2022-2023 第一学期高二数学期末考试

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

1. 直线 l 经过 $A(-1,3)$，$B(2,5)$ 两点，那么其斜率 k 为（　　）

A. 2　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

2. 已知圆的方程 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$，那么圆心和半径分别为（　　）

A. $(-3,2)$，2　　B. $(3,-2)$，2

C. $(-3,2)$，4　　D. $(3,-2)$，4

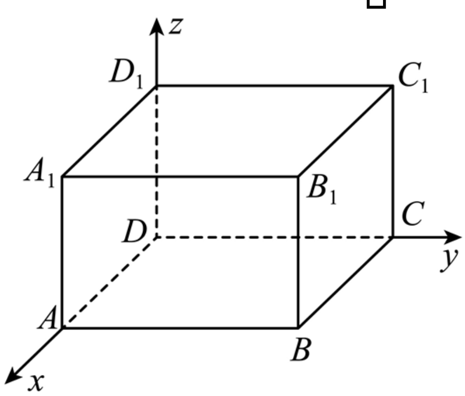
3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到其准线的距离是（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{7}=1(a>0)$ 的离心率 $e=\frac{4}{3}$，那么 a 的值是（　　）

A. 9　　B. 4　　C. 3　　D. 2

5. 如图，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，如果 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(5,4,3)$，那么 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是（　　）



A. $(-5,4,3)$　　B. $(-5,4,3)$

C. $(-4,5,3)$　　D. $(5,4,3)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}$，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 3　　D. 6

7. 已知 A，B，C，D，E 是空间中的五个点，其中点 A，B，C 不共线，则“存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 是“$DE//$ 平面 ABC”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知圆 O_1 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$，圆 O_2 的方程为 $x^2+(y-b+1)^2=$ ，其中 $a,b\in R$. 那么这两个圆的位置关系不可能为（　　）

A. 外离　　B. 外切　　C. 内含　　D. 内切

9. 世界上最早在理论上计算出“十二平均律”的是我国明代杰出的律学家朱载堉，他当时称这种律制为“新法密率”十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它前一个单音的频率的比都相等，且最后一个单音是第一个单音频率的 2 倍.已知第十个单音的频

率 $f_{10}=440\,\mathrm{Hz}$，则与第四个单音的频率 f_4 最接近的是（　　）

A. 880 Hz　　B. 622 Hz　　C. 311 Hz　　D. 220 Hz

10. 若函数 $f(x)=xe^{x}-a$ 恰有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(\frac{4}{e^2},+\infty)$　　B. $(0,\frac{4}{e^2})$　　C. $(0,4e)$　　D. $(0,+\infty)$

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-2n+$ ，则 $a_n=$__________.

12. 若函数 $f(x)=e^{x}$，则 $f'(\ )=$______；曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线的方程是______.

13. 过抛物线 $y^2=6x$ 焦点作直线 l，交抛物线于 A，B 两点.若线段 AB 中点 M 的横坐标为 2，则 $|AB|$ 等于_________.

14. 已知双曲线的一条渐近线方程 $y=2x$，则双曲线的方程可以为__________(写出一个正确答案即可)；此时，你所写的方程对应的双曲线的离心率为__________.

15. 已知直线 $l_1: x-y+2=0$ 与直线 $l_2: x-ay-2=0$，$a\in R$，若 $l_1//l_2$，则 $a=$______；若直线 l_1 与圆心为 C 的圆 $(x-a)^2+(y-1)^2=4$ 相交于 A，B 两点，且 $\triangle ABC$ 为直角三角形，则 $a=$______.

16. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$（$k$ 为常数），那么数列 $\{a_n\}$ 叫做等比差数列，k 叫做公比差.给出下

列四个结论：

①若数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2n$，则该数列是等比差数列；

②数列$\{n\times 2^n\}$是等比差数列；

③所有的等比数列都是等比差数列；

④存在等差数列是等比差数列.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题（共 70 分）

17. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=4$，$a_3+a_4=17$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，再从①$b_{n+1}=2b_n$；②$2b_{n+1}=b_n$；③$b_{n+1}=-b_n$这三个条件中任选一个作为已知，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，侧棱$PA\perp$底面$ABCD$，E是PD的中点，$PA=2, AB=1, AD=2$.

（1）求证：$PB//$平面ACE；

（2）求直线CP与平面ACE所成角的正弦值；

（3）求点P到平面ACE的距离.

19. 已知函数$f(x)=x^3+ax^2-b$在点$(-1, f(-1))$处的切线方程为$3x+y+2=0$.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）求函数$f(x)$在区间$[-1,2]$上的最大值与最小值；

（3）方程$f(x)=m$有三个不同的实根，求实数m的取值范围．

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长是短轴长的 2 倍，焦距是$2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若直线l：$x-my-4=0$与椭圆C交于两个不同点D，E，以线段DE为直径的圆经过原点，求实数m的值；

（3）设 A，B 为椭圆 C 的左、右顶点，H 为椭圆 C 上除 A，B 外任意一点，线段 BH 的垂直平分线分别交直线 BH 和直线 AH 于点 P 和点 Q，分别过点 P 和 Q 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M 和 N，求证：线段 MN 的长为定值.

21. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，且满足对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$，则称这样的数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$，数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P？并说明理由；

（2）若 $a_1=3$，求出具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 公差的所有可能值；

（3）对于给定的 a_1，具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 是有限个，还是可以无穷多个？(直接写出结论)

2022-2023 第一学期高二数学期末考试

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

1. 直线 l 经过 $A(-1,3)$，$B(2,5)$ 两点，那么其斜率 k 为（　　）

A. 2　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

由两点的斜率公式可得答案.

【详解】直线 l 经过 $A(-1,3)$，$B(2,5)$ 两点，则 $k=\frac{5-3}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$

故选：B

2. 已知圆的方程 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$，那么圆心和半径分别为（　　）

A. $(-3,2)$，2　　B. $(3,-2)$，2

C. $(-3,2)$，4　　D. $(3,-2)$，4

【答案】A

【解析】

【分析】

根据圆的标准方程，直接求解.

【详解】由圆的标准方程可知，圆心是 $(-3,2)$，半径 $r=2$.

故选：A

3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到其准线的距离是（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】

由抛物线 $y^2=2p$ 焦点到准线的距离为 p 求解即可.

【详解】因为抛物线$y^2=2p$焦点到准线的距离为p,故抛物线$y^2=4x$的焦点到其准线的距离是2.

故选：C

【点睛】本题主要考查了抛物线的标准方程中p的几何意义,属于基础题型.

4. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{7}=1(a>0)$的离心率$e=\frac{4}{3}$，那么$a$的值是（　　）

A. 9　　B. 4　　C. 3　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】

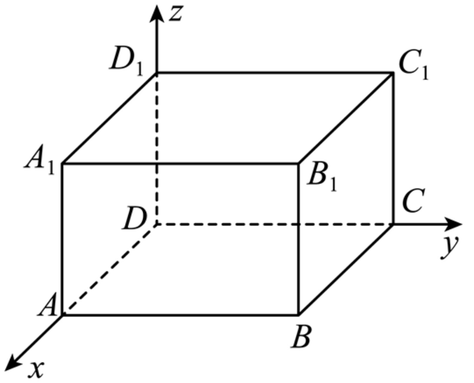
由$e=\frac{4}{3}=\frac{c}{a}$，结合$c^2=a^2+b^2=a^2+7$可得解.

【详解】双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{7}=1(a>0)$中，$c^2=a^2+b^2=a^2+7$，

又$e=\frac{4}{3}=\frac{c}{a}$，所以$\frac{16}{9}a^2=a^2+7$，解得$a=3$.

故选：C.

5. 如图，以长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点D为坐标原点，过D的三条棱所在的直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，如果$\overrightarrow{DB_1}$的坐标为$(5,4,3)$，那么$\overrightarrow{AC_1}$的坐标是（　　）



A. $(-5,4,3)$　　B. $(-5,4,\ 3)$

C. $(-4,5,3)$　　D. $(5,\ 4,\ 3)$

【答案】A

【解析】

【分析】

推导出 $DA=5$，$DC=4$，$DD_1=3$，从而得到 $A(5,0,0)$，$C_1(0,4,3)$，即可求出 $\overrightarrow{AC_1}$

【详解】由题意得：∵ $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(5,4,3)$，

∴ $DA=5$，$DC=4$，$DD_1=3$，

∴ $A(5,0,0)$，$C_1(0,4,3)$

∴ $\overrightarrow{AC_1}=(-5,4,3)$．

故选：A

【点睛】求直线的方向向量的关键：

(1)建立合适的坐标系；

(2)直线的方向向量等于终点坐标减起点坐标．

6. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$，则$a_6$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. 3　　D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】

由题中条件，根据递推公式，逐步计算，即可得出结果.

【详解】因为$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$，所以$a_2=\dfrac{a_1}{1+a_1}=\dfrac{1}{2}$，$a_3=\dfrac{a_2}{1+a_2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，

$a_4=\dfrac{a_3}{1+a_3}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$，$a_5=\dfrac{a_4}{1+a_4}=\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{5}$，$a_6=\dfrac{a_5}{1+a_5}=\dfrac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{6}$.

故选：A.

7. 已知A，B，C，D，E是空间中的五个点，其中点A，B，C不共线，则“存在实数x，y，使得$\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$是 $DE//$ 平面ABC”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow DE//$平面 ABC 或 $DE\subset$平面 ABC，结合充分必要条件的定义即可求解.

【详解】若 $DE//$平面 ABC，则 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面，故存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以必要性成立；

若存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面，则 $DE//$平面 ABC 或 $DE\subset$平面 ABC，所以充分性不成立；

所以“存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$”是“$DE//$平面 ABC”的必要不充分条件，

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题考查空间向量共面的问题，理清存在实数 x，y，使得 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow DE//$平面 ABC 或 $DE\subset$平面 ABC 是解题的关键，属于基础题.

8. 已知圆 O_1 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$，圆 O_2 的方程为 $x^2+(y-b+1)^2=1$，其中 $a,b\in R$. 那么这两个圆的位置关系不可能为（　　）

A. 外离　　B. 外切　　C. 内含　　D. 内切

【答案】C

【解析】

【分析】

求出圆心距 $|O_1O_2|$ 的取值范围，然后利用圆心距与半径的和差关系判断.

【详解】由两圆的标准方程可得 $O_1(a,b)$，$r_1=2$，$O_2(0,b-1)$，$r_2=1$；

则 $|O_1O_2|=\sqrt{a^2+1}\geq 1=r_1-r_2$，所以两圆不可能内含.

故选：C.

9. 世界上最早在理论上计算出“十二平均律”的是我国明代杰出的律学家朱载堉，他当时称这种律制为“新法密率”十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它前一个单音的频率的比都相等，且最后一个单音是第一个单音频率的 2 倍.已知第十个单音的频

率 $f_{10}=440\text{Hz}$，则与第四个单音的频率 f_4 最接近的是（　　）

A. 880 Hz　　　　B. 622 Hz　　　　C. 311 Hz　　　　D. 220 Hz

【答案】C

【解析】

【分析】依题意，每一个单音的频率构成一个等比数列，由 $f_{13}=2f_1$，算出公比 q，结合 $f_{10}=440\text{Hz}$，即可求出 f_4.

【详解】设第一个单音的频率为 f_1，则最后一个单音的频率为 f_{13}，

由题意知 $f_{13}=2f_1$，且每一个单音的频率构成一个等比数列，设公比为 q，

则 $\frac{f_{13}}{f_1}=q^{12}=2$，解得：$q=\sqrt[12]{2}$

又 $f_{10}=440\text{Hz}$，$\therefore f_4=\frac{f_{10}}{q^6}=\frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^6}=\frac{440}{\sqrt{2}}=220\sqrt{2}\approx 220\times 1.414=311.08$

则与第四个单音的频率 f_4 最接近的是 311 Hz，

故选：C

【点睛】关键点点睛：本题考查等比数列通项公式的运算，解题的关键是分析题意将其转化为等比数列的知识，考查学生的计算能力，属于基础题.

10. 若函数 $f(x)=x^2e^x-a$ 恰有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{4}{e^2},+\infty\right)$　　　　B. $\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$　　　　C. $(0,4e^2)$　　　　D. $(0,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】求导函数，求出函数的极值，利用函数 $f(x)=x^2e^x-a$ 恰有三个零点，即可求实数 a 的取值范围.

【详解】函数 $y=x^2e^x$ 的导数为 $y'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$，

令 $y'=0$，则 $x=0$ 或 -2，

$-2<x<0$ 上单调递减，$(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 0 或 -2 是函数 y 的极值点，