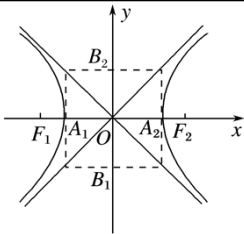
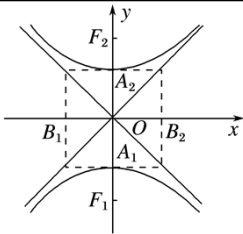


3.2.2 双曲线的几何性质

【考点梳理】

考点一：双曲线的性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$
图形			
性质	范围	$x \geq a$ 或 $x \leq -a$	$y \leq -a$ 或 $y \geq a$
	对称性	对称轴：坐标轴；对称中心：原点	
	顶点坐标	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
	渐近线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
	离心率	$e = \frac{c}{a}, e \in (1, +\infty)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
a, b, c 间的关系		$c^2 = a^2 + b^2 (c>a>0, c>b>0)$	

考点二：等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线，它的渐近线方程是 $y = \pm x$ ，离心率为 $\sqrt{2}$.

考点三：直线与双曲线的位置关系

设直线 $l: y = kx + m (m \neq 0)$ ，① 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ ，②

把①代入②得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2mkx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$.

(1) 当 $b^2 - a^2k^2 = 0$ ，即 $k = \pm \frac{b}{a}$ 时，直线 l 与双曲线 C 的渐近线平行，直线与双曲线相交于一点.

(2) 当 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$ ，即 $k \neq \pm \frac{b}{a}$ 时， $\Delta = (-2a^2mk)^2 - 4(b^2 - a^2k^2)(-a^2m^2 - a^2b^2)$.

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 直线与双曲线有两个公共点；

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 直线与双曲线有一个公共点；

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 直线与双曲线有 0 个公共点.

考点四：弦长公式

若斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线与双曲线相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $|AB| = \sqrt{1+k^2}[\sqrt{x_1^2+x_2^2}-4x_1x_2]$.

重难点技巧: 求解直线过定点问题常用方法如下:

- (1) “特殊探路, 一般证明”: 即先通过特殊情况确定定点, 再转化为有方向、有目的的一般性证明;
- (2) “一般推理, 特殊求解”: 即设出定点坐标, 根据题设条件选择参数, 建立一个直线系或曲线的方程, 再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组, 以这个方程组的解为坐标的点即为所求点;
- (3) 求证直线过定点 (x_0, y_0) , 常利用直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或截距式 $y = kx + b$ 来证明.

【题型归纳】

题型一: 双曲线的简单几何性质 (焦点、焦距)

1. (2022 秋·江苏盐城·高二江苏省阜宁中学校考期中) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = m (m \neq 0)$, 则当实数 m 变化时, 这些双曲线有 ()

- A. 相同的焦点 B. 相同的实轴长 C. 相同的离心率 D. 相同的渐近线

【答案】D

【分析】 分别求 $m > 0$ 与 $m < 0$ 时双曲线的 a, b, c 的值, 由此判断各选项的对错.

【详解】 当 $m > 0$ 时, 方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = m$ 可化为 $\frac{x^2}{4m} - \frac{y^2}{3m} = 1$,

$$\therefore a = 2\sqrt{m}, \quad b = \sqrt{3m}, \quad c = \sqrt{7m},$$

焦点坐标在 x 轴, 实轴长为 $4\sqrt{m}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

当 $m < 0$ 时, 方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = m$ 可化为 $\frac{y^2}{-3m} - \frac{x^2}{-4m} = 1$,

$$\therefore a = \sqrt{-3m}, \quad b = 2\sqrt{-m}, \quad c = \sqrt{-7m},$$

焦点坐标在 y 轴, 实轴长为 $2\sqrt{-3m}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$, 渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

所以这些双曲线有相同的渐近线.

故选: D.

2. (2023·高二课时练习) 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{9-t} - \frac{y^2}{t-4} = 1 (4 < t < 9)$ 与双曲线 $C_2: \frac{y^2}{16-m} - \frac{x^2}{m-11} = 1 (11 < m < 16)$ 的 ()

- A. 实轴长相等 B. 焦点坐标相同
C. 焦距相等 D. 离心率相等

【答案】C

【分析】根据两双曲线的方程，分别求得实半轴，虚半轴，进而求得实轴长，焦点位置，焦距，离心率，即可做出判定.

【详解】设双曲线 C_1, C_2 的实半轴，虚半轴，半焦距分别为 $a_i, b_i, c_i (i=1, 2)$.

由双曲线 C_1, C_2 的方程可得： $a_1 = \sqrt{9-t}, a_2 = \sqrt{16-m}, b_1 = \sqrt{t-4}, b_2 = \sqrt{m-11}$.

双曲线 C_1, C_2 的实轴长分别是 $2\sqrt{9-t}, 2\sqrt{16-m}$ ，与参数 t 和 m 有关，所以实轴长不一定相等，故 A 错误；

因为双曲线 C_1 的焦点在 x 轴上，双曲线 C_2 的焦点在 y 轴上，所以焦点坐标不同，故 B 错误；

因为 $c_1^2 = (9-t) + (t-4) = 5, c_2^2 = (16-m) + (m-11) = 5, \therefore c_1 = c_2, \therefore 2c_1 = 2c_2$ ，即两个双曲线的焦距相等，故 C 正确；

因为离心率 $e_1 = \frac{c_1}{a_1}, e_2 = \frac{c_2}{a_2}, c_1 = c_2, a_1, a_2$ 不一定相等，故离心率不一定相等，故 D 错误.

故选：C.

3. (2021 秋·江苏南通·高二统考期中) 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，有下列四个结论：

①虚轴长为 4；

②离心率为 2；

③焦距为 8；

④渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

若其中有且只有一个错误结论，则该错误结论的序号是 ()

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

【答案】B

【分析】任取双曲线的四个结论中的两个求解.

【详解】当①虚轴长为 4，②离心率为 2 时，

则 $b = 2, \frac{c}{a} = 2$,

所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{3}, c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

故③④错误，不符合题意；

当①虚轴长为 4，③焦距为 8 时，

则 $b = 2, c = 4$,

所以 $c = 4, a = 2\sqrt{3}$,

故 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故②错④正确，符合题意；

当①虚轴长为 4, ④渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 时,

$$\text{则 } b=2, \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{c}{a} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, c=4,$$

故②错③正确, 符合题意;

当③焦距为 8, ④渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 时,

$$\text{则 } c=4, \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{c}{a} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, b=2,$$

故②错①正确, 符合题意;

故选: B

题型二: 双曲线的简单几何性质 (顶点、实轴、虚轴)

4. (2021 秋·江苏南京·高二校联考阶段练习) 已知焦点为 F_1, F_2 的双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{5}$, 点 P 为 C 上一点, 且满足 $2|PF_1| = 3|PF_2|$, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{5}$, 则双曲线 C 的实轴长为 ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】由 $2|PF_1| = 3|PF_2|$ 和 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ 可得 $|PF_1| = 6a, |PF_2| = 4a$, 再结合余弦定理

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} \text{ 和 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{5} \text{ 可得 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{2}{3}, \text{ 利用面积公式}$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin \angle F_1PF_2 = 2\sqrt{5} \text{ 可解得 } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即得解}$$

【详解】由题意, $2|PF_1| = 3|PF_2| \therefore |PF_1| > |PF_2|$

由双曲线定义可知, $|PF_1| - |PF_2| = 2a$

$$\therefore |PF_1| = 6a, |PF_2| = 4a$$

$$\therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{36a^2 + 16a^2 - 4c^2}{48a^2} = \frac{52a^2 - 4c^2}{48a^2}$$

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{5} \therefore c = \sqrt{5}a \therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{又 } \angle F_1PF_2 \in (0, \pi) \therefore \sin \angle F_1PF_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \angle F_1PF_2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} \times 24a^2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore 2a^2 = 1, \text{ 又 } a > 0 \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

故双曲线 C 的实轴长为 $\sqrt{2}$

故选：B

5. (2022 秋·江苏无锡·高二江苏省天一中学校考期末) 设双曲线 $\frac{x^2}{m^2+12} + \frac{y^2}{1-5m} = 1$ 的实轴长为 8, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】C

【分析】根据题意可判断出 $1-5m < 0$, $a^2 = m^2+12, b^2 = 5m-1, c^2 = m^2+5m+11$; 根据双曲线的实轴长为 8 可求出 m 的值, 从而可求出双曲线的离心率.

【详解】由题意, 知 $1-5m < 0$, $a^2 = m^2+12, b^2 = 5m-1, c^2 = (m^2+12) + (5m-1) = m^2+5m+11$,

因为双曲线的实轴长为 8, 所以 $2a = 8$, 即 $a = 4$,

所以 $\sqrt{m^2+12} = 4$, 所以 $m = 2$ ($m = -2$ 舍), 所以 $c^2 = m^2+5m+11 = 25$, 即 $c = 5$,

所以该双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

故选：C.

6. (2022 秋·江苏南通·高二阶段练习) 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 圆 $C_2: (x-8)^2 + y^2 = 25$

与双曲线交于 C, D 两点, 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 k_2$ 为 ()

- A. $\frac{9}{16}$ B. $-\frac{9}{16}$ C. $\frac{16}{9}$ D. $-\frac{16}{9}$

【答案】B

【分析】由题知 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 进而结合题意设 $C(x_0, y_0), D(x_0, -y_0)$, 再结合 $y_0^2 = \frac{9(x_0^2-16)}{16}$, 计算 $k_1 k_2$ 即可得

答案.

【详解】解：由题知 $A(-4, 0), B(4, 0)$,

因为圆 $C_1: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 与双曲线交于 C, D 两点,

所以, 根据对称性可设 $C(x_0, y_0), D(x_0, -y_0)$,

所以, $k_1 = \frac{y_0}{x_0+4}, k_2 = \frac{-y_0}{x_0-4}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/945233012311011223>