, 2\pi]$ ，而 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}$ ，

即 M 是 PC 的中点，则 $M(\frac{3+\cos\theta}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sin\theta}{2})$ ，

$$|\overrightarrow{BM}|^2 = (\frac{\cos\theta-3}{2})^2 + (\frac{\sin\theta+3\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{37+12\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}{4}, \frac{37+12}{4} = \frac{49}{4},$$

当 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 时， $|\overrightarrow{BM}|^2$ 取得最大值为 $\frac{49}{4}$ 。

故选：D。

例 2. (2023 春·温州期中) 已知 \vec{a}, \vec{b} 是单位向量， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，若向量 c 满足 $|\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的取值范围是()

- A. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ B. $[1, \sqrt{2}+1]$ C. $[0, 2]$ D. $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$

【解析】解：由 \vec{a}, \vec{b} 是单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则可设 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ， $\vec{c} = (x, y)$ ；

Q 向量 \vec{c} 满足 $|\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，

$$\therefore |(x-1, y+1)| = 1,$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 1,$$

$$\text{即 } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1,$$

它表示圆心为 $C(1, -1)$ ，半径为 $r=1$ 的圆；

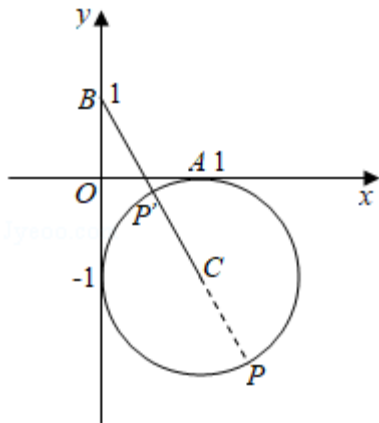
又 $|\vec{c} - \vec{b}| = |(x, y-1)| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ ，它表示圆 C 上的点到点 $B(0, 1)$ 的距离，如图所示：

$$\text{且 } |BC| = \sqrt{1^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sqrt{5}-1, |PB|, \sqrt{5}+1;$$

即 $|\vec{c} - \vec{b}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$ 。

故选：D。



【点评】

本题考查了向量的垂直与数量积的关系、数量积的运算性质、点与圆上的点的距离大小关系，也考查了推理能力和计算能力，是综合性题目。

例 3. (2023·延边州一模) 如果圆 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8$ 上总存在两个点到原点的距离为 $\sqrt{2}$ ，

则实数 a 的取值范围是()

A. $(-3, 3)$

B. $(-1, 1)$

C. $(-3, 1)$

D. $(-3, -1) \cup (1, 3)$

【解析】解：问题可转化为圆 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8$ 和圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相交，

两圆圆心距 $d = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{2}|a|$ ，

由 $R-r < |OO_1| < R+r$ 得 $2\sqrt{2} - \sqrt{2} < \sqrt{2}|a| < 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ ，

解得： $1 < |a| < 3$ ，即 $a \in (-3, -1) \cup (1, 3)$

故选： D .

例 4. (2023·花山区校级期末) 设点 M 为直线 $x=2$ 上的动点，若在圆 $O: x^2 + y^2 = 3$ 上存在点 N ，使得 $\angle OMN = 30^\circ$ ，则 M 的纵坐标的取值范围是()

A. $[-1, 1]$

B. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

C. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

【解析】解：设 $M(2, y_M)$ ，

在 $\triangle OMN$ 中，由正弦定理可得， $\frac{OM}{\sin \angle ONM} = \frac{ON}{\sin \angle OMN}$ ，

∵ $\angle OMN = 30^\circ$ ， $ON = \sqrt{3}$ ，

∴ $\frac{\sqrt{2^2 + (y_M)^2}}{\sin \angle ONM} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$ ，

整理得， $y_M = \pm \sqrt{(2\sqrt{3} \sin \angle ONM)^2 - 4}$ ，

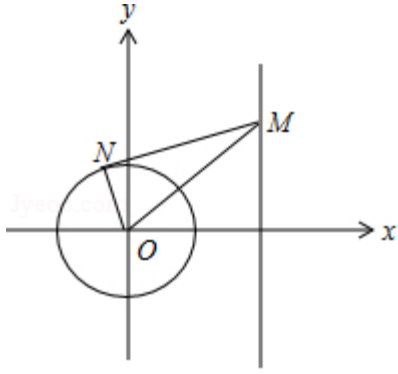
由题意知， $0^\circ < \angle ONM < 150^\circ$ ， ∴ $\sin \angle ONM \in (0, 1]$ 。

当 $\sin \angle ONM = 1$ 时， y_M 取得最值，

即直线 MN 为圆 O 的切线时 y_M 取得最值。

∴ $y_M \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ 。

故选： C .



例 5. (2023·广元模拟) 在平面内, 定点 A, B, C, D 满足 $|\vec{DA}|=|\vec{DB}|=|\vec{DC}|=2$, $\vec{DA} \cdot \vec{BC} = \vec{DB} \cdot \vec{AC} = \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$, 动点 P, M 满足 $|\vec{AP}|=1, \vec{PM} = \vec{MC}$, 则 $|\vec{BM}|^2$ 的最大值为_____.

【解析】解: 平面内, $|\vec{DA}|=|\vec{DB}|=|\vec{DC}|=2, \vec{DA} \cdot \vec{BC} = \vec{DB} \cdot \vec{AC} = \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$,

$\therefore \vec{DA} \perp \vec{BC}, \vec{DB} \perp \vec{AC}, \vec{DC} \perp \vec{AB}$,

可设 $D(0,0), A(2,0), B(-1,\sqrt{3}), C(-1,-\sqrt{3})$,

Q 动点 P, M 满足 $|\vec{AP}|=1, \vec{PM} = \vec{MC}$,

可设 $P(2+\cos\theta, \sin\theta), M(\frac{1+\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta-\sqrt{3}}{2})$,

$\therefore \vec{BM} = (\frac{3+\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta-3\sqrt{3}}{2})$,

$\therefore |\vec{BM}|^2 = (\frac{3+\cos\theta}{2})^2 + (\frac{\sin\theta-3\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{37+12\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)}{4} \leq \frac{49}{4}$,

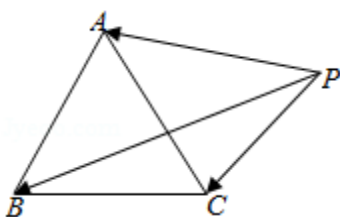
当且仅当 $\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=1$ 时取等号,

$\therefore |\vec{BM}|^2$ 的最大值为 $\frac{49}{4}$.

故答案为: $\frac{49}{4}$.

题型二: 隐圆的第二定义: 到两定点距离的平方和为定值

例 6. (2023·普陀区二模) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, 点 P 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 且 $|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2 = a$ (a 为常数). 下列结论中, 正确的是()



- A. 当 $0 < a < 1$ 时, 满足条件的点 P 有且只有一个
- B. 当 $a = 1$ 时, 满足条件的点 P 有三个
- C. 当 $a > 1$ 时, 满足条件的点 P 有无数个
- D. 当 a 为任意正实数时, 满足条件的点 P 是有限个

【解析】解: 以 BC 所在直线为 x 轴, BC 中点为原点, 建立直角坐标系, 如图所示

则 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(-\frac{1}{2}, 0)$, $C(\frac{1}{2}, 0)$, 设 $P(x, y)$, 可得

$$|PA|^2 = x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2, |PB|^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + y^2, |PC|^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2$$

$$Q |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = a$$

$$\therefore x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = a$$

$$\text{化简得: } 3x^2 + 3y^2 - \sqrt{3}y + \frac{5}{4} - a = 0, \text{ 即 } x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{5}{12} - \frac{a}{3} = 0$$

$$\text{配方, 得 } x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{1}{3}(a - 1) \dots (1)$$

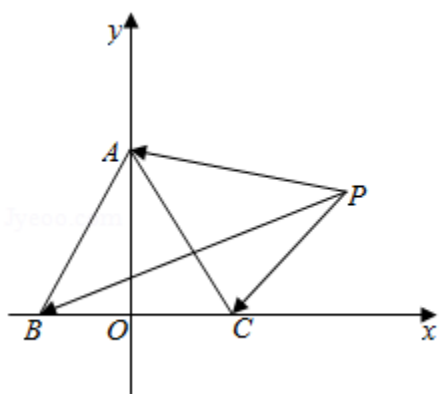
当 $a < 1$ 时, 方程 (1) 的右边小于 0, 故不能表示任何图形;

当 $a = 1$ 时, 方程 (1) 的右边为 0, 表示点 $(0, \frac{\sqrt{3}}{6})$, 恰好是正三角形的重心;

当 $a > 1$ 时, 方程 (1) 的右边大于 0, 表示以 $(0, \frac{\sqrt{3}}{6})$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{\frac{1}{3}(a - 1)}$ 的圆

由此对照各个选项, 可得只有 C 项符合题意

故选: C.



例 7. (2023 · 江苏模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x + a + 3)^2 + (y - 2a)^2 = 1$ (a 为实数). 若圆 O 和圆 M 上分别存在点 P, Q , 使得 $\angle OQP = 30^\circ$, 则 a 的取值范围为_____.

【解析】解: 由题意, 圆 $M: (x + a + 3)^2 + (y - 2a)^2 = 1$ (a 为实数), 圆心为 $M(-a - 3, 2a)$

圆 M 上任意一点 Q 向圆 O 作切线，切点为 P ， $\angle PQO = 30^\circ$ ，

所以 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 M 有交点 $1, \sqrt{(a+3)^2 + 4a^2}, 3$ ，

解得

$$\therefore -\frac{6}{5}, a, 0,$$

故答案为： $-\frac{6}{5}, a, 0$ ，

例 8. (2023·通州区月考) 在平面直角坐标系 xOy 中， $P(2,2)$ ， $Q(0,-4)$ 为两个定点，动点 M 在直线 $x=-1$ 上，动点 N 满足 $NO^2 + NQ^2 = 16$ ，则 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}|$ 的最小值为_____.

【解析】解：由 $NO^2 + NQ^2 = 16$ ， $\therefore N$ 在以 OQ 为直径的圆上，

不妨设 $N(2\cos\theta - 2, 2\sin\theta)$ ， $M(-1, m)$ ，

则 $\overrightarrow{PM} = (-3, m-2)$ ， $\overrightarrow{PN} = (2\cos\theta - 4, 2\sin\theta - 2)$ ，

$\therefore \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = (2\cos\theta - 7, 2\sin\theta + m - 4)$ ，

$\therefore |\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}|^2 = (2\cos\theta - 7)^2 + (2\sin\theta + m - 4)^2 = m^2 - 8m + 69 + 4[(m-4)\sin\theta - 7\cos\theta]$

$= (m-4)^2 + 53 + 4\sqrt{(m-4)^2 + 49}\sin(\theta - \varphi)$ ，

令 $\sqrt{(m-4)^2 + 49} = t$ ， $\sin(\theta - \varphi) = a$ ，则 $t \in [7, +\infty)$ ， $a \in [-1, 1]$ 。

$\therefore |\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}|^2 = t^2 + 4 + 4at$ ，

令 $f(t) = t^2 + 4 + 4at = (t + 2a)^2 + 4 - 4a^2$ ， $t \in [7, +\infty)$ ， $a \in [-1, 1]$ ，

$\therefore f(t)$ 在 $[7, +\infty)$ 上单调递增，

故当 $t = 7$ 时， $f(t)$ 取得最小值 $53 + 28a$ ，

再令 $g(a) = 53 + 28a$ ， $a \in [-1, 1]$ ，

显然 $g(a)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增，

故 $a = -1$ 时， $g(a)$ 取得最小值 $53 - 28 = 25$ ，

综上，当 $t = 7$ ， $a = -1$ 时， $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}|^2$ 取得最小值 25。

故 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}|$ 的最小值为 5。

故答案为：5。

例 9. (2023·盐城三模) 已知 A, B, C, D 四点共面， $BC = 2$ ， $AB^2 + AC^2 = 20$ ， $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CA}$ ，则 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值为_____。

【解析】解：以 C 为原点，以直线 CB 为 x 轴建立平面坐标系，

设 $B(2,0)$ ， $D(x,y)$ ，由 $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CA}$ ， $\therefore A(\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$ 。

$$Q AB^2 + AC^2 = 20,$$

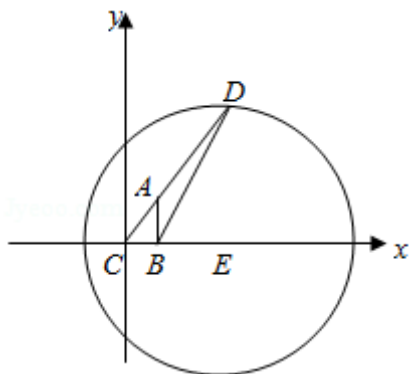
$$\therefore \left(\frac{x}{3} - 2\right)^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 20,$$

$$\therefore (x-3)^2 + y^2 = 81,$$

\therefore 点 D 在以 $E(3,0)$ ，以 $r=9$ 为半径的圆 E 上，

$\therefore BD$ 的最大距离为 $BE+r=10$ 。

故答案为：10。



例 10. (2023·大武口区校级期末) 已知圆 $C:(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ ，点 $A(-1,0)$ ， $B(1,0)$ ，点 P 是圆上的动点，则 $d = |PA|^2 + |PB|^2$ 的最大值为____，最小值为____。

【解析】解：设 P 点的坐标为 $(3 + \sin \alpha, 4 + \cos \alpha)$ ，

则

$$d = |PA|^2 + |PB|^2 = (4 + \sin \alpha)^2 + (4 + \cos \alpha)^2 + (2 + \sin \alpha)^2 + (4 + \cos \alpha)^2 = 54 + 12 \sin \alpha + 16 \cos \alpha = 54 + 20 \sin(\theta + \alpha)$$

\therefore 当 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 时，即 $12 \sin \alpha + 16 \cos \alpha = 20$ 时， d 取最大值 74，

当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时，即 $12 \sin \alpha + 16 \cos \alpha = -20$ ， d 取最小值 34，

故答案为：74，34。

例 11. (2023·大观区校级期中) 正方形 $ABCD$ 与点 P 在同一平面内，已知该正方形的边长为 1，且 $|PA|^2 + |PB|^2 = |PC|^2$ ，求 $|PD|$ 的取值范围。

【解析】解：以点 A 为坐标原点， AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图所示，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/945102133121011214>