

新疆维吾尔自治区克拉玛依市第十三中学 2024 年高三数学第一学期期末统考模拟试题

考生须知：

- 1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
- 2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
- 3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ，若 $z = -3x + 2y$ 的最大值为 n ，则 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中 x^2 项的系数为()

- A. 60 B. 80 C. 90 D. 120

2. 设 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\cos(\pi + \beta) = -\frac{4}{5} (\beta \in (0, \pi))$ ，则 $\tan(2\alpha - \beta)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{7}{24}$ B. $-\frac{5}{24}$
C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{7}{24}$

3. 已知命题 p ：若 $a > 1$ ， $b > c > 1$ ，则 $\log_b a < \log_c a$ ；命题 q ： $\exists x_0 (0, +\infty)$ ，使得 $2^{x_0} < \log_3 x_0$ ”，则以下命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

4. $(x - \frac{1}{x} + 1)^5$ 展开项中的常数项为

- A. 1 B. 11 C. -19 D. 51

5. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成不含重复数字的五位数，要求数字 4 不出现在首位和末位，数字 1, 3, 5 中有且仅有两个数字相邻，则满足条件的不同五位数的个数是 ()

- A. 48 B. 60 C. 72 D. 120

6. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，满足 $|\vec{a}| = \frac{1}{3}, |\vec{b}| = 1$ ，且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 设 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根，记 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) .下列两个命题 ()

①数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数；

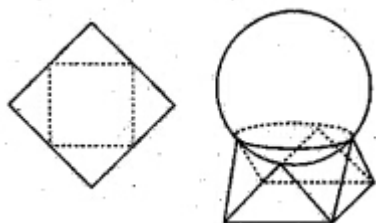
②数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数.

- A. ①正确，②错误 B. ①错误，②正确

C. ①②都正确

D. ①②都错误

8. 如图所示, 用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 按各边中点垂直折起四个小三角形, 做成一个蛋巢, 将体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的鸡蛋 (视为球体) 放入其中, 蛋巢形状保持不变, 则鸡蛋 (球体) 离蛋巢底面的最短距离为 ()



A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

9. 已知集合 $M = \{y \mid y = 2^x, x > 0\}$, $N = \{x \mid y = \lg(2x - 1)\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(1, 2)$

C. $[2, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

10. 设 $(1+i) \cdot z = 1-i$, 则复数 z 的模等于 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. $\sqrt{3}$

11. 某校为提高新入职教师的教学水平, 实行“老带新”的师徒结对指导形式, 要求每位老教师都有徒弟, 每位新教师都有一位老教师指导, 现选出 3 位老教师负责指导 5 位新入职教师, 则不同的师徒结对方式共有 () 种.

A. 360

B. 240

C. 150

D. 120

12. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y = \sqrt{1-x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = 2x\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. “学习强国”学习平台是由中宣部主管, 以深入学习宣传新时代中国特色社会主义思想为主要内容, 立足全体党员、面向全社会的优质平台, 现已日益成为老百姓了解国家动态, 紧跟时代脉搏的热门 app. 该款软件主要设有“阅读文章”和“视听学习”两个学习板块和“每日答题”、“每周答题”、“专项答题”、“挑战答题”四个答题板块. 某人在学习过程中, 将六大板块依次各完成一次, 则“阅读文章”与“视听学习”两大学习板块之间最多间隔一个答题板块的学习方法有 _____ 种.

14. 若 $f(x) = \frac{1}{3}kx^3 + (k-2)x^2 - 5k + 7$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 则 k 的取值范围是 _____

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + y = 0$, 则 $a =$ _____.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点, F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点, 且 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE , 记 B_1 与 F 的轨迹构成的平面为 α .

① $\exists F$, 使得 $B_1F \perp CD_1$;

② 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$;

③ α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$;

④ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中, 与 α 所成的锐二面角相等的侧面共四个.

其中正确命题的序号是_____. (写出所有正确命题的序号)

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + m > 0$; 命题 q : 函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{2}x$ 无零点.

(1) 若 $\neg q$ 为假, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{3} \sin C}$.

(1) 求 b 的值;

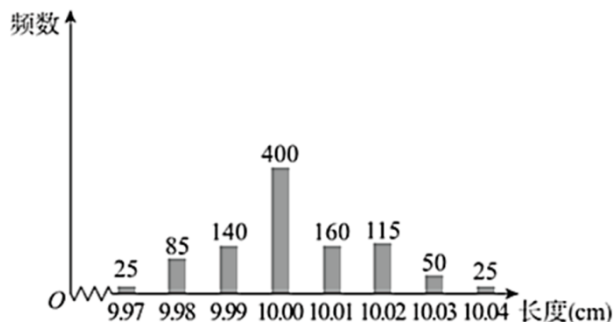
(2) 若 $\cos B + \sqrt{3} \sin B = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. (12 分) 已知函数 $f_0(x) = e^{ax} \sin(bx)$, 设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $f_1(x), f_2(x)$;

(2) 猜想 $f_n(x)$ 的表达式, 并证明你的结论.

20. (12 分) 某工厂生产一种产品的标准长度为 10.00cm, 只要误差的绝对值不超过 0.03cm 就认为合格, 工厂质检部抽检了某批次产品 1000 件, 检测其长度, 绘制条形统计图如图:



(1) 估计该批次产品长度误差绝对值的数学期望;

(2) 如果视该批次产品样本的频率为总体的概率, 要求从工厂生产的产品中随机抽取 2 件, 假设其中至少有 1 件是标准长度产品的概率不小于 0.8 时, 该设备符合生产要求. 现有设备是否符合此要求? 若不符合此要求, 求出符合要求时, 生产一件产品为标准长度的概率的最小值.

21. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , $c = 4\sqrt{2}$, $\cos C = \frac{3}{5}$.

(1) 若 $B = \frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(2) 若 $b = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (x - \frac{1}{x}) \ln x$, $g(x) = x - \frac{k}{x}$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的极小值点为 1;

(2) 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 有两个零点, 证明: $1 \leq k < \frac{17}{8}$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

画出可行域和目标函数, 根据平移得到 $n = 5$, 再利用二项式定理计算得到答案.

【详解】

如图所示: 画出可行域和目标函数,

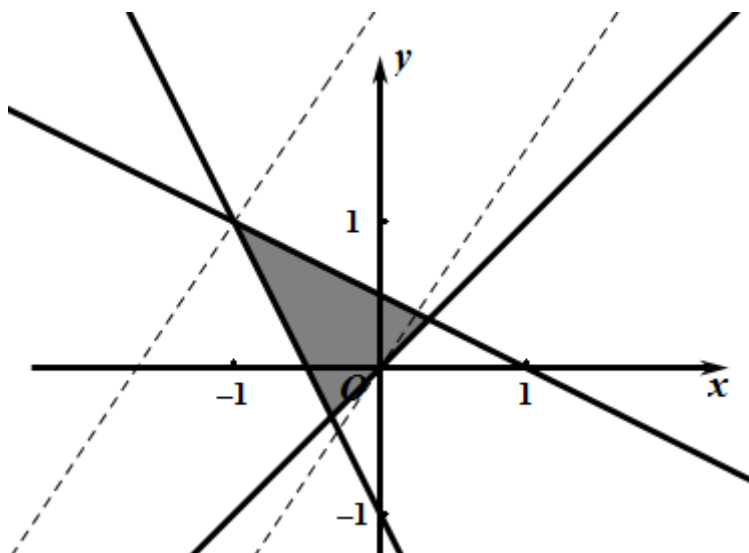
$z = -3x + 2y$, 即 $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$, 故 z 表示直线与 y 截距的 2 倍,

根据图像知: 当 $x = -1, y = 1$ 时, $z = -3x + 2y$ 的最大值为 5, 故 $n = 5$.

$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 展开式的通项为: $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{5-\frac{3}{2}r}$,

取 $r = 2$ 得到 x^2 项的系数为: $C_5^2 \cdot 2^{5-2} \cdot (-1)^2 = 80$.

故选: B.



【点睛】

本题考查了线性规划求最值，二项式定理，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

2、D

【解析】

利用倍角公式求得 $\tan 2\alpha$ 的值，利用诱导公式求得 $\cos \beta$ 的值，利用同角三角函数关系式求得 $\sin \beta$ 的值，进而求得 $\tan \beta$ 的值，最后利用正切差角公式求得结果.

【详解】

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3},$$

$$\cos(\pi + \beta) = -\frac{4}{5} = -\cos \beta, \quad (\beta \in (0, \pi)),$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \tan \beta = \frac{3}{4},$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{24},$$

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关三角函数求值问题，涉及到的知识点有诱导公式，正切倍角公式，同角三角函数关系式，正切差角公式，属于基础题目.

3、B

【解析】

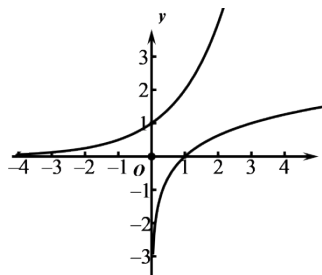
先判断命题 p, q 的真假,进而根据复合命题真假的真值表,即可得答案.

【详解】

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_c a = \frac{1}{\log_a c}$, 因为 $a > 1$, $b > c > 1$, 所以 $0 < \log_a c < \log_a b$, 所以 $\frac{1}{\log_a c} > \frac{1}{\log_a b}$, 即命题 p

为真命题; 画出函数 $y = 2^x$ 和 $y = \log_3 x$ 图象, 知命题 q 为假命题, 所以 $p \wedge (\neg q)$ 为真.

故选: B.



【点睛】

本题考查真假命题的概念, 以及真值表的应用, 解题的关键是判断出命题 p, q 的真假, 难度较易.

4、 B

【解析】

展开式中的每一项是由每个括号中各出一项组成的, 所以可分成三种情况.

【详解】

展开式中的项为常数项, 有 3 种情况:

(1) 5 个括号都出 1, 即 $T = 1$;

(2) 两个括号出 x , 两个括号出 $(-\frac{1}{x})$, 一个括号出 1, 即 $T = C_5^2 \cdot x^2 \cdot C_3^2 \cdot (-\frac{1}{x})^2 \cdot 1 = 30$;

(3) 一个括号出 x , 一个括号出 $(-\frac{1}{x})$, 三个括号出 1, 即 $T = C_5^1 \cdot x \cdot C_4^1 \cdot (-\frac{1}{x}) \cdot 1 = -20$;

所以展开项中的常数项为 $T = 1 + 30 - 20 = 11$, 故选 B.

【点睛】

本题考查二项式定理知识的生成过程, 考查定理的本质, 即展开式中每一项是由每个括号各出一项相乘组合而成的.

5、 A

【解析】

对数字 2 分类讨论, 结合数字 1, 3, 5 中有且仅有两个数字相邻, 利用分类计数原理, 即可得到结论

【详解】

数字 2 出现在第 2 位时, 数字 1, 3, 5 中相邻的数字出现在第 3, 4 位或者 4, 5 位,

共有 $C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 12$ 个

数字 2 出现在第 4 位时, 同理也有 12 个

数字2出现在第3位时,数字1,3,5中相邻的数字出现在第1,2位或者4,5位,

共有 $C_2^1 C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 24$ 个

故满足条件的不同的五位数的个数是48个

故选 A

【点睛】

本题主要考查了排列,组合及简单计数问题,解题的关键是对数字2分类讨论,属于基础题。

6、C

【解析】

根据 $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 两边平方 $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$, 化简得 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -3(\vec{a})^2$, 再利用数量积定义得到 $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = -3(\vec{a})^2$ 求解.

【详解】

因为平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 满足 $|\vec{a}| = \frac{1}{3}, |\vec{b}| = 1$, 且 $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$,

所以 $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$,

所以 $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -3(\vec{a})^2$,

所以 $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = -3(\vec{a})^2$,

所以 $\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = -\frac{1}{2}$,

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查平面向量的模, 向量的夹角和数量积运算, 属于基础题.

7、A

【解析】

利用韦达定理可得 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$, 结合 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ 可推出 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, 再计算出 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 从而推出①正确; 再利用递推公式依次计算数列中的各项, 以此判断②的正误.

【详解】

因为 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根,

所以 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$,

因为 $a_n = \alpha^n + \beta^n$,

所以 $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$

$$= (\alpha^n + \beta^n)\alpha + (\alpha^n + \beta^n)\beta - \beta^n\alpha - \alpha^n\beta$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$= (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = a_n + a_{n-1},$$

即当 $n \geq 3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中的任一项都等于其前两项之和,

$$\text{又 } a_1 = \alpha + \beta = 1, a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3,$$

$$\text{所以 } a_3 = a_2 + a_1 = 4, a_4 = a_3 + a_2 = 7, a_5 = a_4 + a_3 = 11,$$

以此类推, 即可知数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数, 故①正确;

若数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数, 则此项个位数字应当为 0 或 5,

由 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 依次计算可知,

数列 $\{a_n\}$ 中各项的个位数字以 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2 为周期,

故数列 $\{a_n\}$ 中不存在个位数字为 0 或 5 的项, 故②错误;

故选: A.

【点睛】

本题主要考查数列递推公式的推导, 考查数列性质的应用, 考查学生的综合分析以及计算能力.

8、D

【解析】

因为蛋巢的底面是边长为 1 的正方形, 所以过四个顶点截鸡蛋所得的截面圆的直径为 1, 又因为鸡蛋的体积为 $\frac{4\pi}{3}$, 所

以球的半径为 1, 所以球心到截面的距离 $d = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而截面到球体最低点距离为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而蛋巢的高度为 $\frac{1}{2}$,

故球体到蛋巢底面的最短距离为 $\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

点睛:本题主要考查折叠问题,考查球体有关的知识.在解答过程中,如果遇到球体或者圆锥等几何体的内接或外接几何体的问题时,可以采用轴截面的方法来处理.也就是画出题目通过球心和最低点的截面,然后利用弦长和勾股定理来解决.球的表面积公式和体积公式是需要熟记的.

9、B

【解析】

$$\square = \{\square | \square = 2^{\square}, \square > 0\} = \{\square | \square > 1\},$$

$$\square = \{\square | \square = \lg(2\square - \square^2)\} = \{\square | 2\square - \square^2 > 0\}$$

$$= \{\square | \square^2 - 2\square < 0\} = \{\square | 0 < \square < 2\},$$

$$\therefore \square \cap \square = (1, 2).$$

故选B.

10、C

【解析】

利用复数的除法运算法则进行化简,再由复数模的定义求解即可.

【详解】

$$\text{因为 } (1+i) \cdot z = 1-i,$$

$$\text{所以 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i) \cdot (1-i)} = -i,$$

$$\text{由复数模的定义知, } |z| = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

故选:C

【点睛】

本题考查复数的除法运算法则和复数的模;考查运算求解能力;属于基础题.

11、C

【解析】

可分成两类,一类是3个新教师与一个老教师结对,其他一新一老结对,第二类两个老教师各带两个新教师,一个老教师带一个新教师,分别计算后相加即可.

【详解】

分成两类,一类是3个新教师与同一个老教师结对,有 $C_5^3 A_3^3 = 60$

种结对结对方式，第二类两个老教师各带两个新教师，有 $\frac{C_5^2 C_3^2 A_3^3}{2!} = 90$.

∴共有结对方式 $60 + 90 = 150$ 种.

故选：C.

【点睛】

本题考查排列组合的综合应用. 解题关键确定怎样完成新老教师结对这个事情，是先分类还是先分步，确定方法后再

计数. 本题中有一个平均分组问题. 计数时容易出错. 两组中每组中人数都是 2，因此方法数为 $\frac{C_5^2 C_3^2}{2!}$.

12、C

【解析】

集合 A 表示半圆上的点，集合 B 表示直线上的点，联立方程组求得方程组解的个数，即为交集中元素的个数.

【详解】

由题可知：集合 A 表示半圆上的点，集合 B 表示直线上的点，

联立 $y = \sqrt{1-x^2}$ 与 $y = 2x$ ，

可得 $\sqrt{1-x^2} = 2x$ ，整理得 $x^2 = \frac{1}{5}$ ，

即 $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

当 $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时， $y = 2x < 0$ ，不满足题意；

故方程组有唯一的解 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

故 $A \cap B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查集合交集的求解，涉及圆和直线的位置关系的判断，属基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、432

【解析】

先分间隔一个与不间隔分类计数，再根据捆绑法求排列数,最后求和得结果.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945213243012011131>