第 21 讲数列求和

一、单选题

1.（2021·山东·嘉祥县第一中学高三期中）在进行$1+2+3+\cdots+100$的求和运算时，德国大数学家高斯提出了倒序相加法的原理，该原理基于所给数据前后对应项的和呈现一定的规律生成，因此，此方法也称之为高斯算法．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\frac{n}{2m+4042}(n,m\in N^*)$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{m+2020}=$（　　）

A．$\frac{m}{2}+505$　　B．$\frac{m}{4}+505$

C．$m+505$　　D．$2m+505$

【答案】B

【分析】

利用倒序相加法得到$2S=\frac{m+2020}{2}$，得到答案.

【详解】

依题意，记$S=a_1+a_2+\cdots+a_{m+2020}$，

则$S=\frac{1}{2m+4042}+\frac{2}{2m+4042}+\cdots+\frac{m+2019}{2m+4042}+\frac{m+2020}{2m+4042}$，

又$S=\frac{m+2020}{2m+4042}+\frac{m+2019}{2m+4042}+\cdots+\frac{2}{2m+4042}+\frac{1}{2m+4042}$，两式相加可得

$2S=\frac{m+2021}{2m+4042}+\frac{m+2021}{2m+4042}+\cdots+\frac{m+2021}{2m+4042}+\frac{m+2021}{2m+4042}+\frac{m+2020}{2}$，

则$S=\frac{m+2020}{4}+\frac{m}{4}+505$.

故选：B.

2.（2021·全国·高二课时练习）已知函数$f(x)=\frac{2}{1+x^2}(x\in R)$，若等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_{2020}=1$，则$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2020})=$（　　）.

A．2020　　B．$\frac{2020}{2}$　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】A

【分析】

由函数解析式可知，$f(x)+f(\frac{1}{x})=2$，

而根据等比数列的性质$a_1a_{2020}=a_2a_{2019}=a_3a_{2018}=\cdots=a_{2020}a_1=1$恰好满足两两互为倒数.因此可以利用函数特征代入，利用倒序求和解决求和问题

【详解】

∵ $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$ $(x\in R)$，∴ $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2x^2}{x^2+1}=2$.

∵数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1a_{2020}=1$，∴ $a_1a_{2020}=a_2a_{2019}=a_3a_{2018}=\cdots=a_{2020}a_1=1$.

∴ $f(a_1)+f(a_{2020})=f(a_2)+f(a_{2019})=f(a_3)+f(a_{2018})=\cdots=f(a_{2020})+f(a_1)=2$，

∴由倒序求和可得 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2020})=2020$.

故选：A.

3.（2021·全国·高二专题练习）设 $a_n=\frac{\cos n^\circ}{\cos(30^\circ+n^\circ)}$，$S_n$ 为数列的前 n 项和，求 S_{59} 的值是（　　）

A. $\frac{59\sqrt{3}}{2}$　　B. 0　　C. 59　　D. $\frac{59}{2}$

【答案】A

【分析】

由题得 $S_{59}=\frac{\cos1}{\cos29}+\frac{\cos2}{\cos28}+\cdots+\frac{\cos59}{\cos29}$ ①，$S_{59}=\frac{\cos59}{\cos29}+\frac{\cos58}{\cos28}+\cdots+\frac{\cos1}{\cos29}$ ②，两式相加化简即得解.

【详解】

令 $S_{59}=\frac{\cos1}{\cos29}+\frac{\cos2}{\cos28}+\cdots+\frac{\cos59}{\cos29}$ ①

则 $S_{59}=\frac{\cos59}{\cos29}+\frac{\cos58}{\cos28}+\cdots+\frac{\cos1}{\cos29}$ ②

①+②可得：$2S_{59}=\frac{\cos1+\cos59}{\cos29}+\frac{\cos2+\cos58}{\cos28}+\cdots+\frac{\cos1+\cos59}{\cos29}$，

∵ $\frac{\cos1+\cos59}{\cos29}=\frac{\cos1+\cos60\cos1+\sin60\sin1}{\cos30\cos1+\sin30\sin1}=\frac{\cos1+\frac{1}{2}\cos1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos1+\frac{1}{2}\sin1}=\sqrt{3}$，∴ $2S_{59}=59\sqrt{3}$，∴ $S_{59}=\frac{59\sqrt{3}}{2}$.

故选：A

4.（2021·江西·新余市第一中学高二月考）已知函数 $f(x)=x+3\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{n}{2019}$，则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2018})=$（　　）

A. 2018　　B. 2019　　C. 4036　　D. 4038

【答案】A

【分析】

根据函数解析式确定 $f(x)+f(1-x)$ 为常数，再得到 $a_n+a_{2019-n}=\frac{n}{2019}+\frac{2019-n}{2019}=1$，然后利用倒序相加法求和即可.

【详解】

$\because f(1-x)=1-x+3\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=x-\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)+f(1-x)=2$.

又 $\because a_n+a_{2019-n}=\frac{n}{2019}+\frac{2019-n}{2019}=1$，

$\therefore f(a_n)+f(a_{2019-n})=2$.

令 $S=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2018})$，

则 $S=f(a_{2018})+f(a_{2017})+\cdots+f(a_1)$，

两式相加得 $2S=2\times2018$，$\therefore S=2018$.

故选：A

5.（2021·全国·高三专题练习（理））已知函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+1$，则 $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．2020　　D．2021

【答案】C

【分析】

设 $m+n=1$，得到 $f(m)+f(n)=2$，再利用倒序相加求和得解.

【详解】

解：函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+1$，设 $m+n=1$，则有 $m-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-n$，

所以 $f(m)+f(n)=\left(m-\frac{1}{2}\right)^3+1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^3+1=2$，

所以当 $m+n=1$ 时，$f(m)+f(n)=2$，

令 $S=f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$，

所以 $2S=f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f\left(\frac{1}{2021}\right)=2\times2020$，

故 $S=f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)=2020$.

故选：C

【点睛】

方法点睛：数列求和常用的方法有：（1）公式法；（2）错位相减法；（3）裂项相消法；（4）分组求和法；（5）倒序相加法. 要根据已知条件灵活选择方法求解.

6.（2021·河南南阳·高二期中）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{2n}+a_{2n-1}=(-1)^n$，$a_{2n-1}\cdot a_{2n}=3^n$ $n\in N^*$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2021 项的和为（　　）

A．$3^{1011}-2022$　　B．$3^{1010}-2022$　　C．$3^{1011}-2020$　　D．$3^{1010}-2020$

【答案】A

【分析】

利用累加法得到 $a_{2n-1}=\frac{3^n}{2}+\frac{1+(-1)^n}{2}-1$，带入得到 $a_{2n}=\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n-1$，再利用分组求和法计算得到答案.

【详解】

$a_{2n-1}\cdot a_{2n}=3^n$，$a_{2n}+a_{2n-1}=(-1)^n\cdot 3^n$，即 $a_{2n-1}+a_{2n-1}=(-1)^n\cdot 3^n$.

$a_{2n-1}=a_{2n-1}+a_{2n-3}+a_{2n-3}+a_{2n-5}+\cdots+a_3+a_1+a_1$

$=(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1}+(-1)^{n-2}\cdot 3^{n-2}+\cdots+1+3+1=\frac{3^n+3}{2}+\frac{1\left[1+(-1)^n\right]}{2}-1$

$=\frac{3^n\left[1+(-1)^n\right]}{2}-1=\frac{3^n}{2}+\frac{3^n\left[1+(-1)^n\right]}{2}-1$.

$a_{2n}+a_{2n-1}=(-1)^n\cdot\frac{3^n}{2}+\frac{1+(-1)^n}{2}-1+(-1)^n\cdot\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n-1$.

故 $S_{2021}=a_1+a_3+\cdots+a_{2021}+a_2+a_4+\cdots+a_{2020}$

$=\left(1+\frac{3^1}{2}+\frac{1+(-1)^0}{2}-1\right)+\left(\frac{3^2}{2}+\frac{1+(-1)^1}{2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{3^{1011}}{2}+\frac{1+(-1)^{1010}}{2}-1\right)$

$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)-1\right)+\left(\frac{3^2}{2}+\frac{1}{2}(-1)^2-1\right)+\cdots+\left(\frac{3^{1010}}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{1010}-1\right)$

$=-1-3\frac{1-3^{1010}}{1-3}-\frac{3^{1011}}{2}+\frac{1}{2}-2021=3^{1011}-2022$.

故选：A.

7.（2021·河南南阳·高三期中（文））意大利数学家列昂那多·斐波那契以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：1，

1，2，3，5，8，13，21，34，55，…，即$F(1)=F(2)=1$，$F(n)=F(n-1)+F(n-2)\ (n\geq 3,n\in N^*)$，此数列在现代物理“准晶体结构”、化学等领域都有着广泛的应用.若此数列的各项除以2的余数构成一个新数列$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$的前2021项的和为（　　）

A．2020　　B．1348　　C．1347　　D．672

【答案】B

【分析】

求出已知数列除以2所得的余数，归纳可得$\{a_n\}$是周期为3的周期数列，求出一个周期中三项和，从而可得结果.

【详解】

由数列$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$各项除以2的余数，

可得$\{a_n\}$为$1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,\ldots$

所以$\{a_n\}$是周期为3的周期数列，

一个周期中三项和为$1+1+0=2$，

因为$2021=673\times 3+2$，

所以数列$\{a_n\}$的前2020项的和为$673\times 2=1348$，

故选：B.

【点睛】

方法点睛：

本题主要考查数列的周期性以及应用，考查了递推关系求数列各项的和，利用递推关系求数列中的项或求数列的和：

（1）项的序号较小时，逐步递推求出即可；

（2）项的序数较大时，考虑证明数列是等差、等比数列，或者是周期数列.

8.(2021·云南大理·模拟预测(理))已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n+S_n=1$，则$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\frac{S_3}{a_3}+\cdots+\frac{S_7}{a_7}$的值为（　　）

A．7　　B．126　　C．247　　D．254

【答案】C

【分析】

根据a_n和S_n的关系得到$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$，计算$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故$\frac{S_n}{a_n}=2^n-1$，利用分组求和法计算得到答案.

【详解】

$a_n=S_n-1$，当$n=1$时，$a_1=S_1-1$，故$a_1=\frac{1}{2}$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-1$，$a_{n-1}=S_{n-1}-1$，相减得到$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$，

数列是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，故$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，验证$n=1$时成立，故$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$S_n=1-a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\frac{S_n}{a_n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^n-1$，

$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\frac{S_3}{a_3}+\cdots+\frac{S_7}{a_7}=2^1-1+2^2-1+\cdots+2^7-1=\frac{1-2^7}{1-2}-7=247$.

故选：C.

9.（2021·西藏·拉萨中学高二月考）数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}=2n-1$，则它的前20项和S_{20}等于（　　）

A．−10　　B．−20　　C．10　　D．20

【答案】D

【分析】

根据$a_n+a_{n+1}=2n-1$，利用并项求和法即可得出答案.

【详解】

解：因为$a_n+a_{n+1}=2n-1$，

所以$S_{20}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})$

$=1+5+9+\cdots+37$

$=1+(5+9)+\cdots+37$

$=2+10+20$.

故选：D.

10．（2021•全国•高二课时练习）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+3$，则$S_{2021}=$（　　）．

A．3009　　B．3031　　C．3010　　D．3030

【答案】B

【分析】

由条件求数列的前几项，由此确定数列具有周期性，利用组合求合法求S_{2021}．

【详解】

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+3$，可得$a_2=2$，$a_3=1$，$a_4=2$，…，即奇数项为1，偶数项为2，

则$S_{2021}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}=3+3+\cdots+3+1+3\times1010+1=3031$．

故选：B．

11．（2021•全国•高二课时练习）已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$，其前m项和$S_m=\frac{321}{64}$，则项数$m=$（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【答案】C

【分析】

利用分组求和的办法，求出数列$\{a_n\}$的前m项和，解方程即可．

【详解】

由题知，$S_m=(a_1+a_2+\cdots+a_m)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}\right)=m+\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}=m+1-\frac{1}{2^m}$．又$\frac{321}{64}=5+\frac{1}{64}$，由$m-1-\frac{1}{2^m}=5-\frac{1}{64}$得$m=6$．

故选：C

12．（2021•河南•高二月考（文））设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_n+a_{n+1}=3$，$a_1=1$，则$S_{40}=$（　　）

A．620　　B．630　　C．640　　D．650

【答案】A

【分析】

当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=3$，可得$\{a_n\}$的奇数项构成等差数列，由等差数列的求和公式可得奇数项的和，

当n为偶数时，$a_n-a_{n-2}=3$，可计算偶数项的和，由分组求和即可求解．

【详解】

当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=3$，

故数列$\{a_n\}$的奇数项构成以1为首项，3为公差的等差数列；

所以$a_1+a_3+\ldots+a_{39}=20\times1+\frac{20\times19}{2}\times3=590$，

当n为偶数时，$a_n-a_{n-2}=3$，

所以$a_2-a_4=-3$，$a_6-a_8=-3$，…，$a_{38}-a_{40}=-3$，

所以$a_2-a_4+a_6-a_8+\cdots-a_{38}+a_{40}=-3\times10=-30$，

所以$S_{40}=a_1+a_3+\ldots+a_{39}+a_2-a_4+a_6-a_8+\cdots-a_{38}+a_{40}=590-30=620$.

故选：A.

二、多选题

13.（2021·全国·高二单元测试）已知数列$\{a_n\}$满足$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}$，数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n$，则下列结论正确的是（　　）

A．a_1的值为2

B．数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1\cdot2^n$

C．数列$\{a_n\}$为递减数列

D．$S_n=7-\frac{3n+7}{2^n}$

【答案】ACD

【分析】

对于A，令$n=1$直接求解a_1，对于B，当$n\geq2$时，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}$，然后与已知的式子相减可求出$a_n$，对于C，利用$a_{n-1}-a_n$进行判断，对于D，利用错位相减法求解即可

【详解】

当$n=1$时，$2a_1=4$，∴$a_1=2$，∴A正确；

当$n\geq2$时，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}$，

∴$2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}-\frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}=3n+1$，

∴$a_n=\frac{3n+1}{2^n}$，∵上式对$n=1$也成立，∴$a_n=\frac{3n+1}{2^n}$（$n\in N^*$），∴B错误；

$\because a_{n+1}-a_n=\frac{3n-4}{2^{n+1}}-\frac{3n-1}{2^n}=\frac{3n-4-6n+2}{2^{n+1}}=\frac{-3n-2}{2^{n+1}}<0$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$为递减数列，$\therefore$C 正确；

$\because S_n=\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots+\frac{3n-1}{2^n}$，$\therefore\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\cdots+\frac{3n-1}{2^{n+1}}$，两式相减得，

$\therefore\frac{1}{2}S_n=2+3\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{3n-1}{2^{n+1}}=2+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)-\frac{3n-1}{2^{n+1}}=\frac{7}{2}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}$，

$\therefore S_n<7-\frac{3n+7}{2^n}$．$\therefore$D 正确．

故选：ACD．

14．（2021·河北衡水中学高三月考）提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则，它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的，后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律，即数列$\{a_n\}$：0.4，0.7，1，1.6，2.8，5.2，10，19.6，…，表示的是太阳系第n颗行星与太阳的平均距离(以天文单位 A.U.为单位)现将数列$\{a_n\}$的各项乘以 10 后再减 4，得到数列$\{b_n\}$，可以发现数列$\{b_n\}$从第 3 项起，每项是前一项的 2 倍，则下列说法正确的是（　　）

A．数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times2^{n-2}$

B．数列$\{a_n\}$的第 2021 项为$0.3\times2^{2020}+0.4$

C．数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=0.4n+0.3\times2^{n-1}-0.3$

D．数列$\{nb_n\}$的前n项和$T_n=3n+1-2^{n-1}$

【答案】CD

【分析】

由题意可得数列$\{b_n\}$：0,3,6,12,24,48,96,192，，由此可得数列$\{b_n\}$从第 2 项起构成公比为 2 的等比数列，从而可求出其通项公式，判断选项 A，由于$a_n=\frac{b_n+4}{10}$，所以可求出数列$\{a_n\}$的通项公式，从而可判断 B，对于 C，利用分组求和可求出数列$\{a_n\}$的前n项和，对于 D，利用错位相减法可求出数列$\{nb_n\}$的前n项和

【详解】

数列$\{a_n\}$各项乘以 10 再减 4 得到数列$\{b_n\}$：0,3,6,12,24,48,96,192，，

故该数列从第 2 项起构成公比为 2 的等比数列，所以$b_n=\begin{cases}0,n=1,\\3\times2^{n-2},n\geqslant2,\end{cases}$故 A 错误；

$a_n=\begin{cases}\frac{b}{10}, & n=1,\\ 0.3\times 2^{n-2}+0.4, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 所以 $a_{2021}=0.3\times 2^{2019}+0.4$，故　错误；

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=0.4$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=0.4+0.3\times(2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})+0.4(n-1)$

$=0.4n+0.3\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$.

当 $n=1$ 时，$S_1=0.4$也符合上式，所以 $S_n=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$，故 C 正确；

因为 $nb_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 3n\times 2^{n-2}, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时，$T_1=b_1=0$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n=0+3\times(2^0+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2})$，$2T_n=3\times(2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1})$，

所以 $-T_n=0-3(2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-n\times 2^{n-1})$

$=-3+2\times\frac{2-2^{n-1}}{1-2}-n\times 2^{n-1}=-3+(1-n)\times 2^{n-1}$，所以 $T_n=3+(n-1)\times 2^{n-1}$.

又当 $n=1$ 时，T_1 也满足上式，所以 $T_n=3+(n-1)\times 2^{n-1}$，故 D 正确.

故选：CD.

15.（2021·广东荔湾·高二期末）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=n-\frac{1}{2^n}+1$，若数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n=n+1-a_n$，且 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则以下说法正确的是（　　）

A．数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列　　B．数列 $\{b_n\}$ 是递增数列

C．$T_n=2+\frac{n-2}{2^n}$　　D．$S_n\geqslant T_n$

【答案】ACD

【分析】

利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求得 $\{a_n\}$ 通项公式，即可得判断 A；化简判断 $b_{n+1}-b_n$ 的正负可判断单调性判断 B；利用错

T_n，再作差判断S_n-T_n的正负可判断

【详解】

$\because S_n=n-\frac{1}{2^n}-1$，则当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=n-1-\frac{1}{2^{n-1}}-1$，

两式相减得$a_n=1-\frac{1}{2^n}$，当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}$也适合，故$a_n=1-\frac{1}{2^n}$，

则$a_n-1=-\frac{1}{2^n}$，则$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{-\frac{1}{2^n}}{-\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}$，所以数列$\{a_n-1\}$是等比数列，故A正确；

$b_n=n(1-a_n)=\frac{n}{2^n}$，$b_{n+1}-b_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-n}{2^{n+1}}$，

当$n\geq 1$时，$b_{n+1}-b_n\leq 0$，即$b_{n+1}\leq b_n$，则数列$\{b_n\}$不是递增数列，故B错误；

$\because T_n=1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\times\frac{1}{2^n}+n\times\frac{1}{2^{n+1}}$，

两式相减可得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，

所以$T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，故C正确；

$S_n-T_n=n-\frac{1}{2^n}-1-\left[2-\frac{n+2}{2^n}\right]=n-3+\frac{n+3}{2^n}$，

当$n=1$时，$S_1-T_1=1-3+\frac{4}{2}=0$，则$S_1=T_1$，

当$n=2$时，$S_2-T_2=2-3+\frac{5}{4}>0$，则$S_2>T_2$，

当$n\geq 3$时，$S_n-T_n=n-3+\frac{n+3}{2^n}>0$，则$S_n>T_n$，

综上可得$S_n\geq T_n$，故D正确.

故选：ACD.

16.（2021·江苏·苏州市苏州高新区第一中学高二月考）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，数列$\left\{\frac{2^n}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，下列正确的结论是（　　）

A．$\{a_n+1\}$是等差数列　　B．$\{a_n+1\}$是等比数列

a_n □1　　D．T_n □1

【答案】BCD

【分析】

推导出 $\frac{a_{n□1}□1}{a_n□1}$ □2，可判断 AB 选项的正误；利用等比数列的通项公式可判断 C 选项的正误；利用裂项求和法可判断 D 选项的正误.

【详解】

因为 $S_{n□1}$ □S_n □$2a_n$ □1，所以，$S_{n□1}$ □S_n □$a_{n□1}$ □$2a_n$ □1，

∵a_1 □1，则 a_2 □3，a_3 □7，…，以此类推可知，对任意的 n□ □，a_n □0，

所以，$a_{n□1}$ □1 □2a_n □1，则 $\frac{a_{n□1}□1}{a_n□1}$ □2，

故数列 a_n □1 是等比数列，且首项为 a_1 □1 □2，公比为 2，

所以，a_n □1 □2 □$2^{n□1}$ □2^n，□a_n □2^n □1，

∵ $\frac{2^n}{a_n a_{n□1}}$ □ $\frac{2^n}{(2^n□1)(2^{n□1}□1)}$ □ $\frac{1}{2^n□1}$ □ $\frac{1}{2^{n□1}□1}$，

所以，T_n □ $\frac{1}{(2□1)}$ □ $\frac{1}{(2^2□1)}$ □ $\frac{1}{(2^2□1)}$ □ $\frac{1}{(2^3□1)}$ □…□ $\frac{1}{(2^n□1)}$ □ $\frac{1}{(2^{n□1}□1)}$ □ $\frac{1}{(2^{n□1}□1)}$ □1.

所以，BCD 选项正确，A 选项错误.

故选：BCD.

17．（2021•全国•高三月考）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1 □1，$na_{n□1}$ □$(n□1)a_n$ □$n(n□1)$（n □N^*），则下列说法正确的有（　　）

A．数列 $\{a_{n□1}$ □$a_n\}$ 是等差数列

B．数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n□1}}\right\}$ 的前 n 项和不超过 $\frac{1}{5}$

C．存在等差数列 p_n，使得 $\ln a_n$ □p_n 对 n □N^* 恒成立

D．不存在实数 M，使得 $\frac{a_1}{2^1}$ □$\frac{a_2}{2^2}$ □□ □$\frac{a_n}{2^n}$ □M 对 n □N^* 恒成立

【答案】ABC

【分析】

先由题意求得 a_n □n^2，将其代入 A 选项直接得出结论；B 选项，利用放缩技巧将其裂项求和得结论；C 选

选项，由错位相减法可得结论.

【详解】

将 $na_{n+1}-(n+1)a_n=n(n+1)$ 两边同除以 $n(n+1)$，得到 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，所以 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为等差数列，首项为 $\frac{a_1}{1}=1$，

公差为 1，所以 $\frac{a_n}{n}=n$，$a_n=n^2$，

对于 A 选项，$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$，此时令 $c_n=2n+1$，则 $c_{n+1}-c_n=2(n+1)+1-2n-1=2$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等差数列，正确；

B 选项，

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(2n+1)}=\frac{1}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{2n+1}{1}=\frac{1}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^2-n^2}{1}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2},$$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2(i+1)^2(2i+1)}=\frac{1}{12}-\frac{1}{180}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

$=\frac{1}{12}-\frac{1}{180}+\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{12}+\frac{1}{180}+\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$，所以正确；

C 选项，$\ln a_n<2\ln n$，

又令 $f(x)=x-\ln x-1$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$，令 $f'(x)>0$，则 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 单增，

又 $f(1)=0$，所以 $f(x)=x-\ln x-1\geq 0$，即 $\ln x\leq x-1$ 成立，

所以 $2\ln n\leq 2n-2$，所以存在等差数列 $p_n=2n-2$，使得 $\ln a_n\leq p_n$ 对 $n\in N^*$ 恒成立

所以正确；

D 选项，令 $T_n=\frac{a_1}{2^1}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$，

则 $2T_n=1+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}$，所以 $T_n=1+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\frac{n^2}{2^n}$，

令 $P_n=1+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，则 $2P_n=2+3+\frac{5}{2}+\frac{7}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-2}}$，

所以 $P_n=2+2-1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{2n-1}{2^{n-1}}=\frac{4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-2+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-6+\frac{2n-3}{2^{n-1}}$，

$T_6=\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}-6$，故错误，

故选：

18．（2021·江苏·海安高级中学高二期中）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$nS_n-(n+1)S_{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，若$S_m<\frac{13}{8}$，则正整数$m$的值可以为（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】CD

【分析】

由题意，项和转换可得$a_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\geq 2)$，裂项相消可得$S_m=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$，令$S_m<\frac{13}{8}$，解不等式即可

【详解】

由已知可得，

当$n\geq 2$时，$nS_n-(n+1)S_{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}$，即$n(n+1)a_n=\frac{1}{n+1}$，

$\therefore a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(n\geq 2)$，

$S_m=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$，

令$S_m<\frac{13}{8}$，得$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{4}$，

即$m^2-7m-4>0$

解得$m<\frac{7-\sqrt{65}}{2}$（舍去）或$m>\frac{7+\sqrt{65}}{2}>7.5$，

∴结合选项，知正整数m的值可以为8或9.

故选：CD

19．（2021·江苏·高二单元测试）设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，$S_1=1$，$S_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n$，且$b_n=\frac{a_{n+1}^2}{a_n a_{n+2}}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_{2021}=2021$　　B．$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$　　C．$b_n=1+\frac{1}{n(n+2)}$　　D．$\frac{1}{3}<T_n<\frac{3}{4}$

【答案】ABD

对于　　，通过累乘法求出$\{S_n\}$的通项公式，进而求出$\{a_n\}$的通项公式，即可求解；

对于CD，通过$\{a_n\}$的通项公式求出$\{b_n\}$的通项公式，再通过裂项相消求T_n，进而求解.

【详解】

由题意，得$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$，

∴当$n\geq 2$时，$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\cdot\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot S_1=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{1}\cdot 1=\frac{n(n+1)}{2}$，

又当$n=1$时$S_1=1$也符合上式，

∴$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，易得$a_n=n$，∴$a_{2021}=2021$，

故A，B正确；

$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

∴$T_n=n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)>n+\frac{3}{4}$，

易知$\{T_n-n\}$单调递增，

∴$T_n-n\geq T_1-1=\frac{1}{3}$，∴$\frac{1}{3}\leq T_n-n<\frac{3}{4}$，故C错误，D正确.

故选:ABD.

三、填空题

20.(2021·上海市行知中学高二期中)已知数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=2n^2-n$，设数列$\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$K_n$，则$K_{20}$的值为 ___.

【答案】$\frac{20}{81}$

【分析】

当$n=1$时，$b_1=1$，当$n\geq 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}$可得$\{b_n\}$的通项公式，再利用裂项求和即可求解.

【详解】

当$n=1$时，$b_1=S_1=2-1=1$，

当$n\geq 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-2(n-1)^2-(n-1)=4n-3$，

因为$b_1=1$满足上式，所以$b_n=4n-3$，

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$

所以$K_{20}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{77}-\frac{1}{81}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{81}\right)=\frac{20}{81}$，

故答案为：$\frac{20}{81}$.

21.（2021•上海市复兴高级中学高二期中）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n=\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则满足$S_n\geq 10$的$n$最小值为_____

【答案】1024

【分析】

先求得$S_n=\log_2(n+1)$，由$S_n\geq 10$，可得$\log_2(n+1)\geq 10$，由此即可求解

【详解】

因为$a_n=\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_2\frac{n+1}{n}$，

所以$S_n=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\log_2(n+1)$，

由$S_n\geq 10$，可得$\log_2(n+1)\geq 10$，解得$n\geq 1023$，

所以满足$S_n\geq 10$的n最小值为1024，

故答案为：1024

22.（2021•宁夏•六盘山高级中学高二月考（理））无穷数列$\{a_n\}$满足：只要$a_p=a_q(p,q\in N^*)$，必有$a_{p+1}=a_{q+1}$，则称$\{a_n\}$为“和谐递进数列”.已知$\{a_n\}$为“和谐递进数列”，且前四项成等比数列，$a_1=a_5=1,a_2=2$，则S_{2022}=_____.

【答案】7578

【分析】

根据新定义得数列是周期数列，从而易求得S_{2022}.

【详解】

∵a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，$a_1=1,a_2=2$，∴$a_3=4,a_4=8$，

又a_1+a_5，$\{a_n\}$为“和谐递进数列”，∴a_2+a_6，a_3+a_7，a_4+a_8，a_5+a_9，…，

∴数列$\{a_n\}$是周期数列，周期为4.

∴$S_{2022}=505\times(1+2+4+8)+1+2+7578$.

故答案为：7578.

23.（2021·全国·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=2a_{n+2}a_{n+2}\cdots a_n^2$，$a_1=1$，$a_2=2$，则下列表达式

$\frac{a_3^2}{a_4a_1^2}+\frac{a_4^2}{a_5a_2^2}+\frac{a_5^2}{a_6a_3^2}+\frac{a_6^2}{a_7a_4^2}+\frac{a_7^2}{a_8a_5^2}$的值为_____.

【答案】$\frac{2369}{2048}$

【分析】

依次求得a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8，由此求得所求表达式的值.

【详解】

$a_1=1$，$a_2=2$，

$a_3=2a_1^2+2+1=2$，

$a_4=2a_1^2a_2^2+2+2^2+2=2^3$，

$a_5=2a_1^2a_2^2a_3^2+2+1+2^2+2^2+2=2^5$，

$a_6=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2+2+1+2^2+2^2+2^6+2=2^{11}$，

$a_7=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2+2+1+2^2+2^2+2^6+2^{10}+2=2^{21}$，

$a_8=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2a_6^2+2+2^{21}+2^{22}+2=2^{43}$，

$\frac{a_3^2}{a_4a_1^2}+\frac{a_4^2}{a_5a_2^2}+\frac{a_5^2}{a_6a_3^2}+\frac{a_6^2}{a_7a_4^2}+\frac{a_7^2}{a_8a_5^2}=\frac{2^2}{2^3}+\frac{2^6}{2^5+2^2}+\frac{2^{10}}{2^{11}+2^2}+\frac{2^{22}}{2^{21}+2^6}+\frac{2^{42}}{2^{43}+2^{10}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^{11}}+\frac{2369}{2^{11}}+\frac{2369}{2048}$.

故答案为：$\frac{2369}{2048}$

四、解答题

24.（2021·全国·高二课时练习）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n$，点$(n,S_n)(n\in N^*)$均在函数$f(x)$的图象上，函数$g(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $g(x)+g(1-x)$ 的值；

（3）令 $b_n=g\left(\frac{a_n}{2021}\right)(n\in N^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项和 T_{2020}.

【答案】

（1）$a_n=n$

（2）1

（3）1010

【分析】

（1）由题意可得：$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，由 $a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1},n\geq 2\\ a_1,n=1\end{cases}$ 即可求解；

（2）求出 $g(1-x)$ 的表达式，由指数的运算即可求解；

（3）结合（2）的结论，利用倒序相加法即可求解.

（1）

因为点 $(n,S_n)(n\in N^*)$ 均在函数 $f(x)$ 的图象上，

所以 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)=n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，适合上式，所以 $a_n=n$.

（2）

因为 $g(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，所以 $g(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{2}{4^x+2}$，

所以 $g(x)+g(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1$.

（3）

由（1）知 $a_n=n$，可得 $b_n=g\left(\frac{a_n}{2021}\right)+g\left(\frac{n}{2021}\right)$，

所以 $T_{2020}=b_1+b_2+\cdots+b_{2020}=g\left(\frac{1}{2021}\right)+g\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+g\left(\frac{2020}{2021}\right)$，①

又因为 $T_{2020}=b_{2020}+b_{2019}+\cdots+b_1=g\left(\frac{2020}{2021}\right)+g\left(\frac{2019}{2021}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{2021}\right)$，②

因为 $g(x)+g(1-x)=1$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/946040214120010033