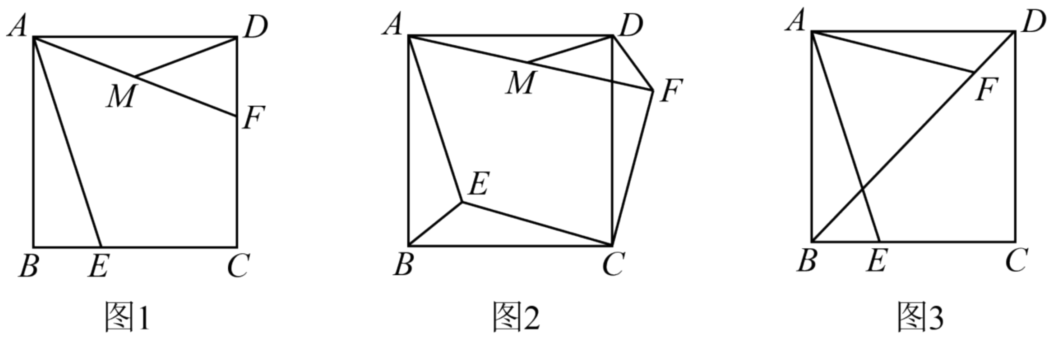
八下期末难点特训（三）与平行四边形有关的压轴题

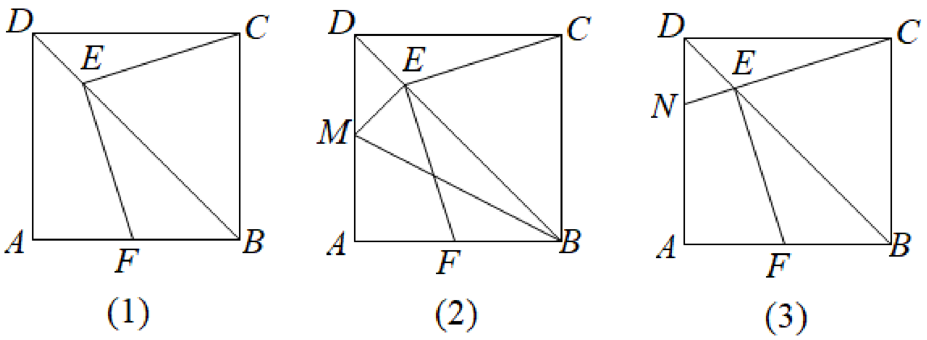
1. （1）问题背景：如图 1，点 E，F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 上，$BE=DF$，M 为 AF 的中点，求证：①$\angle BAE=\angle DAF$；②$AE=2DM$.

（2）变式关联：如图 2，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，点 F 在直线 BC 的上方，$BE=DF$，$BE\perp DF$，M 为 AF 的中点，求证：①$CE\perp CF$；②$AE=2DM$.

（3）拓展应用：如图 3，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 在线段 BC 上，F 在线段 BD 上，$BE=DF$，直接写出 $\left(AE+AF\right)^2$ 的最小值.



2. 已知：正方形 $ABCD$ 中，点 E 在对角线 BD 上，连接 CE，作 $EF\perp CE$ 交 AB 于点 F.



（1）如图（1），求证：$CE=EF$；

（2）如图（2），作 $EM\perp BD$ 交 AD 于点 M，连接 BM，求证：$BM=\sqrt{2}CE$；

（3）如图（3），延长 CE 交 DA 于点 N，若 $BE=7\sqrt{2}$，$AN=6$，则 $CE=$

__________.

3. 已知，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，$AB=6$，E、F 分别为 AD、CD 上一点.

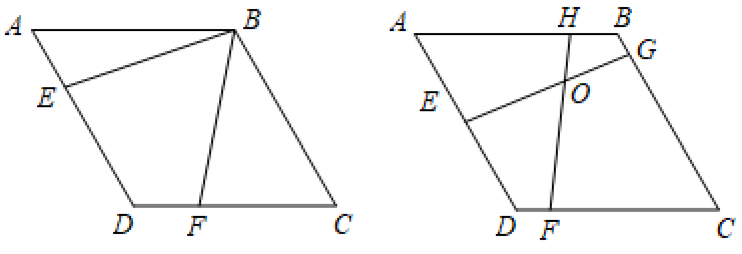


图1　　　　　　图2

（1）如图 1，若 $\angle EBF = 60^{\circ}$，求证：$AE = DF$；

（2）如图 2，E 为 AD 中点，$DF = 1$，线段 EG 交 BC 于 G，FH 交 AB 于 H，$\angle EOF = 60^{\circ}$，若 $BH = x$，$CG = y$．

①求 y 与 x 之间的函数关系式；

②若 $x + y = 6$，则 $HF =$______．

4．（1）问题背景：如图 1，E 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点，过点 C 作 $CB \perp CD$ 交 AB 的延长线于 F 求证：$CE = CF$；

（2）尝试探究：如图 2，在（1）的条件下，连接 DB、EF 交于 M，请探究 DM、BM 与 BF 之间的数量关系，并证明你的结论．

（3）拓展应用：如图 3，在（2）的条件下，DB 和 CE 交于点 N，连接 CM 并延长交 AB 于点 P，已知 $DE = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$，$\angle DME = 15^{\circ}$，直接写出 PB 的长________．

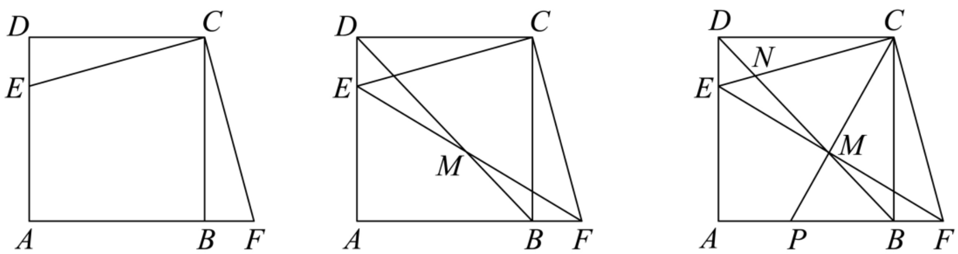


图1　　　　　　图2　　　　　　图3

5．正方形 $ABCD$ 的边长为 4．

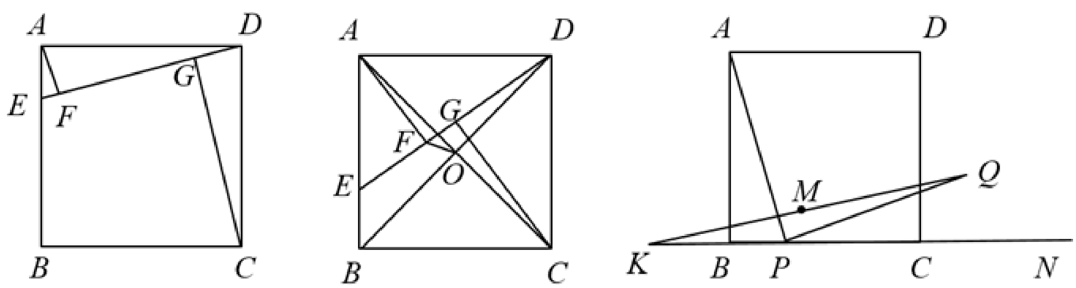


图1　　　　　　图2　　　　　　图3

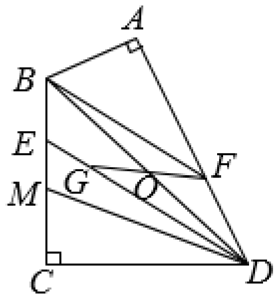
（1）如图 1，点 E 在 AB 上，连接 DE，作 $AF \perp DE$ 于点 F，$CG \perp DE$ 于点 G.

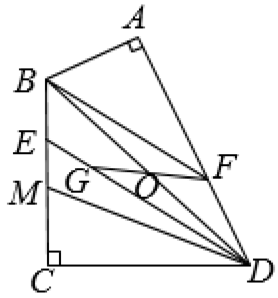
①求证：$DF = CG$；

②如图 2，对角线 AC，BD 交于点 O，连接 OF，若 $AE = 3$，求 OF 的长；

（2）如图 3，点 K 在 CB 的延长线上，$BK = 2$，点 N 在 BC 的延长线上，$CN = 4$，点 P 在 BC 上，连接 AP，在 AP 的右侧作 $PQ \perp AP$，$PQ = AP$，连接 KQ．点 P 从点 B 沿 BN 方向运动，当点 P 运动到 BC 中点时，设 KQ 的中点为 M_1，当点 P 运动到 N 点时，设 KQ 的中点为 M_2，直接写出 M_1M_2 的长为________.

6. 如图，已知四边形 $ABCD$，$\angle A=\angle C=90°$，BD 是四边形 $ABCD$ 的对角线，O 是 BD 的中点，BF 是$\angle ABE$ 的角平分线交 AD 于点 F，DE 是$\angle ADC$ 的角平分线交 BC 于点 E，连接 FO 并延长交 DE 于点 G.





备用图

（1）求$\angle ABC+\angle ADC$ 的度数；

（2）求证：$FO=OG$；

（3）当 $BC=CD$，$\angle BDA=\angle MDC=22.5°$时，求证：$DM=2AB$

7. 如图，已知在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中，$AB = AC$.

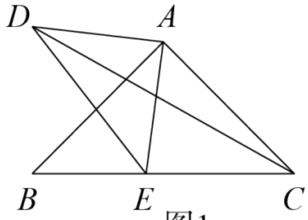


图1

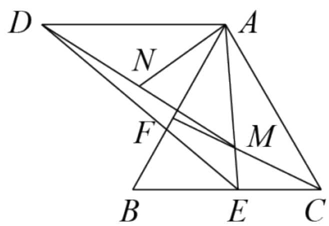


图2

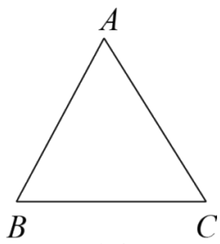


图3

（1）如图 1，若 $\angle BAC = 90°$，$\angle DAE=90°$，$AD = AE$，$AC = 4$，$CE = 3$，连接 CD，求线段 CD 的长；

（2）如图 2，若 $\angle BAC = \angle DAB = 60°$，$AD = AB$，$E$、$F$ 分别为 BC、AB 边上的

动点，CF 与 AE 相交于点 M，$\triangle BCF \cong \triangle CAE$，连接 DM，点 N 是 DM 的中点，证明：$AM + CM = 2AN$；

（3）在（2）的条件下，G 是 AC 的中点，$AC = 1$，连接 GE，H 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，连接 HE、HG，$\triangle HGE$ 和 $\triangle CGE$ 关于直线 GE 成轴对称图形，连接 HD，求 HD 的最小值.

8. 在 $\square ABCD$ 中，对角线 $AC = AB$，且 $AC \perp AB$，E 为 CD 边上一动点，连接 BE 交 AC 于点 F，M 为线段 BE 上一动点，连接 AM.

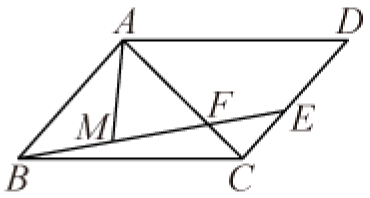


图1

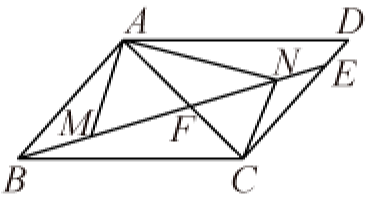


图2

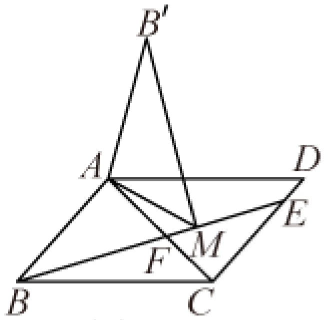


图3

（1）如图 1，若 $AB = 8$，$CF = 2$，M 为 BF 的中点，求 AM 的长；

（2）如图 2，若 M 在线段 BF 上，$\angle AME = 45°$，作 $CN \parallel AM$ 交 BE 于点 N，连接 AN，求证：$AN = AB$；

（3）如图 3，若 M 在线段 EF 上，将△ABM 沿着 AM 翻折至同一平面内，得到 $\triangle AB'M$，点 B 的对应点为点 B'．当 $\angle ABE = 30°$，$\angle BMB' = 90°$ 时，请直接写出 $\dfrac{B'M - EM}{AM}$ 的值.

9. 在菱形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别为 BC、CD 边上的点，连接 AC、AF、EF.

图1

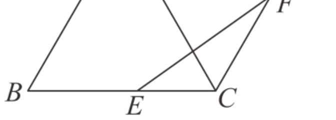


图2

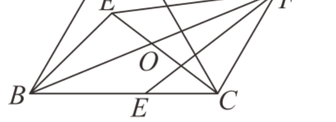


图3

（1）如图 1，EF 与 AC 交于点 G，若 $CE=CF$，$AF=5$，$EF=6$，求 AG 的长；

（2）如图 2，若 $\angle ABC=60^{\circ}$，$\angle DAF=\angle EFC$，求证：$BE=CF$；

（3）如图 3，在（2）的条件下，将 $\triangle BEF$ 沿 BF 翻折至同一平面内，得到 $\triangle BE'F$，连接 CE' 与 BF 交于点 O，记 $\triangle CEF$、$\triangle CE'F$、$\triangle BCF$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，当 O 为 BF 中点时，请直接写出 $\frac{S_3-S_2}{3S_1}$ 的值.

10. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^{\circ}$，E 为对角线 BD 上一动点，连接 AE.

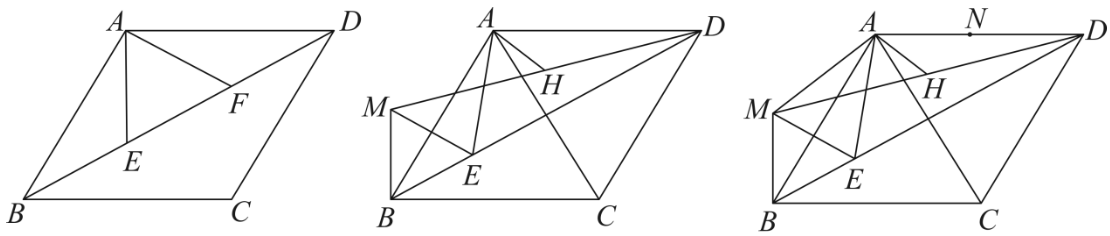


图1　　图2　　备用图

（1）如图 1，点 F 为 DE 的中点，连接 AF，若 $BE=AE$，求 $\angle FAD$ 的度数；

（2）如图 2，$\triangle BEM$ 是等边三角形，连接 DM，H 为 DM 的中点，连接 AH，猜想线段 AH 与 AE 之间的数量关系，并证明.

（3）在（2）的条件下，N 为 AD 的中点，连接 AM，以 AM 为边作等边 $\triangle AMP$，连接 PN，若 $AD=2\sqrt{3}$，直接写出 PN 的最小值.

11. 问题解决：如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在 AB,BC 边上，$DE=AF,DE\perp AF$ 于点 G.

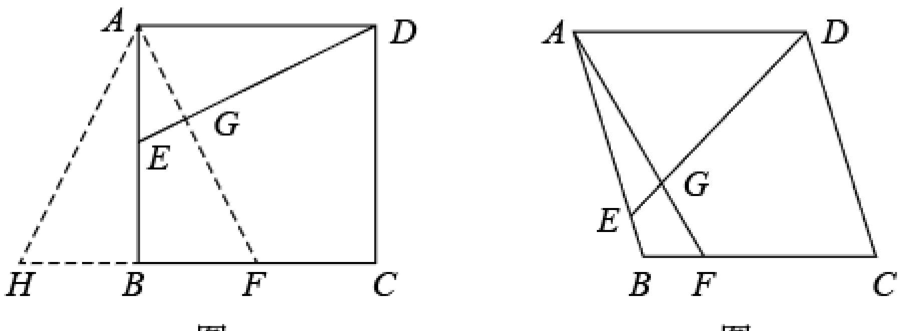


图1　　图2

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；

（2）延长 CB 到点 H，使得 $BH=AE$，判断 $\triangle AHF$ 的形状，并说明理由.

类比迁移：如图 2，在菱形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在 AB,BC 边上，DE 与 AF 相

交于点G，$DE=AF,\angle AED=60°,AE=6,BF=2$，求$DE$的长．

12. 矩形$ABCD$中，将矩形沿AE、AG翻折，点B的对应点为点F，点D的对应点为点Q，A、F、Q三点在同一直线上．

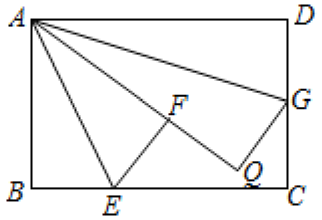


图1

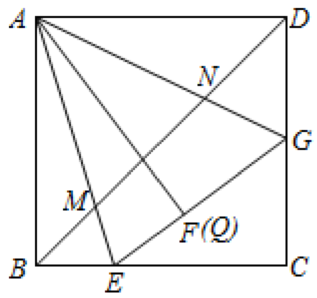


图2

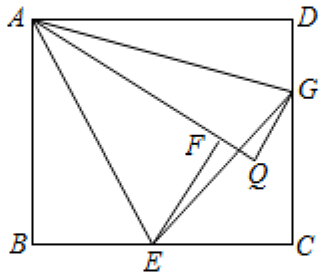


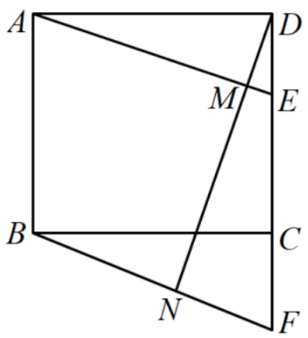
图3

（1）如图1，求$\angle EAG$的度数；

（2）如图2，当$AB=BC$时，连接BD，交AE、AG于点M、N，若$BM=3$，$DN=4$，求MN的长度；

（3）如图3，当$AB=8$，$AD=9$时，连接EG，$\angle GEC=45°$，求BE的长．

13. 如图，正方形$ABCD$中，$AB=6$，点E在CD边上运动（不与点C、D重合）．过点B作AE的平行线交DC的延长线于点F，过点D作AE的垂线DN分别交于AE，BF于点M、N.



（1）求证：四边形$ABFE$是平行四边形；

（2）若$DE=\frac{1}{3}DC$，求线段MN的长；

（3）点E在CD边上运动过程中，$\angle CND$的大小是否改变？若不变，求出该值，若改变请说明理由．

14. （1）如图1，在正方形$ABCD$中，AE，DF相交于点O且$AE\perp DF$．则AE和DF的数量关系为______．

（2）如图2，在正方形$ABCD$中，E，F，G分别是边AD，BC，CD上的点，$BG\perp EF$，垂足为H．求证：$EF=BG$．

（3）如图 3，在正方形 $ABCD$ 中，E，F，M 分别是边 AD，BC，AB 上的点，$AE=2$，$BF=4$，$BM=1$，将正方形沿 EF 折叠，点 M 的对应点与 CD 边上的点 N 重合，求 CN 的长度．

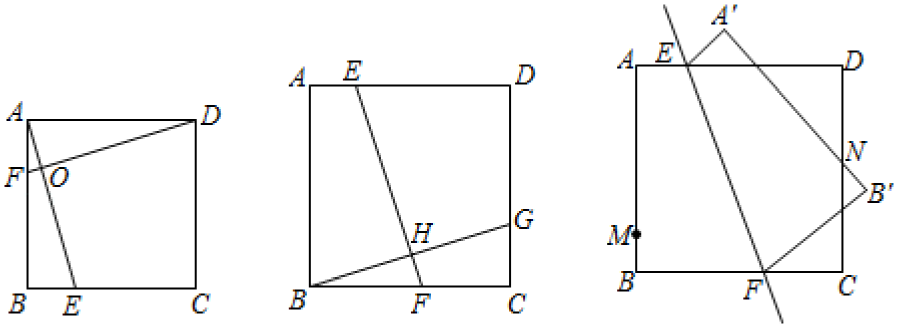
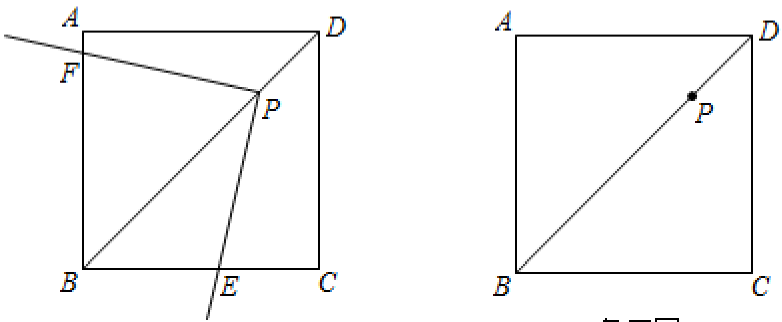


图1　图2　图3

15. 已知：在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 P 为对角线 BD 上一点，且 $BP=4\sqrt{2}$．将三角板的直角顶点与点 P 重合，一条直角边与直线 BC 交于点 E，另一条直角边与射线 BA 交于点 F（点 F 不与点 B 重合），将三角板绕点 P 旋转．



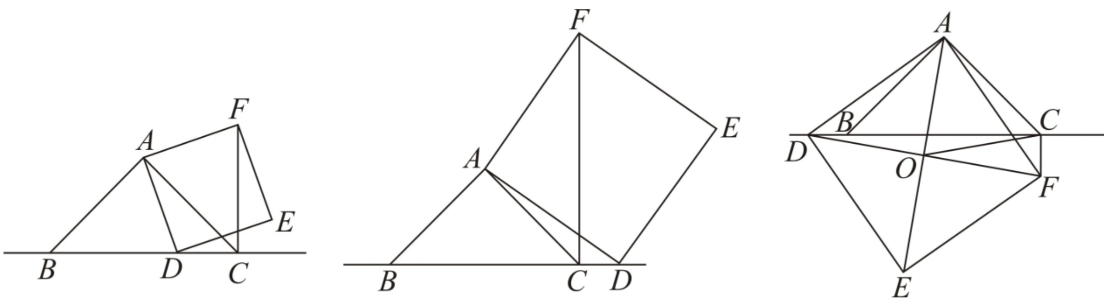
备用图

（1）如图，当点 E、F 在线段 BC、AB 上时，求证：$PE=PF$；

（2）当 $\angle FPB=60°$时，求△ BEP 的面积；

（3）当△ BEP 为等腰三角形时，直接写出线段 BF 的长．

16. 已知：在△ABC 中，∠$BAC=90°$，$AB=AC$，点 D 为直线 BC 上一动点（点 D 不与 B、C 重合）．以 AD 为边作正方形 $ADEF$，连接 CF．



图①　图②　图③

（1）如图①，当点 D 在线段 BC 上时，求证：$CF=BC-CD$．

（2）如图②和③，当点 D 在线段 BC 的延长线上或反向延长线上时，其它条件不变，请判断 CF、BC、CD 三条线段之间的关系，并证明之；

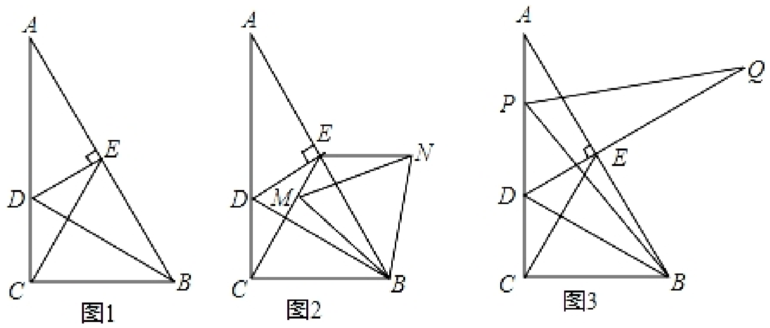
（3）如图③，若连接正方形 $ADEF$ 对角线 AE、DF，交点为 O，连接 OC，探究 $\triangle AOC$ 的形状，并说明理由．

17. 在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，∠A=30°，BD 是△ABC 的角平分线，DE⊥AB 于 E．

（1）如图 1，连接 CE，求证：△BCE 是等边三角形；

（2）如图 2，点 M 为 CE 上一点，连结 BM，作等边△BMN，连接 EN，求证：EN∥BC；

（3）如图 3，点 P 为线段 AD 上一点，连结 BP，作∠BPQ=60°，PQ 交 DE 延长线于 Q，探究线段 PD，DQ 与 AD 之间的数量关系，并证明．



18. 在菱形 ABCD 中，∠BAD=60°．

（1）如图 1，点 E 为线段 AB 的中点，连接 DE，CE，若 AB=4，求线段 EC 的长；

（2）如图 2，M 为线段 AC 上一点（M 不与 A，C 重合），以 AM 为边，构造如图所示等边三角形 AMN，线段 MN 与 AD 交于点 G，连接 NC，DM，Q 为线段 NC 的中点，连接 DQ，MQ，求证：DM=2DQ．

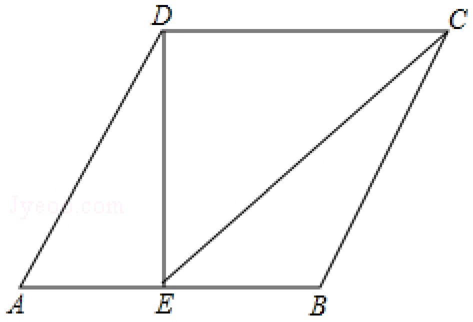


图1

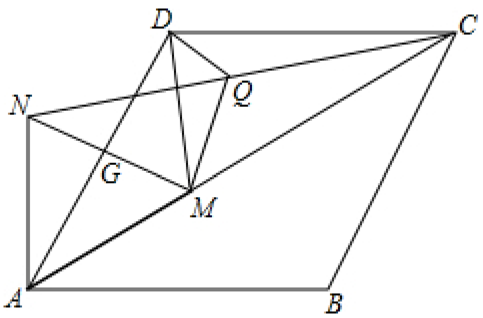


图2

八下期末难点特训（三）与平行四边形有关的压轴题

【1 题答案】

【答案】（1）①见解析；②见解析；（2）①见解析；②见解析；（3）$8+4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）问题情景：①证明△ABE≌△ADF(SAS)，由全等三角形的性质得出∠BAE=∠DAF；②由全等三角形的性质得出 AE=AF，由直角三角形的性质可得出结论；

（2）变式关联：①延长 BE 交 DF 于 G，BG 交 CD 于 H，证明△CBE≌△CDF（SAS），由全等三角形的性质得出∠BCE=∠DCF，则可得出结论；

②延长 DM 到 N，使 DM=MN，连接 AN，证明△AMN≌△FMD(SAS)，由全等三角形的性质得出 AN=DF，证明△ABE≌△DAN(SAS)，由全等三角形的性质得出 AE=DN=2DM；

（3）拓展应用：过点 D 作 DP⊥DF，且使 PD=AB，连接 PF，PA，过点 P 作 PQ⊥AD，交 AD 的延长线于点 Q，证明△ABE≌△PDF(SAS)，由全等三角形的性质得出 AE=PF，AF+AE=AF+PF≥AP，即当 A，F，P 三点共线时，AE+AF 的最小值为 AP，求出 AP^2 则可得出答案．

【详解】解：（1）问题情景：

①证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴AB=AD，∠ABE=∠ADF=90°，

∵BE=DF，

∴△ABE≌△ADF(SAS)，

∴∠BAE=∠DAF；

②证明：∵△ABE≌△ADF，

∴AE=AF，

∵M 为 AF 的中点，

∴DM=$\frac{1}{2}AF$，

∴AE=AF=2DM；

（2）变式关联：

①证明：延长 BE 交 DF 于 G，BG 交 CD 于 H，

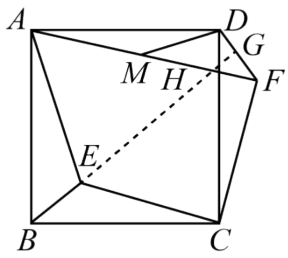


图2-①

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$\angle BCD=90^\circ$，$CD=CB$，

∵$BE\perp DF$，

∴$\angle BGD=\angle BCD=90^\circ$，

∵$\angle BHD=\angle CBE+\angle BCD$，$\angle BHD=\angle BGD+\angle CDF$，

∴$\angle CBE+\angle BCD=\angle BGD+\angle CDF$，

∴$\angle CBE=\angle CDF$，

又∵$BE=DF$，

∴$\triangle CBE\cong\triangle CDF(\mathrm{SAS})$，

∴$\angle BCE=\angle DCF$，

∵$\angle BCD=90^\circ$，

∴$\angle ECF=\angle ECD+\angle DCF=\angle ECD+\angle BCE=90^\circ$，

∴$CE\perp CF$；

②延长 DM 到 N，使 $DM=MN$，连接 AN，

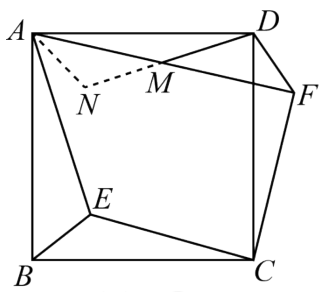


图2-②

∵M 为 AF 的中点，

∴$AM=MF$，

∵$MD=MN$，$\angle AMN=\angle FMD$，

∴$\triangle AMN\cong\triangle FMD(\mathrm{SAS})$，

∴$AN=DF$，

∵$\triangle CBE\cong\triangle CDF$，

∴$BE=DF=AN$，$\angle NAM=\angle DFM$，

∴$AN\parallel DF$，

∴$\angle DAN+\angle ADF=180°$，

∵四边形$ABCD$为正方形，

∴$\angle BAD=90°$，$AB=DA$，

∵$\angle BGD=90°$，

∴$\angle ABE+\angle ADF=180°$，

∴$\angle ABE=\angle DAN$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle DAN$(SAS)，

∴$AE=DN=2DM$；

（3）拓展应用：

过点D作$DP\perp DF$，且使$PD=AB$，连接PF，PA，过点P作$PQ\perp AD$，交AD的延长线于点Q，

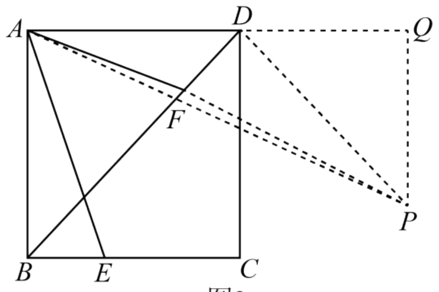


图3

∴$\triangle ABE\cong\triangle PDF$(SAS)，

∴$AE=PF$，

∵$\angle ADB=45°$，

∴$\angle PDQ=45°$，$DQ=PQ$，

∴$AF+AE=AF+PF\geq AP$，

即当A，F，P三点共线时，$AE+AF$的最小值为AP，

∵$AD=AB=DP=2$，

∴$PQ=DQ=\sqrt{2}$，

∴ $AP^2=AQ^2+QP^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{2}$，

∴$\left(AE+AF\right)^2$的最小值为$8+4\sqrt{2}$.

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

【2 题答案】

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

（3）$2\sqrt{14}$

【解析】

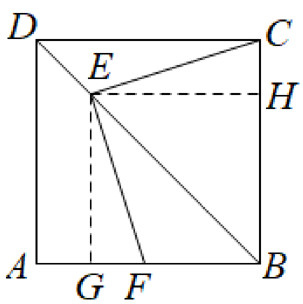
【分析】（1）过点 E 作 $EH\perp BC$ 于 H，$EG\perp AB$ 于 G，由“ASA”可证$\triangle ECH=\triangle EFG$，可得 $CE=EF$；

（2）过点 E 作 $EH\perp BC$ 于 H，交 AD 于 Q，$EG\perp AB$ 于 G，交 CD 于 P，由正方形的性质和矩形的性质可证$\triangle CEF$是等腰直角三角形，从而得到$CF=\sqrt{2}CE$，再证得四边形 $AGPD$ 是矩形，四边形 $DQHC$ 是矩形，四边形 $DQEP$ 是矩形，从而得到 $DQ=QM=GF=AG$，由“SAS”可证$\triangle ABM\cong\triangle BCF$，可得 $BM=CF$，可得结论；

（3）过点 E 作 $GE\perp AB$ 于点 G，$EQ\perp AD$ 于点 Q，可得$\triangle EGB$是等腰直角三角形，进而得到 $BG=EG=7$，再根据四边形 $AGEQ$ 是矩形，可得 $AQ=EG=7$，从而得到 $QN=1$，再由勾股定理列出方程可求 EF 的长.

【小问 1 详解】

证明：如图，过点 E 作 $EH\perp BC$ 于 H，$EG\perp AB$ 于 G，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ABD=\angle CBD=45°$，

∵$EG\perp AB$，$EH\perp BC$，$\angle ABC=90°$，

∴四边形 $FGBH$ 是正方形，

$\therefore GE=EH$，$\angle GEH=90°$，

$\therefore \angle CEF=\angle GEH=90°$，

$\therefore \angle CEH=\angle GEF=90°-\angle HEF$，

在$\triangle ECH$和$\triangle EFG$中，

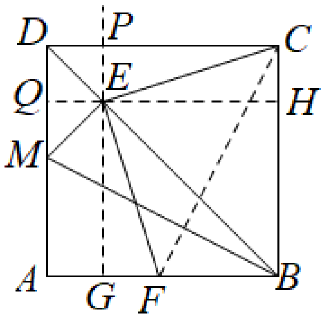
$\because \angle CEH=\angle GEF$，$EH=EG$，$\angle EHC=\angle EGF=90°$，

$\therefore \triangle ECH\cong\triangle EFG$（ASA），

$\therefore CE=EF$；

【小问 2 详解】

证明：如图，过点E作$EH\perp BC$于H，交AD于Q，$EG\perp AB$于G，交CD于P，



$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD\parallel BC$，$CD\parallel AB$，

$\therefore PG\perp CD$，$QH\perp AD$，

$\because CE=EF$，$CE\perp EF$，

$\therefore \triangle CEF$是等腰直角三角形，

$\therefore CF=\sqrt{2}CE$，

$\because PG\perp AB$，$QH\perp AD$，

$\therefore \angle A=\angle ADC=\angle DCB=\angle ABC=90°$，

$\therefore$四边形$AGPD$是矩形，四边形$DQHC$是矩形，四边形$DQEP$是矩形，

$\therefore DQ=CH$，$DP=AG$，

$\because \angle ADB=\angle CDB=45°$，$EQ\perp AD$，$EP\perp CD$，

$\therefore EP=EQ$，

$\therefore$四边形$DPEQ$是正方形，

$\therefore DQ=DP=PE=QE=CH=AG$，

∵$\triangle ECH\cong\triangle EFG$，

∴$GF=CH=DQ$，

∵$ME\perp BD$，$\angle ADB=45°$，

∴$\triangle DEM$是等腰直角三角形，

∵$EQ\perp AD$，

∴$DQ=QM$，

∴$DQ=QM=GF=AG$，

∴$DM=AF$，

∵$AD=AB$，

∴$AM=BF$，

又∵$AB=BC$，$\angle A=\angle CBF=90°$，

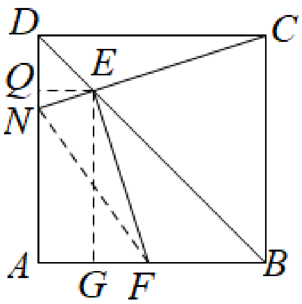
∴$\triangle ABM\cong\triangle BCF$（SAS），

∴$BM=CF$，

∴ $BM=\sqrt{2}CE$；

【小问 3 详解】

解：如图，过点E作$GE\perp AB$于点G，$EQ\perp AD$于点Q，



由（2）得：$AG=GF=QE$，

∵$EG\perp AB$，$\angle ABD=45°$，

∴$\triangle EGB$是等腰直角三角形，

∵ $BE=7\sqrt{2}$，

∴$BG=EG=7$，

∵$EQ\perp AD$，$EG\perp AB$，$\angle A=90°$，

∴四边形$AGEQ$是矩形，

∴$AQ=EG=7$，

∵AN=6，

∴QN=1，

∵ $NF^2=EN^2+EF^2=AN^2+AF^2$， $EN^2=QE^2+QN^2$， $EF^2=EG^2+GF^2$，

∴ $36+4GF^2=GF^2+1+49+GF^2$，

∴ $GF^2=7$，

∴ $EF^2=49+7=56$，

∴ $EF=2\sqrt{14}=CE$.

故答案为：$2\sqrt{14}$.

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，矩形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

【3 题答案】

【答案】（1）证明见解析

（2）①$y=x+4$；②$2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）连接 DB，由菱形的性质得出∠ABD=∠BDC=60°，$\angle A=\angle C=60°$，证出△ABD 为等边三角形，AB=BD，证明△ABE≌△DBF（ASA），由全等三角形的性质可得出结论；

（2）①过点 B 作 $BM\parallel EG, BN\parallel HF$ 交 EG 于点 I，证明四边形 $BMEG$ 为平行四边形，由平行四边形的性质得出 BG=EM=6-y，得出 AM=y-3，同理 DN=1+x，由（1）得 AM=DN，得出 y-3=x+1，则可得出答案；②过点 D 作 DM⊥AB 于点 M，过点 F 作 FN⊥AB 于点 N，由题意求出 x=1，y=5，得出 BH=1，CG=5，由直角三角形的性质求出 AM=3，由勾股定理求出答案即可.

【小问 1 详解】

证明：如图 1，连接 DB，

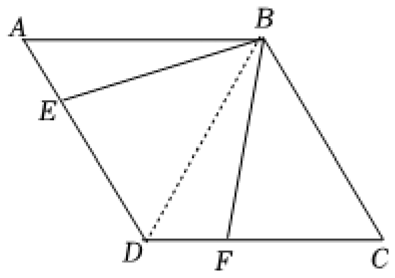


图1

∵四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC$=120°，

∴$\angle ABD=\angle BDC$=60°，$AB \parallel CD, AD \parallel BC$,

$\therefore \angle A=\angle C=60°$,

∴$\triangle ABD$ 为等边三角形，

∴$AB=BD$，

∵$\angle EBF$=60°，

∴$\angle ABE=\angle DBF$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle DBF$ 中，$\begin{cases}\angle ABE=\angle DBF\\ AB=BD\\ \angle A=\angle BDF\end{cases}$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle DBF$（$ASA$），

∴$AE=DF$；

【小问 2 详解】

解：①如图 2，过点 B 作 $BM \parallel EG, BN \parallel HF$ 交 EG 于点 I,

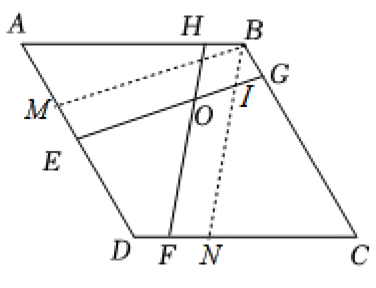


图2

∵ $AD \parallel BC, BM \parallel EG$,

∴四边形 $BMEG$ 为平行四边形，而 $AB=BC=CD=AD=6, CG=y, BH=x$,

∴$BG=EM$=6-y，

∵ E 是 AD 的中点，

$\therefore AE=DE=3$,

∴$AM=y-3$， 同理 $DN=1+x$，

∵ $BN \parallel HF$，

∴$\angle EOF=\angle EIN=60°$，

∵ $BM \parallel EG$，

∴$\angle MBN=\angle EIN=60°$，

由（1）得，$AM=DN$，

∴$y-3=x+1$，

∴$y=x+4$；

②如图 3，过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，过点 F 作 $FN\perp AB$ 于点 N，

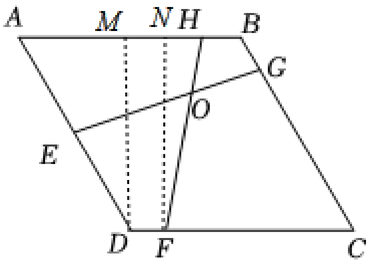


图3

由①知 $y=x+4$，

又∵$x+y=6$，

∴$x=1$，$y=5$，

∴$BH=1$，$CG=5$，

∵$DM\perp AB$， $AB \parallel CD$，

∴$DM\perp CD$，

∴四边形 $MDFN$ 为矩形，

∴$DM=NF$，$DF=MN=1$，

∵ $\angle A=60°$，$AD=6$，

∴$AM=\frac{1}{2}AD=3$，

$\therefore DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=3\sqrt{3}$，

∵$AB=6$，

∴$NH=AB-AM-MN-BH=6-3-1-1=1$，

$\therefore HF=\sqrt{NF^2+NH^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，

故答案为：$2\sqrt{7}$.

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了菱形的性质，矩形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，二次根式的化简等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的性质.

【4 题答案】

【答案】（1）证明见解析；（2）$DM=BM+\sqrt{2}BF$；（3）$\sqrt{6}+\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）由“ASA”可证$\triangle CDE\cong\triangle CBF$，可得$CE=CF$；

（2）由“AAS”可证$\triangle DME\cong\triangle HMF$，可得$DM=MH$，可得结论；

（3）由直角三角形的性质可得$AF=\sqrt{3}AE$，可求AB的长，由勾股定理可求PF的长，即可求解.

【详解】（1）证明：在正方形$ABCD$中，$DC=BC$，$\angle D=\angle ABC=\angle DCB=90°$，

$\therefore\angle CBF=180°-\angle ABC=90°$，

$\because CF\perp CE$，

$\therefore\angle ECF=90°$，

$\therefore\angle DCB=\angle ECF=90°$，

$\therefore\angle DCE=\angle BCF$，

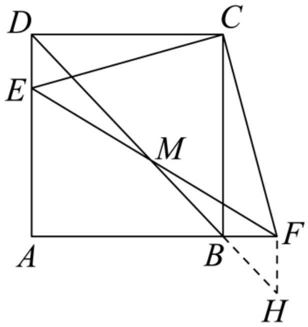
在$\triangle CDE$和$\triangle CBF$中，$\begin{cases}\angle D=\angle CBF\\ DC=BC\\ \angle DCE=\angle BCF\end{cases}$

$\therefore\triangle CDE\cong\triangle CBF$（ASA），

$\therefore CE=CF$；

（2）$DM=BM+\sqrt{2}BF$，理由如下：

如图，过点F作$FH\perp AF$，交DB的延长线于H，



∵△CDE≌△CBF，

∴DE＝BF，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴∠ABD＝∠CBD＝45°，

∴∠FBH＝45°，

∵$FH\perp AB$，

∴∠FBH＝∠H＝45°，

∴BF＝FH＝DE，

∴$BH=\sqrt{2}BF$，

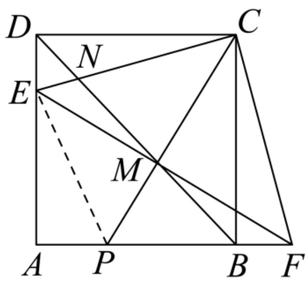
∵∠EDM＝∠H＝45°，∠EMD＝∠HMF，DE＝FH，

∴△DME≌△HMF（AAS），

∴DM＝MH，EM＝MF，

∴$DM=MB+BH=MB+\sqrt{2}BF$；

（3）连接 EP，



∵∠DME＝15°，∠ABD＝45°，

∴∠AFE＝30°，

∴$AF=\sqrt{3}AE$，

∴$AB+BF=\sqrt{3}$（$AB-DE$），

$\therefore AB+3\sqrt{2}-\sqrt{6}=\sqrt{3}AB-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$,

$\therefore AB=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$,

$\therefore AE=2\sqrt{6}$，$AF=6\sqrt{2}$,

$\because EC=CF$，$\angle ECF=90°$，$EM=MF$，

$\therefore CP$ 是 EF 的垂直平分线，

$\therefore EP=PF$，

$\because PE^2=AE^2+AP^2$，

$\therefore PF^2=24+(6\sqrt{2}-PF)^2$，

$\therefore PF=4\sqrt{2}$,

$\therefore PB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,

故答案为：$\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

【点睛】本题是四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

【5 题答案】

【答案】（1）①见解析；② $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

（2）$3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）①证明$\triangle ADF\cong\triangle DCG$，即可求证；②连接 OG，由①得：$\triangle ADF\cong\triangle DCG$，可得 $AF=DG$，可证得$\triangle AOF\cong\triangle DOG$，从而得到 $OG=OF$，$\angle DOG=\angle AOF$，进而得到$\triangle FOG$ 为等腰直角三角形，可得到$OF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}FG$，再由$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AE\times AD=\dfrac{1}{2}AF\times DE$，求出$DG=AF=\dfrac{12}{5}$，从而得到$DF=\dfrac{16}{5}$，进而得到 $FG=\dfrac{4}{5}$，即可求解；

（2）取 CK 的中点 Y，连接 MY，CQ，可得$YM=\dfrac{1}{2}CQ$，从而得到点 M 的运动轨迹为线段 YM，然后分别计算出当点 P 运动到 BC 中点时，当点 P 运动到 N 点时，

YM_1，YM_2的长， 即可求解．

【小问 1 详解】

①证明：在正方形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle DAB=\angle ADC=90°$，

$\therefore\angle ADF+\angle CDG=90°$，

$\because AF\perp DE$， $CG\perp DE$，

$\therefore\angle AFD=\angle CGD=90°$，

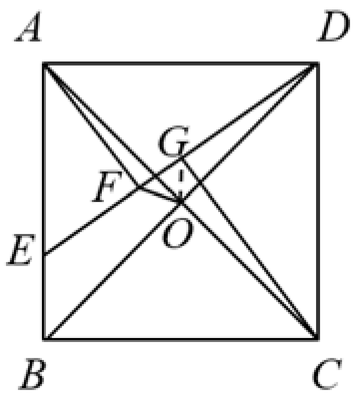
$\therefore\angle ADF+\angle DAF=90°$，

$\therefore\angle DAF=\angle CDG$，

$\therefore\triangle ADF\cong\triangle DCG$，

$\therefore DF=CG$；

②解：如图，连接 OG，



在正方形 $ABCD$ 中，$OA=OD$，$\angle BAO=\angle ADO=45°$，$\angle AOD=\angle BAD=90°$，

$\therefore\angle DAF+\angle EAF=90°$，$\angle EAF+\angle OAF=\angle ODG+\angle ADF=45°$，

由①得：$\triangle ADF\cong\triangle DCG$，

$\therefore AF=DG$，

$\because AF\perp DE$，

$\therefore\angle AFD=90°$，

$\therefore\angle ADF+\angle DAF=90°$，

$\therefore\angle ADF=\angle EAF$，

$\therefore\angle OAF=\angle ODG$，

在$\triangle AOF$和$\triangle DOG$中，

$\because AF=DG$，$\angle OAF=\angle ODG$，$OA=OD$，

$\therefore\triangle AOF\cong\triangle DOG$，

∴$OG=OF$，$\angle DOG=\angle AOF$，

∴$\angle FOG=\angle AOF+\angle AOG=\angle DOG+\angle AOG=\angle AOD=90°$，

∴$\triangle FOG$为等腰直角三角形，

$\therefore FG=\sqrt{OF^2+OG^2}=\sqrt{2}OF$，

$\therefore OF=\frac{\sqrt{2}}{2}FG$，

在$Rt\triangle AED$中，$AD=4$，$AE=3$，$\angle DAE=90°$，

$\therefore DE=5$，

∵$AF\perp DE$，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\times AD=\frac{1}{2}AF\times DE$，

$\therefore DG=AF=\frac{12}{5}$，

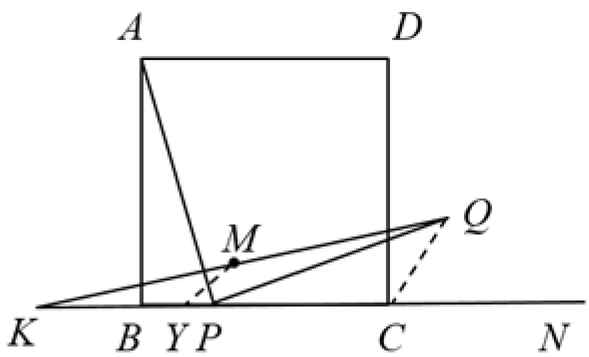
$\therefore DF=\frac{16}{5}$，

∴$FG=DF-DG=\frac{4}{5}$，

$\therefore OF=\frac{\sqrt{2}}{2}FG=\frac{2\sqrt{2}}{5}$；

【小问2详解】

解：如图，取CK的中点Y，连接MY，CQ，

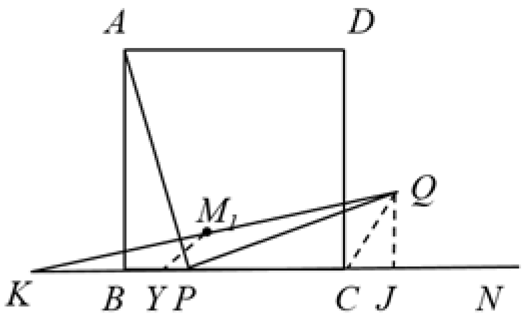


∵点M为KQ的中点，

$\therefore YM=\frac{1}{2}CQ$，$YM// CQ$，

∴点M的运动轨迹为线段YM，

如图，当点P运动到BC中点，即$BP=CP=2$时，过点Q作$QJ\perp CN$于点J，



在正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，

$\therefore\angle BAP+\angle APB=90°$，

$\because AP\perp PQ$，

$\therefore\angle APQ=90°$，

$\therefore\angle APB+\angle QPJ=90°$，

$\therefore\angle BAP=\angle QPJ$，

$\because\angle PJQ=\angle ABP=90°$，$AP=PQ$，

$\therefore\triangle ABP\cong\triangle PJQ$，

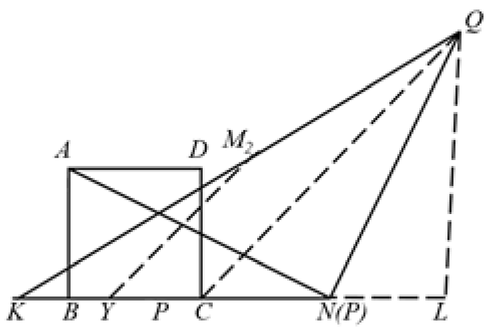
$\therefore QJ=BP=2$，$PJ=AB=4$，

$\therefore CJ=2$，

$\therefore CQ=\sqrt{CJ^2+QJ^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore YM_1=\sqrt{2}$，

如图，当点 P 运动到 N 点，即 $BP=BC+CN=8$ 时，过点 Q 作 $QL\perp CN$ 交 CN 延长线于点 L，



同理：$\triangle ABP\cong\triangle PLQ$，

$\therefore QL=BP=8$，$PL=AB=4$，

$\therefore CL=8$，

$\therefore CQ=\sqrt{CL^2+QL^2}=8\sqrt{2}$，

$\therefore YM_2=4\sqrt{2}$，

$\therefore M_1M_2$的长为$YM_2-YM_1=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$．

故答案为：$3\sqrt{2}$

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定和性质，正方形的性质，三角形中位线定理，勾股定理等知识，熟练掌握全等三角形的判定和性质，正方形的性质，三角形中位线定理，勾股定理等知识是解题的关键．

【6 题答案】

【答案】（1）180°

（2）见解析　　（3）见解析

【解析】

【分析】（1）在四边形 *ABCD* 中，内角和为 360°，因为∠*A*＝∠*C*＝90°，所以∠*ABC*+∠*ADC*＝180°；

（2）由（1）可知，∠*ABF*+∠*CBF*+∠*ADE*+∠*CDE*＝180°，根据 *BF*、*DE* 分别是∠*ABE*、∠*ADC* 的角平分线，得到∠*ABF*+∠*ADE*＝90°，由∠*ABF*+∠*AFB*＝90°，得∠*ADE*＝∠*AFB*，求出 *BF*∥*ED*，所以∠*BFG*＝∠*FGD*，得证$\Delta BFO\cong\Delta DOG$，由此得出结论；

（3）证法一：过 *D* 点作 *CD* 的垂线，延长 *BA* 相交于点 *N*，过 *B* 点作 *BK* 垂直 *DN*，易证$\Delta BCD\cong\Delta BKD$，所以 *BK*＝*CD*，可证$\Delta BAD\cong\Delta NAD$，所以$NB=2AB$，由$\angle ABK=\angle KDA=\angle MDC=22.5^\circ$，可证$\Delta BKN\cong\Delta MCD$，所以$MD=BN=2AB$；

证法二：延长 *DM*，延长 *DC*，过 *B* 点作 *MD* 的垂线，垂足为 *N*，交 *DC* 的延长线于点 *L*，可得$\Delta BAD\cong\Delta BND$，所以$AB=NB$，再由$\Delta LND\cong\Delta BND$得$NB=NL$，所以$BL=2AB$，易证$\angle LBC=\angle MDC$，则$\Delta LCB\cong\Delta MCD$，所以$BL=MD=2AB$．

【小问 1 详解】

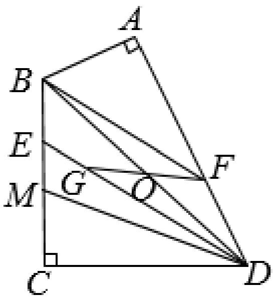
解：∵四边形 *ABCD* 的内角和为 360°，

∠*A*＝∠*C*＝90°，

∴$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

【小问 2 详解】

证明：由（1）可知，$\angle ABF+\angle CBF+\angle ADE+\angle CDE=180°$，



∵BF、DE 分别是$\angle ABE$、$\angle ADC$ 的角平分线

∴$\angle ABF=\angle CBF$；$\angle ADE=\angle CDE$，

∴$2\angle ABF+2\angle ADE=180°$，

∴$\angle ABF+\angle ADE=90°$，

又∵$\angle ABF+\angle AFB=90°$，

∴$\angle ADE=\angle AFB$，

∴$BF\parallel ED$，

∴$\angle BFG=\angle FGD$.

在ΔBFO 和ΔDOG 中

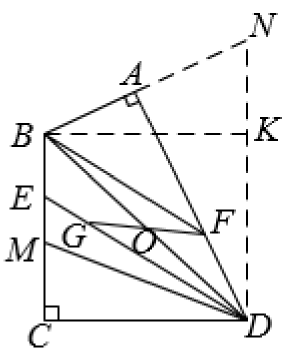
$$\begin{cases}\angle BFO=\angle DGO\\ BO=OD\\ \angle BOF=\angle DOG\end{cases},$$

∴$\Delta BFO\cong\Delta DOG$，

∴$OF=OG$；

【小问 3 详解】

证法一：过 D 点作 CD 的垂线，延长 BA 相交于点 N，过 B 点作 BK 垂直 DN，



∴四边形 $BCDK$ 是矩形，

∵$BC=CD$，

∴四边形 $BCDK$ 是正方形，

∴ $\Delta BCD \cong \Delta BKD$，

∴$BK=CD$，

∵ $\angle BDA=\angle MDC=22.5°$，$\angle BDK=45°$，

∴ $\angle ADN=22.5°=\angle BDA$，

在△BAD 和△NAD 中

$$\begin{cases}\angle \mathrm{ADB}=\angle ADN \\ AD=AD \\ \angle BAD=\angle NAD\end{cases}$$

∴ $\Delta BAD \cong \Delta NAD$ （ASA）

∴ $NB=2AB$，

∵ $\angle ABK=\angle KDA=\angle MDC=22.5°$，

在△BKN 和△MCD 中

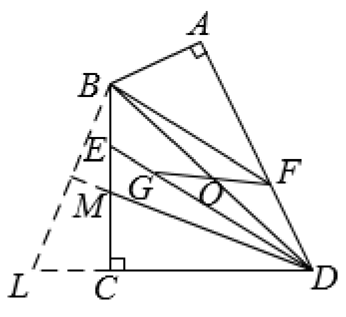
$$\begin{cases}\angle ABK=\angle MDC=22.5° \\ BK=CD \\ \angle BKN=\angle MCD\end{cases}$$

∴ $\Delta BKN \cong \Delta MCD$（$ASA$）

∴ $MD=BN=2AB$；

解法二：

延长 DM，延长 DC，过 B 点作 MD 的垂线，垂足为 N，交 DC 的延长线于点 L.



∵$BC=CD$，$\angle BCD=90°$，

∴$\angle CBD=\angle BDC=45°$，

∵$\angle BDA=\angle MDC=22.5°$，

$\therefore \angle BDM = 22.5°$，

在$\triangle BAD$和$\triangle BND$中

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle BDN \\ BD = BD \\ \angle BAD = \angle BND \end{cases},$$

$\therefore \Delta BAD \cong \Delta BND$（$ASA$），

$\therefore AB = NB$，

在$\triangle LND$和$\triangle BND$中

$$\begin{cases} \angle BND = \angle LDN = 90° \\ ND = ND \\ \angle BDN = \angle LDN \end{cases},$$

$\therefore \Delta LND \cong \Delta BND$（$ASA$），

$\therefore NB = NL$，

$\therefore BL = 2AB$，

$\therefore \angle LBC = \angle MDC$，

在$\triangle LCB$和$\triangle MCD$中

$$\begin{cases} \angle BCL = \angle BCD \\ BC = CD \\ \angle LBC = \angle MDC \end{cases},$$

$\therefore \Delta LCB \cong \Delta MCD$（$ASA$），

$\therefore BL = MD = 2AB$.

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，正方形的性质与判定，第（2）问作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

【7 题答案】

【答案】（1）$\sqrt{41}$

（2）证明见解析　　（3）$\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）先证明$\angle ABC = \angle ACB = 45°$，$\angle BAD = \angle CAE$，再证明$\triangle BAD \cong \triangle CAE$，得到$\angle ABD = \angle ACE = 45°$，$BD = CE = 3$，则$\angle CBD = 90°$，求出

$BC=4\sqrt{2}$，即可利用勾股定理求出$CD=\sqrt{41}$；

（2）如图所示，延长DA到Q使得$AD=AQ$，延长ME到H使得$MH=MC$，连接QM,QC,CH，先求出$\angle CAQ=60°$，再由已知条件得到

$AD=AB=AC=AQ$，即可证明$\triangle ABC,\triangle ACQ$都是等边三角形，得到

$\angle ACB=\angle ACQ=60°, CQ=AC$，由全等三角形的性质得到$\angle CAE=\angle BCF$

，即可证明$\angle CMH=60°$，推出$\triangle MCH$是等边三角形，则

$CM=HM=CH, \angle MCH=60°$，证明$\triangle QCM\cong\triangle ACH$得到$QM=AH$，再证明$AN$是

$\triangle DMQ$的中位线，得到$QM=2AN$，即可证明$AM+CM=2AN$；

（3）如图所示，连接AH,CH，DH,DG，根据轴对称的性质得到$CG=HG$，则$AG=CG=HG=\frac{1}{2}$，由三角形三边的关系得到$HD\le DG-HG$，则当

D、G、H三点共线时，HD最小，最小值为$DG-\frac{1}{2}$，过点G作$GT\perp AD$交DA

延长线于T，求出$AT=\frac{1}{4}$，$TG=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$DT=\frac{5}{4}$，即可求出$DG=\frac{\sqrt{7}}{2}$，则

$HD_{最小值}=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{1}{2}$.

【小问 1 详解】

解：如图所示，连接BD，

$\because\angle BAC=90°$，$\angle DAE=90°$，$AB=AC$，

$\therefore\angle BAC-\angle BAE=\angle DAE-\angle BAE$，$\angle ABC=\angle ACB=45°$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAE$，

又$\because AD=AE$，

$\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE(\text{SAS})$，

$\therefore\angle ABD=\angle ACE=45°$，$BD=CE=3$，

$\therefore\angle CBD=90°$，

$\because AC=4$，