

江西省宜春市上高县第二中学 2024 届高三仿真模拟数学试卷

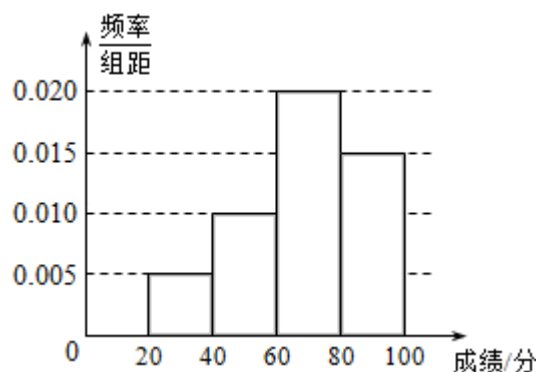
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据的分组依次为

$[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$ ，若低于 60 分的人数是 18 人，则该班的学生人数是 ()



- A. 45 B. 50 C. 55 D. 60

2. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 作双曲线 C 的一条弦 AB ，且 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$ ，若以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

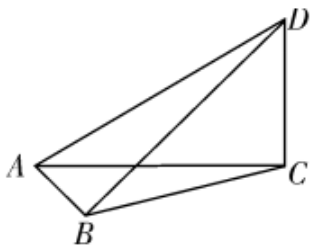
3. 若复数 z 满足 $(1-i)z = -1+2i$ ，则 $|\bar{z}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 设命题 $p: \exists n > 1, n^2 > 2^n$ ，则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall n > 1, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \leq 1, n^2 \leq 2^n$
 C. $\forall n > 1, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n > 1, n^2 \leq 2^n$

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $BC = 3$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle CDA = 60^\circ$ ，则 BD 的长度为 ()



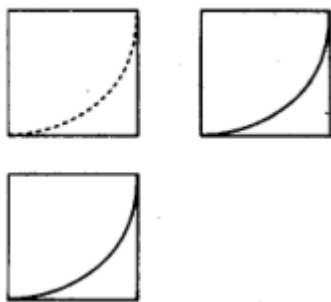
A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

6. 一个几何体的三视图如图所示，正视图、侧视图和俯视图都是由一个边长为 a 的正方形及正方形内一段圆弧组成，则这个几何体的表面积是 ()



A. $\left(3 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

B. $\left(6 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$

C. $\left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$

D. $\left(6 - \frac{3\pi}{4}\right)a^2$

7. 已知 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + a}$ 是定义在 R 上的奇函数，则不等式 $f(x-3) < f(9-x^2)$ 的解集为 ()

A. $(-2, 6)$

B. $(-6, 2)$

C. $(-4, 3)$

D. $(-3, 4)$

8. M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点， N 是圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆上的一点，则 $|MN|$ 最小值是 ()

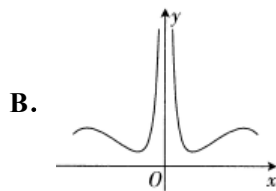
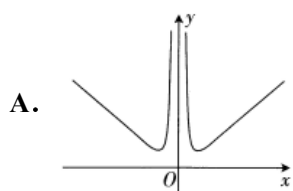
A. $\frac{\sqrt{11}}{2} - 1$

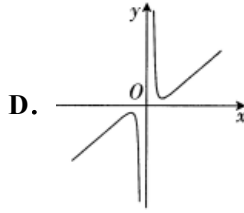
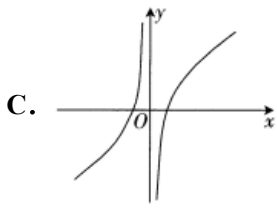
B. $\sqrt{3} - 1$

C. $2\sqrt{2} - 1$

D. $\frac{3}{2}$

9. 函数 $f(x) = |x| - \frac{\ln|x|}{x^2}$ 的图象大致为 ()





10. 复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数, 则 $z =$ ()

- A. i B. $-2i$ C. $2i$ D. $-i$

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆与双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $|PF_2| > |PF_1|$, 椭圆的离心率为 e_1 , 双曲线的离心率为 e_2 , 若 $|PF_1| = |F_1F_2|$, 则 $\frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3}$ 的最小值为 ()

- A. $6 + 2\sqrt{3}$ B. $6 + 2\sqrt{2}$ C. 8 D. 6

12. 已知椭圆 C 的中心为原点 O , $F(-2\sqrt{5}, 0)$ 为 C 的左焦点, P 为 C 上一点, 满足 $|OP| = |OF|$ 且 $|PF| = 4$, 则椭圆 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{10} = 1$ D. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{25} = 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{m} = (1, 1)$, $\vec{n} = (2, -1)$, $\vec{g} = (1, \lambda)$, 若 $\vec{g} \perp (2\vec{m} + \vec{n})$, 则 $\lambda =$ _____.

14. 已知复数 $z = (m^2 - 2) + (m - 1)i$ 对应的点位于第二象限, 则实数 m 的范围为 _____.

15. 已知实数 x, y 满约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \leq 0, \\ 2x + y - 5 \leq 0, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = -x + 3y$ 的最大值为 _____.

16. 对于任意的正数 a, b , 不等式 $(2ab + a^2)k \leq 4b^2 + 4ab + 3a^2$ 恒成立, 则 k 的最大值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知中心在原点 O 的椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, C 与 y 轴正半轴交点为 A , 且 $\angle AF_1O = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 A 作斜率为 k_1, k_2 ($k_1 k_2 \neq 0$) 的两条直线分别交 C 于异于点 A 的两点 M, N . 证明: 当 $k_2 = \frac{k_1}{k_1 - 1}$ 时, 直线 MN 过定点.

18. (12 分) 设函数 $f(x) = |x + 3|$, $g(x) = |2x - 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) < g(x)$;

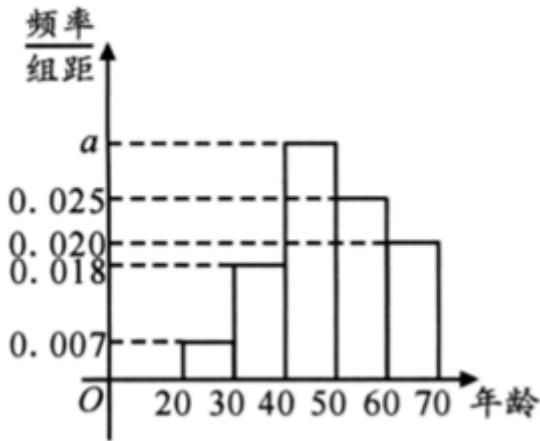
(2) 若 $2f(x) + g(x) > ax + 4$ 对任意的实数 x 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. (12分) 运输一批海鲜, 可在汽车、火车、飞机三种运输工具中选择, 它们的速度分别为 60 千米/小时、120 千米/小时、600 千米/小时, 每千米的运费分别为 20 元、10 元、50 元. 这批海鲜在运输过程中每小时的损耗为 m 元 ($m > 0$), 运输的路程为 S (千米). 设用汽车、火车、飞机三种运输工具运输时各自的总费用 (包括运费和损耗费) 分别为 y_1 (元)、 y_2 (元)、 y_3 (元).

(1) 请分别写出 y_1 、 y_2 、 y_3 的表达式;

(2) 试确定使用哪种运输工具总费用最省.

20. (12分) 某保险公司给年龄在 20-70 岁的民众提供某种疾病的一年期医疗保险, 现从 10000 名参保人员中随机抽取 100 名作为样本进行分析, 按年龄段 $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70]$ 分成了五组, 其频率分布直方图如下图所示; 参保年龄与每人每年应缴纳的保费如下表所示. 据统计, 该公司每年为这一万名参保人员支出的各种费用为一百万元.



年龄 (单位: 岁)	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70]$
保费 (单位: 元)	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$

(1) 用样本的频率分布估计总体分布, 为使公司不亏本, 求 x 精确到整数时的最小值 x_0 ;

(2) 经调查, 年龄在 $[60, 70]$ 之间的老人每 50 人中有 1 人患该项疾病 (以此频率作为概率). 该病的治疗费为 12000 元, 如果参保, 保险公司补贴治疗费 10000 元. 某老人年龄 66 岁, 若购买该项保险 (x 取 (1) 中的 x_0), 针对此疾病所支付的费用为 X 元; 若没有购买该项保险, 针对此疾病所支付的费用为 Y 元. 试比较 X 和 Y 的期望值大小, 并判断该老人购买此项保险是否划算?

21. (12分) 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 - x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记函数 $g(x) = f(x) - mx + 1$, 若函数 $g(x)$ 有 3 个零点, 求实数 m 的取值范围.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 1| (a \in R)$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(II) 若存在 $x \in R$ 满足不等式 $f(x) < 4$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据频率分布直方图中频率 = 小矩形的高 \times 组距 计算成绩低于 60 分的频率, 再根据样本容量 = $\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$ 求出班级人数.

【详解】

根据频率分布直方图, 得: 低于 60 分的频率是 $(0.005 + 0.010) \times 20 = 0.30$,

\therefore 样本容量 (即该班的学生人数) 是 $\frac{18}{0.30} = 60$ (人).

故选: D.

【点睛】

本题考查了频率分布直方图的应用问题, 也考查了频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{样本容量}}$ 的应用问题, 属于基础题

2、C

【解析】

由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$ 得 F 是弦 AB 的中点. 进而得 AB 垂直于 x 轴, 得 $\frac{b^2}{a} = a + c$, 再结合 a, b, c 关系求解即可

【详解】

因为 $\vec{FA} + \vec{FB} = 0$ ，所以 F 是弦 AB 的中点.且 AB 垂直于 x 轴.因为以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点，所以

$$\frac{b^2}{a} = a + c, \text{ 即 } \frac{c^2 - a^2}{a} = a + c, \text{ 则 } c - a = a, \text{ 故 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

故选: C

【点睛】

本题是对双曲线的渐近线以及离心率的综合考查，是考查基本知识，属于基础题.

3、C

【解析】

把已知等式变形，利用复数代数形式的除法运算化简，再由复数模的计算公式求解.

【详解】

$$\text{解: 由 } (1-i)z = -1+2i, \text{ 得 } z = \frac{-1+2i}{1-i} = \frac{(-1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\therefore |\bar{z}| = |z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数模的求法，是基础题.

4、C

【解析】

根据命题的否定，可以写出 $\neg p$ ： $\forall n > 1, n^2 \leq 2^n$ ，所以选 C.

5、D

【解析】

设 $\angle ACB = \alpha$ ，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2 = 10 - 6\cos 120^\circ = 13$ ，从而求得 CD ，再由由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}, \text{ 求得 } \sin \alpha, \text{ 然后在 } \triangle BCD \text{ 中, 用余弦定理求解.}$$

【详解】

设 $\angle ACB = \alpha$ ，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2 = 10 - 6\cos 120^\circ = 13$ ，

$$\text{则 } AC = \sqrt{13}, \text{ 从而 } CD = \sqrt{\frac{13}{3}},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}, \text{ 即 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}},$$

从而 $\cos \angle BCD = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$,

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得: $BD^2 = 9 + \frac{13}{3} + 2 \times 3 \times \sqrt{\frac{13}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{49}{3}$,

则 $BD = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用, 还考查了数形结合思想和运算求解的能力, 属于中档题.

6、C

【解析】

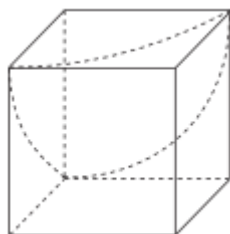
画出直观图, 由球的表面积公式求解即可

【详解】

这个几何体的直观图如图所示, 它是由一个正方体中挖掉 $\frac{1}{8}$ 个球而形成的, 所以它的表面积为

$$S = 3a^2 + 3\left(a^2 - \frac{\pi a^2}{4}\right) + \frac{1}{8} \times 4\pi a^2 = \left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2.$$

故选: C



【点睛】

本题考查三视图以及几何体的表面积的计算, 考查空间想象能力和运算求解能力.

7、C

【解析】

由奇函数的性质可得 $a = 1$, 进而可知 $f(x)$ 在 R 上为增函数, 转化条件得 $x - 3 < 9 - x^2$, 解一元二次不等式即可得解.

【详解】

因为 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + a}$ 是定义在 R 上的奇函数, 所以 $f(1) + f(-1) = 0$,

即 $\frac{e-1}{e+a} + \frac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+a} = 0$, 解得 $a=1$, 即 $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1 - \frac{2}{e^x+1}$,

易知 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

又 $f(x-3) < f(9-x^2)$, 所以 $x-3 < 9-x^2$, 解得 $-4 < x < 3$.

故选: C.

【点睛】

本题考查了函数单调性和奇偶性的应用, 考查了一元二次不等式的解法, 属于中档题.

8、C

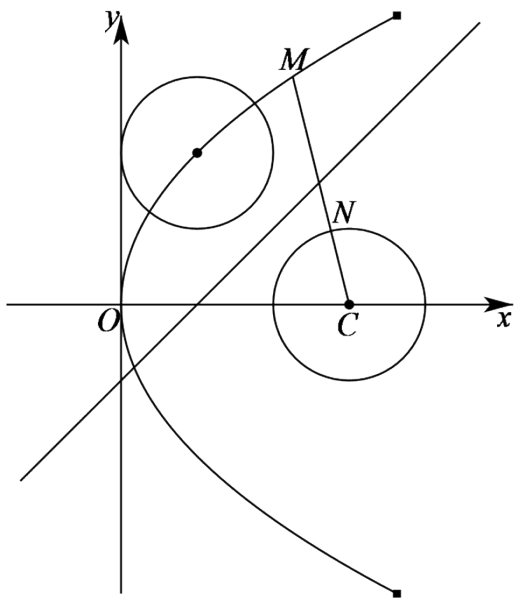
【解析】

求出点 $(1,2)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称点 C 的坐标, 进而可得出圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的

对称圆 C 的方程, 利用二次函数的基本性质求出 $|MC|$ 的最小值, 由此可得出 $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1$, 即可得解.

【详解】

如下图所示:



设点 $(1,2)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称点为点 $C(a,b)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b+2}{2} - 1 = 0 \\ \frac{b-2}{a-1} = -1 \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} a-b-3=0 \\ a+b-3=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}, \text{即点 } C(3,0),$$

所以，圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ ，

设点 $M\left(\frac{y^2}{4}, y\right)$ ，则 $|MC| = \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} - 3\right)^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{2} + 9} = \sqrt{\frac{1}{16}(y^2 - 4)^2 + 8}$ ，

当 $y = \pm 2$ 时， $|MC|$ 取最小值 $2\sqrt{2}$ ，因此， $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查抛物线上一点到圆上一点最值的计算，同时也考查了两圆关于直线对称性的应用，考查计算能力，属于中等题。

9、A

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性和单调性，排除错误选项，从而得出正确选项。

【详解】

因为 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C 和 D。

当 $x > 0$ 时， $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ ， $f'(x) = \frac{x^3 + 2\ln x - 1}{x^3}$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < 1$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减；令 $f'(x) > 0$ ，得 $x > 1$ ，即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增。所以 $f(x)$

在 $x = 1$ 处取得极小值，排除 B。

故选：A

【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别，考查利用导数研究函数的单调区间和极值，属于中档题。

10、B

【解析】

复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，则实部为 0，虚部不为 0，求出 a ，即得 z 。

【详解】

$\because z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数，

$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $a = -1$ 。

$\therefore z = -2i$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查复数的分类，属于基础题.

11、C

【解析】

由椭圆的定义以及双曲线的定义、离心率公式化简 $\frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3}$ ，结合基本不等式即可求解.

【详解】

设椭圆的长半轴长为 a ，双曲线的半实轴长为 a' ，半焦距为 c ，

则 $e_1 = \frac{c}{a}$ ， $e_2 = \frac{c}{a'}$ ，设 $|PF_2| = m$

由椭圆的定义以及双曲线的定义可得：

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \Rightarrow a = \frac{m}{2} + c, \quad |PF_2| - |PF_1| = 2a' \Rightarrow a' = \frac{m}{2} - c$$

$$\text{则 } \frac{3}{e_1} + \frac{e_2}{3} = \frac{3a}{c} + \frac{c}{3a'} = \frac{3\left(c + \frac{m}{2}\right)}{c} + \frac{c}{3\left(\frac{m}{2} - c\right)} = 6 + \frac{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}{c} + \frac{c}{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}$$

$$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}{c} \cdot \frac{c}{3\left(\frac{m}{2} - c\right)}} = 8$$

当且仅当 $a = \frac{7}{3}c$ 时，取等号.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了椭圆的定义以及双曲线的定义、离心率公式，属于中等题.

12、B

【解析】

由题意可得 $c = 2\sqrt{5}$ ，设右焦点为 F' ，由 $|OP| = |OF| = |OF'|$ 知，

$$\angle PFF' = \angle FPO, \quad \angle OF'P = \angle OPF',$$

所以 $\angle PFF' + \angle OF'P = \angle FPO + \angle OPF'$ ，

由 $\angle PFF' + \angle OF'P + \angle FPO + \angle OPF' = 180^\circ$ 知，

$\angle FPO + \angle OPF' = 90^\circ$ ，即 $PF \perp PF'$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945112303232011201>