

陕西省延安市新区培文学校 2024-2025 学年高三上学期开学

摸底考试数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x^2 - 6x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1, 4\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{0, 3, 6\}$

2. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (t, 1)$, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|$, 则 $t =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

3. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan \alpha = \frac{\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}}$, 则 $2\alpha - \beta =$ ()

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

4. 图中的花盆可视为两个圆台的组合体, 其上半部分的圆台上、下底面直径分别为 30cm 和 26cm, 下半部分的圆台上、下底面直径分别为 24cm 和 18cm, 且两个圆台侧面展开图的圆弧所对的圆心角均相等, 若上半部分的圆台的高为 8cm, 则该花盆的总高度为 ()



- A. 16cm B. 18cm C. 20cm D. 24cm

5. “ $0 < a < 1$ ”是“函数 $f(x) = \log_a(2a - x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知过点 $C(2,0)$ 的直线交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, O 为坐标原点, 则

$\triangle AOB$ 的面积为 ()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 3, a_1 + a_4 = 5$. 记 $b_n = [\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整

数, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 2024 项和为 ()

A. 4965

B. 4964

C. 1893

D. 1892

8. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AC = \sqrt{3}$, 其余各棱长均为 2, P 是三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球

面上的动点, 则点 P 到平面 BCD 的距离的最大值为 ()

A. $\frac{\sqrt{26}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{26}}{3}$

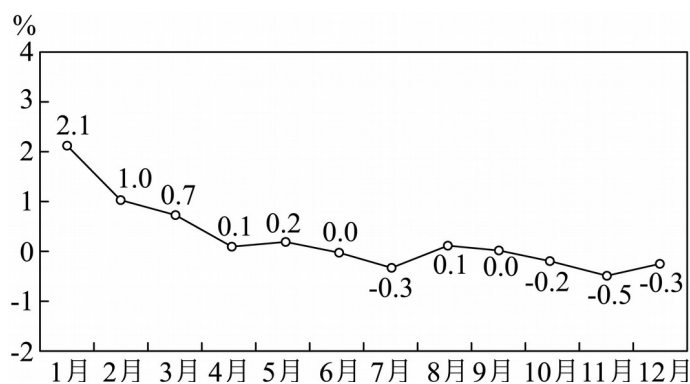
C. $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

D. $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$

二、多选题

9. 2023 年我国居民消费价格月度涨跌幅度的数据如图所示, 对于这组数据, 下列说法正

确的是 ()



A. 极差为 2.6

B. 平均数约为 0.24

C. 中位数为 0

D. 众数只有 -0.3 和 0

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega \in \mathbf{N}^*, 0 \leq \varphi < \pi$) 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, 最小正周

期 $T \in \left(\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right)$, 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则

()

A. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

B. $g(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

C. $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 若 $f(x) + f(y) - f(x)f(y) = f(xy)$, 且

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(-1) < 1$, 则 ()

A. $f(1) = 0$

B. $f(-1) = 0$

C. $f(x)$ 是奇函数

D. $\forall x \neq 0, f(x) < 1$

三、填空题

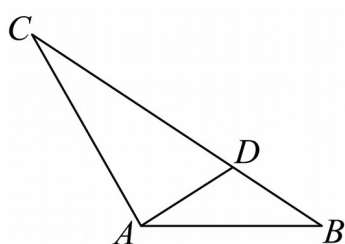
12. 若复数 z 满足 $(z+2)^2 = -4$, 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 $m = 100 \times 2^{99}$, 则 m 被 7 除的余数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上任意一点, $A(0, 2\sqrt{2}b)$, 若 $|PA| \geq 3b$ 恒成立, 则 C 的离心率的最大值为_____.

四、解答题

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, 且 $CD = 2AD$, $AC = \sqrt{33}$, $\cos \angle ADC = \frac{1}{3}$.



(1)求 CD ;

(2)若 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 BD .

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 过点 F 且不与 x 轴重合的动直线

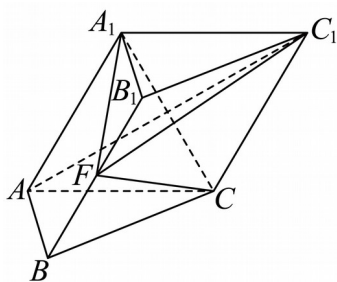
线与 C 交于 P, Q 两点, 且当 $PQ \perp x$ 轴时, $|PQ| = 3$.

(1)求 C 的方程;

(2)若 $D(-2, 0), R(-3, 0)$, 直线 DP, DQ 分别与直线 $x = -3$ 交于点 M, N , 证明: $|MR| \cdot |NR|$ 为定值.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , 四

边形 A_1ACC_1 为菱形, $\angle A_1AC = 60^\circ$, $AB = 2$, F 为 BB_1 的中点.



(1)证明: $AC_1 \perp$ 平面 A_1CF ;

(2)求直线 FC 与平面 A_1FC_1 所成角的正弦值.

18. 已知函数 $f(x) = axe^x + b$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2ex - e$.

(1)求 a, b 的值;

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3)若关于 x 的方程 $f(x) - (x + \ln x) = m$ 有两个正根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明: $f(x_1) + 2f(x_2) > 3$.

19. 在一个不透明的口袋中装有 2 个黑球和 2 个白球, 每次从口袋中随机取出 1 个球, 再往口袋中放入 1 个白球, 取出的球不放回, 像这样取出 1 个球再放入 1 个白球称为 1 次操作,

重复操作至口袋中 4 个球均为白球后结束. 假设所有球的大小、材质均相同, 记事件 “ n

次操作后结束” 为 A_n , 事件 A_n 发生的概率为 p_n .

(1)求第 1 次操作取出黑球且 3 次操作后结束的概率;

(2)求数列 $\{p_n\}$ 的通项公式;

(3)设 $E_n = \sum_{k=1}^n kp_k$, 证明: $E_n < 6$.

参考答案:

1. A

【分析】根据一元二次不等式解法求得集合 B ，再根据集合的描述法表示即可求得 $A \cap B$ 。

【详解】解不等式 $x^2 - 6x \leq 0$ 可得 $B = \{x | 0 \leq x \leq 6\}$ ；

又 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{Z}\}$ 可知集合 A 是所有整数的平方构成的集合，

在区间 $[0, 6]$ 范围内只有 $0, 1, 4$ 是整数的平方，因此可得 $A \cap B = \{0, 1, 4\}$ 。

故选：A

2. B

【分析】根据向量数量积的坐标表示以及模长公式解方程即可求得结果。

【详解】由 $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (t, 1)$ 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2t + 1$ ，且 $|\vec{b}| = \sqrt{t^2 + 1}$ ，

所以 $2t + 1 = \sqrt{t^2 + 1} > 0$ ，解得 $t = 0$ 。

故选：B

3. C

【分析】根据给定条件，利用和角的正切公式，结合正切函数的单调性求解即得。

【详解】由 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\cos \frac{\beta}{2} > 0$ ，由 $\tan \alpha = \frac{\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}}$ ，得

$$\tan \alpha = \frac{1 + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\beta}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right),$$

而 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\frac{\beta}{2} \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，则 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ，因此 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ ，

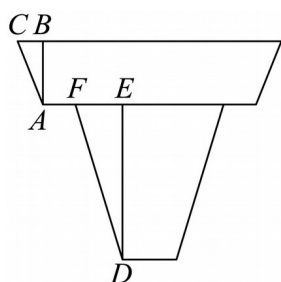
所以 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

故选：C

4. C

【分析】利用组合体的轴截面以及三角形相似即可得出该花盆的总高度.

【详解】截取组合体的轴截面，作 $AB \perp BC, ED \perp EF$ ，如下图所示：



易知 $BC = \frac{30-26}{2} = 2$ ， AB 即为上半部分的圆台的高，所以 $AB = 8$ ，

又因为两个圆台侧面展开图的圆弧所对的圆心角均相等，所以 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ；

可得 $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$ ，

易知 $EF = \frac{24-18}{2} = 3$ ，所以 $DE = \frac{AB \cdot EF}{BC} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$ 。

因此该花盆的总高度为 $(12+8)\text{cm} = 20\text{cm}$ 。

故选：C

5. B

【分析】根据对数函数和一次函数的单调性，再结合复合函数“同增异减”的判断法则求

得对应的 a 的取值范围即可得出结论.

【详解】易知 $f(x) = \log_a(2a-x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2a)$ ，且函数 $y = 2a-x$ 为单调递减函数；

根据复合函数单调性可知若函数 $f(x) = \log_a(2a-x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,

可得 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 2a \geq 1 \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a < 1$;

显然 $\left\{a \mid \frac{1}{2} \leq a < 1\right\}$ 是 $\{a \mid 0 < a < 1\}$ 的真子集,

所以 “ $0 < a < 1$ ” 是 “函数 $f(x) = \log_a(2a-x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增” 的必要不充分条件.

故选: B

6. C

【分析】根据给定条件, 设出直线 AB 方程, 与抛物线方程联立求出点 A, B 的纵坐标差即可得解.

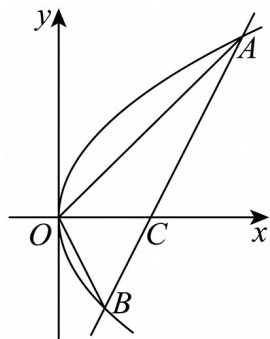
【详解】显然直线 AB 不垂直于 y 轴, 设直线 AB 方程为 $x = ty + 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 4ty - 8 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -8$,

由 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 得 $y_1 = -2y_2$, 解得 $y_1 = -2y_2 = 4$ 或 $y_1 = -2y_2 = -4$, 则 $|y_1 - y_2| = 6$,

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} |OC| \cdot |y_1 - y_2| = 6$.

故选: C



7. A

【分析】求出等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再分析数列 $\{b_n\}$ 的各项取值，求其前2024项和.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $a_1+2d=3$ ， $2a_1+3d=5$ ，解得 $a_1=d=1$ ，则 $a_n=n$ ，

于是 $b_n=[\lg a_n]=[\lg n]$ ，当 $1 \leq n \leq 9$ 时， $b_n=0$ ；当 $10 \leq n \leq 99$ 时， $b_n=1$ ；

当 $100 \leq n \leq 999$ 时， $b_n=2$ ；当 $1000 \leq n \leq 2024$ 时， $b_n=3$ ，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前2024项和为 $0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 900 + 3 \times 1025 = 4965$.

故选：A

8. D

【分析】先给出鳄鱼模型公式的证明，然后利用其求出外接球半径，再结合球的截面性质求解即可.

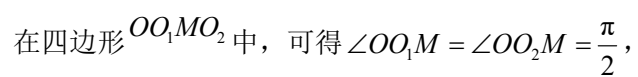
【详解】首先，我们来证明求解外接球半径的鳄鱼模型，

我们给定三棱锥 $P-ABC$ ，设 O_1, O_2 分别是 $\triangle ABP, \triangle ABC$ 的外心，

设外接球球心为 O ， M 是 AB 的中点，作 $O_1M \perp AB$ ， $O_2M \perp AB$ ，

所以 $\angle O_1MO_2$ 是二面角 $P-AB-C$ 的平面角，设 $\angle O_1MO_2 = \alpha$ ，

设 $O_1M = m, O_2M = n$ ， $AB = l$ ，作 $OO_1 \perp$ 面 PAB ， $OO_2 \perp$ 面 ABC ，



所以 $OM = 2r$, 连接 O_1O_2, OM , 由正弦定理得 $\frac{O_1O_2}{\sin \alpha} = 2r$, 设 $O_1O_2 = c$,

故 $OM = \frac{c}{\sin \alpha}$, 而在 $\triangle MO_1O_2$ 中, 由余弦定理得 $c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha$,

连接 OA ，所以 $OA=OB$ ，由三线合一性质得 $OM \perp AB$ ，

因为 M 是 AB 的中点, 所以 $BM = \frac{l}{2}$,

设 $OA = OB = R$, 由勾股定理得 $R^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{l^2}{4}$,

所以 $R^2 = \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{l^2}{4}$, 即鳄鱼模型得证,

而在本题中, 对于三棱锥 $A-BCD$, $AB = l$, 找 $\triangle ABD$ 中心为 O_1 ,

$\triangle BCD$ 中心为 O_2 , 找 BD 中点为 M , 作 $AM \perp BD$, $CM \perp BD$,

所以 $\angle O_1MO_2$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角, 设 $\angle O_1MO_2 = \alpha$,

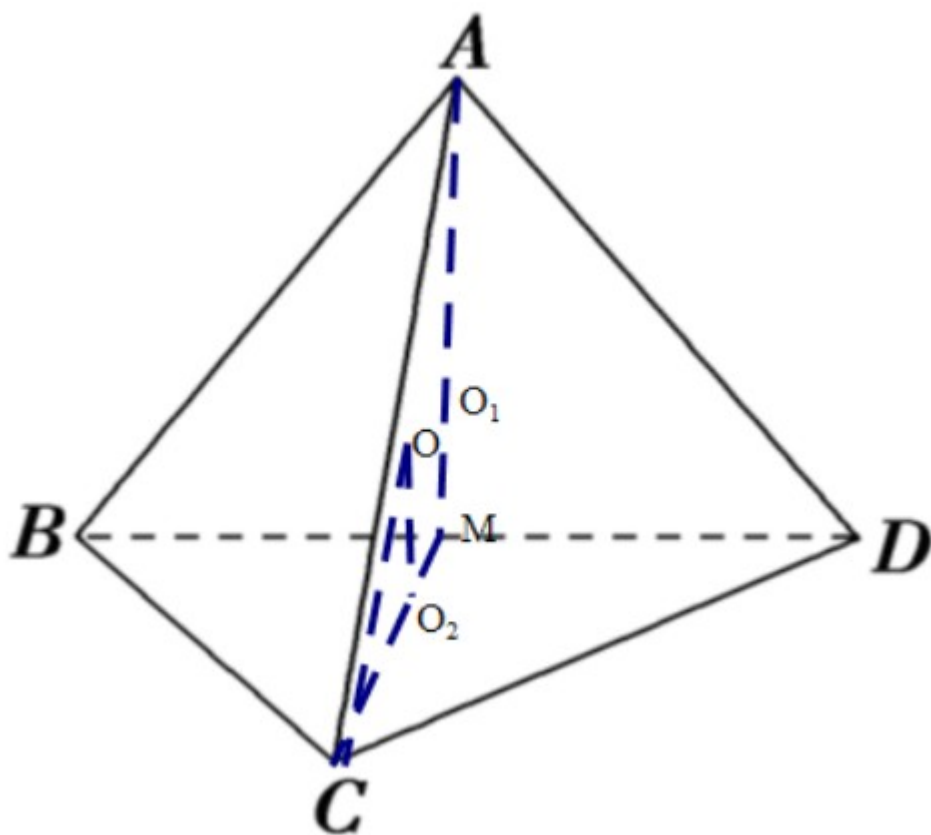
因为 $AC = \sqrt{3}$, 三棱锥其余各棱长均为 2, 所以 $AB = 2$,

由勾股定理得 $AM = CM = AC = \sqrt{3}$, 所以 $\triangle ACM$ 是等边三角形,

所以 $\angle O_1MO_2 = \frac{\pi}{3}$, 设 $O_1M = m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $O_2M = n = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

代入公式中得 $R^2 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} + \frac{4}{4} = \frac{13}{9}$, 所以 $R = \frac{\sqrt{13}}{3}$,

设外接球的球心为 O , 而三棱锥其余各棱长均为 2, 故 $\triangle BCD$ 是等边三角形,



由正弦定理得 $\triangle BCD$ 的外接圆半径为 $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

设球心到面 BCD 的距离为 d , 所以 $(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + d^2 = (\frac{\sqrt{13}}{3})^2$, 解得 $d = \frac{1}{3}$,

所以点 P 到平面 BCD 的距离的最大值为 $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$, 故 D 正确.

故选: D

【点睛】关键点点睛: 本题考查立体几何, 解题关键是证明鳄鱼模型的正确性, 然后利用其求解外接球半径, 再利用球的截面性质得到所要求的最值即可.

9. AB

【分析】利用平均数, 中位数, 众数, 极差的定义逐个选项分析即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945200134324011311>