

微专题 29 抽象函数及应用 13 种常考题型总结

高频考点

题型 1 抽象函数的定义域问题

题型 2 抽象函数的值域问题

题型 3 求抽象函数的值

题型 4 求抽象函数的解析式

题型 5 抽象函数的奇偶性问题

题型 6 抽象函数的单调性问题

题型 7 抽象函数周期性问题

题型 8 抽象函数的对称性问题

题型 9 解抽象不等式

题型 10 抽象函数比较大小

题型 11 抽象函数的最值问题

题型 12 抽象函数的零点问题

题型 13 双函数混合型



解题策略

1.抽象函数概念：我们把没有给出具体解析式的函数称为抽象函数，题目中往往只给出函数的特殊条件或特征.

2.抽象函数定义域的确定

所谓抽象函数是指用 $f(x)$ 表示的函数，而没有具体解析式的函数类型，求抽象函数的定义域问题，关键是注意对应法则。在同一对应法则的作用下，不论接受法则的对象是什么字母或代数式，其制约条件是一致的，都在同一取值范围内。

抽象函数的定义域的求法

(1)若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域由 $a \leq g(x) \leq b$ 求出。

(2)若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时的值域。

注：求函数的定义域，一般是转化为解不等式或不等式组的问题，注意定义域是一个集合，其结果必须用集合或区间来表示。

3.“赋值法”求抽象函数的值

赋值法就是根据题目的具体情况，合理、巧妙地对某些元素赋予确定的特殊值(0,1, -1 等),从而使问题获得简洁有效的解决。

注：（1）第一层次赋值：常常令字母取 0, -1,1 等.

（2）第二层次赋值：若题中有条件 $f(x_0) = t$ ，则再令字母取 x_0 。

(3) 第三层次赋值：拆分赋值，根据抽象式子运算，把赋值数拆成某两个值对应的和与积（较多）或者差与商（较少）。

4.“赋值法”求抽象函数的解析式

赋值法求抽象函数的解析式，首先要对题设中的有关参数进行赋值，再得到函数解析式的某种递推关系，最后求得函数的解析式。

5.“赋值法”探究抽象函数的奇偶性

判断抽象函数的奇偶性的关键是得到 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系，解题时要对有关变量进行赋值，使其最后只保留 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系。

注：证明抽象函数的奇偶性实质就是赋值，分析出赋值规律。

(1) 可赋值，得到一些特殊点函数值，如 $f(0)$ ， $f(1)$ 等，

(2) 尝试适当的换元字母，构造出 x 和 $-x$ ，如 $f(x+y)$ ，可令 $y=-x$ ， $f(xy)$ ，可令 $y=-1$ 等等。

(3) 通过各类抽象函数式子，来积累一定的赋值技巧。

6.判断抽象函数单调性的方法：

(1) 凑：凑定义或凑已知，利用定义或已知条件得出结论；

(2) 赋值：给变量赋值要根据条件与结论的关系，有时可能要进行多次尝试。

①若给出的是“和型”抽象函数 $f(x+y)=\dots$ ，判断符号时要变形为：

$$f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1) \text{ 或 } f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)-f((x_1-x_2)+x_2)；$$

②若给出的是“积型”抽象函数 $f(xy)=\dots$ ，判断符号时要变形为：

$$f(x_2)-f(x_1)=f\left(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}\right)-f(x_1) \text{ 或 } f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)-f\left(x_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}\right)。$$

7.抽象函数周期性的常用结论（ a 是不为 0 的常数）

1、若 $f(x+a)=f(x)$ ，则 $T=a$ ；

2、若 $f(x+a)=f(x-a)$ ，则 $T=2a$ ；

3、若 $f(x+a)=-f(x)$ ，则 $T=2a$ ；

4、若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a$ ；

5、若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a$ ；注： $f(x+a)=\frac{k}{f(x)} \Rightarrow T=2a$ ；（ k 为常数）

6、若 $f(x+a)=f(x+b)$ ，则 $T=|a-b|$ （ $a \neq b$ ）；

8.抽象函数的对称性

(1) 轴对称:

① 函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称 $\Leftrightarrow f(x+a) = f(a-x) \Leftrightarrow f(x) = f(2a-x) \Leftrightarrow f(-x) = f(2a+x)$

② 函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(x+a) = f(b-x) \Leftrightarrow f(a-x) = f(x+b)$.

(2) 中心对称:

① 函数 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(x) = -f(2a-x) \Leftrightarrow f(x+a) = -f(a-x)$;

② 函数 $y = f(x)$ 关于点 (a, b) 对称 $\Leftrightarrow f(x+a) = f(a-x) \Leftrightarrow f(-x) + f(2a+x) = 2b$

9.函数的奇偶性和对称性的关系:

(1) 若 $f(x+a)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 关于 $(a, 0)$ 对称;

(2) 若 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 关于 $x = a$ 对称;

(3) 若 $f(\omega x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 关于 $(\varphi, 0)$ 对称;

(4) 若 $f(\omega x + \varphi)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 关于 $x = \varphi$ 对称.

10.抽象单调性与对称性(或奇偶性)结合解不等式问题

① $f(x)$ 在 R 上是奇函数, 且 $f(x)$ 单调递增 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 则有

$$x_1 + x_2 > 0;$$

$f(x)$ 在 R 上是奇函数, 且 $f(x)$ 单调递减 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 则有

$$x_1 + x_2 < 0;$$

② $f(x)$ 在 R 上是偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) > f(x_2)$, 则有 $|x_1| > |x_2|$ (不变号加绝对值);

$f(x)$ 在 R 上是偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) > f(x_2)$, 则有 $|x_1| < |x_2|$ (变号加绝对值);

③ $f(x)$ 关于 (a, b) 对称, 且 $f(x)$ 单调递增 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2b$, 则有

$$x_1 + x_2 > 2a;$$

$f(x)$ 关于 (a, b) 对称, 且 $f(x)$ 单调递减 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) + f(x_2) > 2b$, 则有

$$x_1 + x_2 < 2a;$$

④ $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称, 且 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递增 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) > f(x_2)$, 则有 $|x_1 - a| > |x_2 - a|$
(不变号加绝对值);

$f(x)$ 关于 $x=a$ 对称, 且 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递减 $\Rightarrow$ 若解不等式 $f(x_1) > f(x_2)$, 则有 $|x_1 - a| < |x_2 - a|$
(不变号加绝对值);

11. 抽象函数的模型

【反比例函数模型】

反比例函数: $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, 则 $f(x) = \frac{f(1)}{x}$, $[x, f(x), f(y), f(x+y)]$ 均不为 0

【一次函数模型】

模型 1: 若 $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y)$, 则 $f(x) = f(1)x$;

模型 2: 若 $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y)$, 则 $f(x)$ 为奇函数;

模型 3: 若 $f(x+y) = f(x) + f(y) + m$, 则 $f(x) = [f(1) + m]x - m$;

模型 4: 若 $f(x-y) = f(x) - f(y) + m$, 则 $f(x) = [f(1) - m]x + m$;

【指数函数模型】

模型 1: 若 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 则 $f(x) = [f(1)]^x$; $f(x) > 0$

模型 2: 若 $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, 则 $f(x) = [f(1)]^x$; $f(x) > 0$

模型 3: 若 $f(x+y) = f(x)f(y)m$, 则 $f(x) = \frac{[f(1)m]^x}{m}$;

模型 4: 若 $f(x-y) = m \frac{f(x)}{f(y)}$, 则 $f(x) = m \left[\frac{f(1)}{m} \right]^x$;

【对数函数模型】

模型 1: 若 $f(x^n) = nf(x)$, 则 $f(x) = f(a)\log_a x (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, x > 0)$

模型 2: 若 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x) = f(a)\log_a x (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, x, y > 0)$

模型 3: 若 $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, 则 $f(x) = f(a)\log_a x (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, x, y > 0)$

模型 4: 若 $f(xy) = f(x) + f(y) + m$, 则 $f(x) = [f(a) + m]\log_a x - m (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, x, y > 0)$

模型 5: 若 $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) + m$, 则 $f(x) = [f(a) - m]\log_a x + m (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, x, y > 0)$

【幂函数模型】

模型 1: 若 $f(xy) = f(x)f(y)$, 则 $f(x) = f(a)^{\log_a x} (a > 0 \text{ 且 } \neq 1)$

模型 2: 若 $f(\frac{x}{y}) = \frac{f(x)}{f(y)}$, 则 $f(x) = f(a)^{\log_a x} (a > 0 \text{ 且 } \neq 1, y \neq 0, f(y) \neq 0)$

代入 $f(a)$ 则可化简为幂函数;

【余弦函数模型】

模型 1: 若 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) (f(x) \text{ 不恒为 } 0)$, 则 $f(x) = \cos wx$

模型 2: 若 $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2}) (f(x) \text{ 不恒为 } 0)$, 则 $f(x) = \cos wx$

【正切函数模型】

模型: 若 $f(x \pm y) = \frac{f(x) \pm f(y)}{1 \mp f(x)f(y)} (f(x)f(y) \neq 1)$, 则 $f(x) = \tan wx$

模型 3: 若 $f(x+y) + f(x-y) = kf(x)f(y) (f(x) \text{ 不恒为 } 0)$, 则 $f(x) = \frac{2}{k} \cos wx$



考点精析

题型 1 抽象函数的定义域问题

【例 1】已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 3]$, 则 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 ()

A. $[0,2]$

B. $[-1,3]$

C. $[0,4]$

D. $\left[-\frac{5}{2}, 0\right]$

【答案】A

【分析】根据抽象函数定义域之间的关系即可得到结论.

【详解】因为函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1,3]$,

所以 $-1 \leq 2x-1 \leq 3$, 解得 $0 \leq x \leq 2$,

故函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 $[0,2]$.

故选: A.

【变式 1】已知函数 $f(x+2)$ 的定义域为 $(-1,3)$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

A. $(-1,1)$

B. $(1,5)$

C. $(-3,1)$

D. $(0,2)$

【答案】B

【分析】根据抽象函数定义域的对应特征分析求解.

【详解】对于函数 $f(x+2)$: 因为 $x \in (-1,3)$, 则 $x+2 \in (1,5)$,

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(1,5)$.

故选: B.

【变式 2】已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[1,9]$, 则函数 $y = f(x^2)$ 的定义域为_____.

【答案】 $[-3,-1] \cup [1,3]$

【分析】可根据相同对应关系括号内取值范围一样解出结果.

【详解】因为函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[1,9]$,

所以 $1 \leq x \leq 9$,

又因为函数 $y = f(x^2)$,

所以 $1 \leq x^2 \leq 9$, 即 $1 \leq x \leq 3$ 或 $-3 \leq x \leq -1$,

故答案为: $[-3,-1] \cup [1,3]$

【变式 3】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$ ，则 $f(2x) + f(9x^2 - 1)$ 的定义域为_____.

【答案】 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

【分析】 根据题意列出 $f(2x) + f(9x^2 - 1)$ 满足的不等式，即可求得答案.

【详解】 由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$ ，

则 $f(2x) + f(9x^2 - 1)$ 需满足 $\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 3 \\ -1 \leq 9x^2 - 1 \leq 3 \end{cases}$ ，解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ ，

即 $f(2x) + f(9x^2 - 1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ ，

故答案为： $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

【变式 4】 函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，函数 $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{2x+1}}$ ，则 $g(x)$ 的定义域为 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ C. $[-2, 1]$ D. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right]$

【答案】 D

【分析】 利用抽象函数定义域求法可得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$ ，结合根式和分母要求即可求得结果.

【详解】 根据题意可得函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，可知 $x+1 \in [-1, 2]$ ，

即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$ ，

所以 $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{2x+1}}$ 需满足 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$ ，解得 $-\frac{1}{2} < x \leq 2$ ，

即 $g(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right]$ 。

故选： D

【变式 5】 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2, 5]$ ，则函数 $y = \frac{f(2x-3)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $(3, 4]$

【分析】 应用求解抽象函数的定义域的方法求出 $f(2x-3)$ 的定义域，和 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的解集，即可求解.

【详解】 由题意得函数 $f(x)$ 的定义域是 $[2, 5]$ ，

令 $t = 2x - 3$ ，所以 $2 \leq t \leq 5$ ，即 $2 \leq 2x - 3 \leq 5$ ，解得 $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$ ，

由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ ，解得 $x < -1$ 或 $x > 3$ ，

所以函数 $y = \frac{f(2x-3)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域为 $(3, 4]$ 。

故答案为： $(3, 4]$ 。

题型 2 抽象函数的值域问题

【例 2】已知函数 $y = f(x) + 1$ 的值域为 $(1, 3)$ ，则函数 $y = -2f(x)$ 的值域为 ()

- A. $(-4, 0)$ B. $(-6, -2)$ C. $(2, 6)$ D. $(0, 4)$

【答案】A

【分析】根据已知求得 $f(x)$ 的范围，即可得到 $-2f(x)$ 的范围。

【详解】因为函数 $y = f(x) + 1$ 的值域为 $(1, 3)$ ，即 $1 < f(x) + 1 < 3$ ，
所以 $0 < f(x) < 2$ ，

所以 $-4 < -2f(x) < 0$ ，即函数 $y = -2f(x)$ 的值域为 $(-4, 0)$ 。

故选：A

【变式 1】已知 $g(x) = f(2x-1) + 1$ ，且 $g(x)$ 的定义域为 $(1, 4]$ ，值域为 $[3, +\infty)$ ，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\emptyset$ B. $[4, 7]$
C. $[2, 7]$ D. $\left[2, \frac{5}{2}\right]$

【答案】C

【分析】根据已知可推得 $y = f(2x-1)$ 的定义域与值域，然后即可得出 A, B，根据交集的运算得出答案。

【详解】由已知 $g(x)$ 的定义域为 $(1, 4]$ ，值域为 $[3, +\infty)$ ，
可得 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 $(1, 4]$ ，值域为 $[2, +\infty)$ ，
所以 $1 < x \leq 4$ ，

所以 $1 < 2x - 1 \leq 7$ ，所以 $A = (1, 7]$ ， $B = [2, +\infty)$ 。

所以， $A \cap B = (1, 7] \cap [2, +\infty) = [2, 7]$ 。

故选：C。

【变式 2】 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ，值域为 $[-2, 1]$ ，则下列函数的值域也为 $[-2, 1]$ 的是 ()

A. $y = 2f(x) + 5$

B. $y = f(2x + 5)$

C. $y = -f(x)$

D. $y = |f(x)|$

【答案】B

【分析】 结合题意逐个选项验证可得答案。

【详解】 对于 A，由 $f(x) \in [-2, 1]$ 可得， $2f(x) + 5 \in [1, 7]$ ，故 A 错误；

对于 B， $y = f(2x + 5) = f\left(2\left(x + \frac{5}{2}\right)\right)$ ， $y = f(2x + 5)$ 的图象可看作由 $f(x)$ 的图象经过平移和横向伸缩变换得到，故值域不变，故 B 正确；

对于 C， $y = -f(x) \in [-1, 2]$ ，故 C 错误；

对于 D， $y = |f(x)| \in [0, 2]$ ，故 D 错误。

故选：B。

【变式 3】 【多选】 已知函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $[-3, 3]$ ，则 ()

A. 函数 $f(x - 2)$ 的定义域为 $[-1, 5]$

B. 函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1, 1)$

C. 函数 $f(x - 2)$ 的值域为 $[-3, 3]$

D. 函数 $f(2x)$ 的值域为 $[-6, 6]$

【答案】ABC

【分析】 根据抽象函数的定义域列不等式求解判断 AB；求出抽象函数的值域判断 CD。

【详解】 函数 $f(x - 2)$ 中的 x 需满足 $-3 \leq x - 2 \leq 3$ ，解得 $-1 \leq x \leq 5$ ，

故函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[-1, 5]$ ，故 A 正确；

函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 中的 x 需满足 $\begin{cases} -3 \leq 3x \leq 3, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x < 1$ ，

故函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1, 1)$ ，故 B 正确；

函数 $f(x-2)$ 和 $f(2x)$ 的值域都为 $[-3, 3]$ ，故 C 正确，D 错误。

故选：ABC.

题型 3 求抽象函数的值

【例 3】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1+x$ ，则 $f(2) = (\quad)$

A. $-\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{9}{4}$

【答案】D

【分析】根据题意分别令 $x=2$ 、 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-1$ ，运算求解即可。

【详解】因为 $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1+x$ ，

令 $x=2$ ，可得 $f(2) + f(-1) = 3$ ；

令 $x=\frac{1}{2}$ ，可得 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{3}{2}$ ；

两式相加可得 $f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \frac{9}{2}$ ，

令 $x=-1$ ，可得 $f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ；

则 $2f(2) = \frac{9}{2}$ ，即 $f(2) = \frac{9}{4}$ 。

故选：D.

【变式 1】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，若 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ， $f(8) = 3$ ，则 $f(2) = (\quad)$

A. 1

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】因为 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ， $f(8) = 3$ ，

所以令 $x=y=4$ ，得 $f(8) = 2f(4)$ ，得 $f(4) = \frac{3}{2}$ ，

所以令 $x=y=2$ ，得 $f(4)=2f(2)$ ，得 $f(2)=\frac{3}{4}$. 故选：C

【变式 2】 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且不恒为零的函数，对于任意实数 a, b 满足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$ ，若 $f(3)=2$ ，则 $f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)=$ ()

A. $-\frac{7}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $-\frac{2}{9}$

【答案】C

【解析】 当 $a=b=0$ 时， $f(0)=0$ ，

当 $a=b=1$ 时， $f(1)=2f(1)$ ，可得 $f(1)=0$ ，

当 $a=b=-1$ 时， $f(1)=-2f(-1)$ ，可得 $f(-1)=0$ ，

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且不恒为零的函数，

令 $a=-1, b=x$ ，可得 $f(-x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 是奇函数，

令 $a=3, b=\frac{1}{3}$ ， $f(1)=3f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(3)=0$ ，

得 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{9}$ ，所以 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$ ，

所以 $f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$. 故选：C.

【变式 3】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ ，若 $f(1)=1$ ，则 $f(25)=$ ()

A. 25

B. 125

C. 625

D. 15625

【答案】C

【分析】 利用赋值法结合条件可得 $f(n)=n^2$ 进而即得；或构造函数 $f(x)=x^2$ 求解.

【详解】 解法一：由题意取 $x=n(n \in \mathbf{N}), y=1$ ，可得

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+2n$$

$$=f(n-1)+2f(1)+2(n-1)+2n$$

$$= f(n-2) + 3f(1) + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n$$

$$= (n+1)f(1) + 2(1+2+\cdots+n)$$

$$= (n+1)f(1) + n(n+1)$$

即知 $f(n) = nf(1) + n(n-1) = n + n(n-1) = n^2$, 则 $f(25) = 625$.

解法二：令 $g(x) = f(x) - x^2$, 则 $g(x+y) = f(x+y) - (x+y)^2$

$$= f(x) + f(y) + 2xy - (x+y)^2 = f(x) + f(y) - x^2 - y^2 = g(x) + g(y),$$

所以 $g(n) = g(n-1) + g(1) = \cdots = ng(1) = n(f(1) - 1^2) = 0$,

即 $g(n) = f(n) - n^2 = 0$, 所以 $f(n) = n^2$, 则 $f(25) = 625$.

解法三：由 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 可构造满足条件的函数 $f(x) = x^2$,

可以快速得到 $f(25) = 625$.

故选：C.

【变式 4】【多选】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x-y) = f(-x) + f(y) - 2xy$, 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(2) = 4$

C. $y = f(x) - 2x$ 是奇函数

D. $y = f(x) - 2x^2$ 是偶函数

【答案】 ABD

【分析】 根据已知的抽象函数性质, 赋值 (式) 法求解即可.

【详解】 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 2f(0)$, 即 $f(0) = 0$. A 正确.

令 $y = 0$, 则 $f(x) = f(-x)$.

令 $y = x$, 则 $f(-x) + f(x) - 2x^2 = f(0) = 0$, 则 $f(x) = x^2$.

故 $f(2) = 4$. B 正确.

$y = f(x) - 2x = x^2 - 2x$ 是非奇非偶函数. C 不正确.

$y = f(x) - 2x^2 = -x^2$ 是偶函数. D 正确.

故选: ABD.

题型 4 求抽象函数的解析式

【例 4】 已知函数 $y = f(x)$ 满足: 对一切实数 a, b , 均有 $f(a+b) - f(b) = a(a+2b+1)$ 成立, 且 $f(1) = 0$. 求函数 $y = f(x)$ 的表达式.

【答案】 $f(x) = x(x+1) - 2$.

【分析】 根据所给关系对于 a, b 合理赋值后求出 $f(0)$, 再令 $b = 0$ 可得解.

【详解】 由已知等式 $f(a+b) - f(b) = a(a+2b+1)$,

令 $a = 1, b = 0$, 得 $f(1) - f(0) = 2$.

又 $f(1) = 0$, 所以 $f(0) = -2$.

再令 $b = 0$, 可得 $f(a) - f(0) = a(a+1)$, 即 $f(a) = a(a+1) - 2$.

因此, 函数 $y = f(x)$ 的表达式为 $f(x) = x(x+1) - 2$.

【变式 1】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x) + 2$, 则 $f(x)$ 的解析式可以是_____. (写出满足条件的一个解析式即可)

【答案】 $f(x) = 2x$ (答案不唯一)

【分析】 利用待定系数法求解即可, 若设 $f(x) = ax$, 然后代入化简求出 a 即可.

【详解】 若设 $f(x) = ax$, 则由 $f(x+1) = f(x) + 2$,

得 $a(x+1) = ax + 2$, 解得 $a = 2$,

所以 $f(x) = 2x$,

故答案为: $f(x) = 2x$ (答案不唯一)

【变式 2】 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f(0)=1$, 并且对于任意的实数 x, y 都有 $f(x+y)=f(x)+y(2x+1)$, 求 $f(x)$.

【答案】 $f(x)=2x^2+x+1$

【分析】 利用赋值法可求 $f(x)$ 的解析式.

【详解】 由已知条件得 $f(0)=1$, 又 $f(x+y)=f(x)+y(2x+1)$,

设 $y=-x$, 则 $f(x-x)=f(x)-x(2x+1)$, $\therefore f(x)=2x^2+x+1$.

【变式 3】 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(2xy-1)=f(x) \cdot f(y)+f(y)+2x-3$, $f(0)=-1$, 则不等式 $f(x)>3-2^x$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, -1)$

【答案】 A

【分析】 先利用赋值法求 $f(-1)=-3$ 及 $f(x)=2x-1$, 然后利用单调性解不等式即可.

【详解】 令 $x=y=0$, 得 $f(-1)=f(0) \cdot f(0)+f(0)-3=-3$.

令 $y=0$, 得 $f(-1)=f(x)f(0)+f(0)+2x-3$, 解得 $f(x)=2x-1$,

则不等式 $f(x)>3-2^x$ 转化为 $2x+2^x-4>0$,

因为 $y=2x+2^x-4$ 是增函数, 且 $2 \times 1 + 2^1 - 4 = 0$,

所以不等式 $f(x)>3-2^x$ 的解集为 $(1, +\infty)$.

故选: A

题型 5 抽象函数的奇偶性问题

【例 5】 【多选】 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy+1$, 且 $f(1)=1$, 则 ()

A. $f(0) = -1$

B. $f(x)$ 可能是偶函数

C. $f(2) = 8$

D. $f(x)$ 可能是奇函数

【答案】AB

【分析】根据条件，通过赋值法，对各个选项逐一分析判断即可得出结果.

【详解】对于选项 A，令 $x = y = 0$ ，得 $f(0) = f(0) + f(0) + 1$ ，则 $f(0) = -1$ ，所以选项 A 正确；

令 $y = -x$ ，得 $f(0) = f(x) + f(-x) - 4x^2 + 1$ ，则 $f(x) + f(-x) = 4x^2 - 2$ ，

对于选项 B，若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x) = f(-x) = 2x^2 - 1$ ，所以选项 B 正确；

对于选项 D，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(1) + f(-1) = 2 \neq 0$ ，所以 $f(x)$ 不可能是奇函数，所以选项 D 错误；

对于选项 C，令 $x = y = 1$ ，得 $f(2) = f(1) + f(1) + 4 + 1 = 7$ ，所以选项 C 错误；

故选：AB.

【变式 1】【多选】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x-3)$ 为偶函数， $f(2x-1)$ 为奇函数，则 ()

A. $f(-1) = 0$

B. $f(x) = f(-x-6)$

C. $f(x) = f(-x-2)$

D. $f(7) = 0$

【答案】ABD

【解析】因为函数 $F(x) = f(2x-1)$ 为奇函数，所以 $F(0) = f(-1) = 0$ ，A 正确；

由 $f(x-3)$ 为偶函数，得 $f(x-3) = f(-x-3)$ ，即 $f(x) = f(-x-6)$ ，B 正确；

由 $f(2x-1)$ 为奇函数，得 $f(2x-1) = -f(-2x-1)$ ，

所以 $f(x-1) = -f(-x-1)$ ，即 $f(x) = -f(-x-2)$ ，C 错误.

由上可知 $f(-x-6) = -f(-x-2)$ ，则 $f(x) = -f(x+4)$ ，则 $f(x) = f(x+8)$ ，

所以 $f(7) = f(-1+8) = f(-1) = 0$ ，D 正确. 故选：ABD

【变式 2】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是单调函数，满足 $f(3) = 6$ ，且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ， $(x, y \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(0)$ ， $f(1)$ ；

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明；

【答案】(1) $f(0) = 0$ ， $f(1) = 2$ ；(2) 奇函数，证明见解析；

【解析】(1) 取 $x = 0$ ，得 $f(0+y) = f(0) + f(y)$ ，即 $f(y) = f(0) + f(y)$ ，

所以 $f(0)=0$ ，因为 $f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)=f(1)+f(1)+f(1)=3f(1)$ ，

又 $f(3)=6$ ，得 $3f(1)=6$ ，可得 $f(1)=2$ ；

(2) 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，定义域关于原点对称，

取 $y=-x$ ，得 $f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)=0$ ，移项得 $f(-x)=-f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

【变式 3】 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2$ ， $f(0)<f(1)$ ，且 $f(x)>0$.

(1) 求 $f(-1)$ 的值；

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明.

【答案】 (1) $f(-1)=2$ ；(2) $f(x)$ 为偶函数，证明见解析

【解析】 (1) 令 $x=y=0$ ，得 $f(0)=[f(0)]^2-2f(0)+2$ ，

令 $x=y=1$ ，得 $f(1)=[f(1)]^2-2f(1)+2$ ，

因为 $f(0)<f(1)$ ，所以 $f(0)=1$ ， $f(1)=2$ ，

令 $x=y=-1$ ，得 $f(1)=[f(-1)]^2-2f(-1)+2$ ，即 $[f(-1)]^2=2f(-1)$ ，

因为 $f(x)>0$ ，所以 $f(-1)>0$ ，所以 $f(-1)=2$.

(2) $f(x)$ 为偶函数.

证明如下：令 $y=-1$ ，得 $f(-x)=f(-1)f(x)-f(-1)-f(x)+2$ ，

由 (1) 得 $f(-x)=2f(x)-2-f(x)+2$ ，

即 $f(-x)=f(x)$ ，又 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数.

【变式 4】【多选】 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(y)=f(xy)+|x|+|y|$ ，则 ()

A. $f(0)=1$

B. $f(1)=-1$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 是奇函数

【答案】 AC

【分析】 利用赋值法求得 $f(0)=1$ ， $f(x)=1+|x|$ ，可判断各选项的正误。

【详解】令 $y=0$ ，则 $f(0)f(x)=f(0)+|x|$ ，

令 $x=y=0$ ，则 $[f(0)]^2=f(0)$ ，解得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$ ，

若 $f(0)=0$ ，则 $|x|=0$ 恒成立，不合题意，故 $f(0)=1$ ，A 选项正确；

$f(0)=1$ ，则 $f(x)=1+|x|$ ， $f(-1)=2$ ，B 选项错误；

函数 $f(x)=1+|x|$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(-x)=1+|-x|=1+|x|=f(x)$ ，

$f(x)$ 为偶函数，C 正确，D 错误.

故选：AC

【变式 5】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且对任意实数 x, y ，都有 $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ，

$f(1)=-1$ ，则 ()

- A. $f(0)=0$ B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 为偶函数

【答案】D

【分析】根据抽象函数的关系，利用赋值法结合函数奇偶性的定义进行判断即可.

【详解】令 $x=y=1$ ，则 $2f(1)=2f(1)f(0)$ ， $\because f(1)=-1$ ， $\therefore f(0)=1$ ，选项 A 错误；

令 $x=1$ ， $y=0$ ，则 $f(1)+f(0)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)$ ，即 $2f^2\left(\frac{1}{2}\right)=-1+1=0$ ，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ ，选项 B 错误；

$\because f(0)=1$ ， $\therefore f(0)$ 不是奇函数，选项 C 错误；

令 $y=-x$ ，则 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$ ，即 $f(x)+f(-x)=2f(x)$ ，故 $f(-x)=f(x)$ ， $f(x)$ 为偶函数，

选项 D 正确；

故选：D.

题型 6 抽象函数的单调性问题

【例 6】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ，且对任意的 $x > 0$ ，都有 $f(x) > 0$ ，试判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性.

【答案】 $f(x)$ 在定义域上单调递增

【解析】令 $x=y=0$ ，则 $f(0)+f(0)=f(0)$ ，解得 $f(0)=0$ ，

令 $y=-x$ ，则 $f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$ ，

所以 $f(-x)=-f(x)$ ，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，且 $x_1 < x_2$ ，令 $x=x_2, y=-x_1$ ，则 $f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)$ ，

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，所以 $f(-x_1)=-f(x_1)$ ，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)$ ，因为当 $x>0$ 时， $f(x)>0$ ，

由 $x_1 < x_2$ ，所以 $x_2-x_1 > 0$ ，所以 $f(x_2-x_1) > 0$ ，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1) > 0$ ，即 $f(x_2) > f(x_1)$ ，

所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增.

【变式 1】已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$ ，且当 $x>0$ 时， $f(x)<2$ 。

试判断 $f(x)$ 的单调性，并证明；

【答案】 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，证明见解析

【解析】任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，且 $x_1 > x_2$ ，

因为 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2+x_2)-f(x_2)$ ， $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$ ，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)-2-f(x_2)$ ，故 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-2$ ，

因为 $x_1 > x_2$ ，所以 $x_1-x_2 > 0$ ，又因为当 $x>0$ 时， $f(x)<2$ ，所以 $f(x_1-x_2)<2$ ，

所以 $f(x_1-x_2)-2<0$ ，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$ ，即 $f(x_1)<f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

【变式 2】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任意实数 x, y ， $f(x+2y)=f(x)+2f(y)$ 。

(1) 若 $f(1)=-2$ ，求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 的值.

(2) 若 $x>0$ 时恒有 $f(x)<0$ ，试判断函数 $f(x)$ 单调性，并说明理由.

【答案】(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ ， $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$.

(2) $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，理由见解析.

【分析】(1) 取 $x=y=0$ ，可得 $f(0)=0$ ，取 $x=0$ ， $y=\frac{1}{2}$ ，解得 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ，取 $x=y=\frac{2}{3}$ ，解得 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ ，即可得出答案.

(2) 由题意可知 $f(x+2y)-f(x)=2f(y)$ ，设 $x_2>x_1$ ，令 $t=\frac{x_2-x_1}{2}$ ，则 $t>0$ ，作差 $f(x_2)-f(x_1)$ ，进而可得答案.

【详解】解：(1) 取 $x=y=0$ ，则 $f(0)=f(0)+2f(0)$ ， $f(0)=0$ ，

取 $x=0, y=\frac{1}{2}$ ，则 $f(1)=f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ ，

取 $x=0, y=1$ ，解得 $f(0+2)=f(0)+2f(1)$ ，则 $f(2)=-4$ ，

取 $x=y=\frac{2}{3}$ ，则 $f(2)=f\left(\frac{2}{3}\right)+2f\left(\frac{2}{3}\right)$ ，解得 $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ ，

(2) 由题意可知 $f(x+2y)-f(x)=2f(y)$ ，

设 $x_2>x_1$ ，令 $t=\frac{x_2-x_1}{2}$ ，则 $t>0$ ，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+2t)-f(x_1)=2f(t)<0$ ，

所以 $f(x_2)<f(x_1)$ ，

所以函数在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

【变式3】已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且对任意 $a, b \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ，且当 $x>0$ 时， $f(x)<0$ 恒成立.

(1) 判定并证明函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性；

(2) 讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(3) 若 $f(x^2-2)+f(x)<0$ ，求 x 的取值范围.

【答案】(1) 单调递减，证明见解析

(2) 奇函数，理由见解析

(3) $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>1\}$

【分析】(1) 利用函数单调性定义判断函数的单调性；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945224010212011343>