

2024 届广东省普宁二中高三数学试题 5 月考前最后一卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $7S_2 = 4S_4$ ，则公比 q 的值为（ ）

- A. 1 B. 1 或 $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 泰山有“五岳之首”“天下第一山”之称，登泰山的路线有四条：红门盘道徒步线路，桃花峪登山线路，天外村汽车登山线路，天烛峰登山线路.甲、乙、丙三人在聊起自己登泰山的线路时，发现三人走的线路均不同，且均没有走天外村汽车登山线路，三人向其他旅友进行如下陈述：

甲：我走红门盘道徒步线路，乙走桃花峪登山线路；

乙：甲走桃花峪登山线路，丙走红门盘道徒步线路；

丙：甲走天烛峰登山线路，乙走红门盘道徒步线路；

事实上，甲、乙、丙三人的陈述都只对一半，根据以上信息，可判断下面说法正确的是（ ）

- A. 甲走桃花峪登山线路 B. 乙走红门盘道徒步线路
C. 丙走桃花峪登山线路 D. 甲走天烛峰登山线路

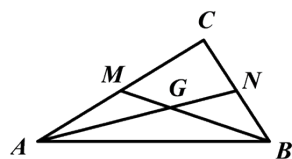
3. 3 本不同的语文书，2 本不同的数学书，从中任意取出 2 本，取出的书恰好都是数学书的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{10}$

4. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $|x-1| < 2$ ”是“ $x^2 < x$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M ， N 分别为 CA ， CB 的中点，若 $AB = \sqrt{5}$ ， $CB = 1$ ，且满足 $3\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2$ ，则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于（ ）

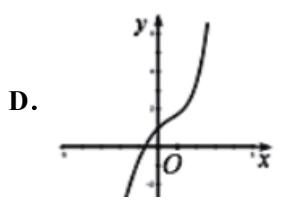
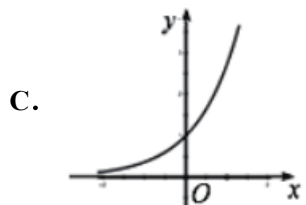
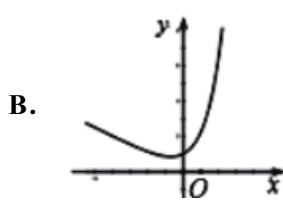
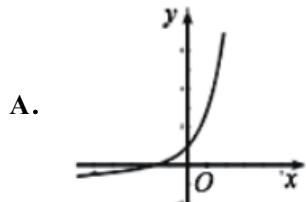


- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

6. 已知集合 $P = \{x | x - 2 \leq 0\}$, $Q = \left\{x \mid \frac{x-3}{x} \leq 0\right\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} P) \cap Q$ 为 ()

- A. $[0, 2)$ B. $(2, 3]$ C. $[2, 3]$ D. $(0, 2]$

7. 函数 $f(x) = e^x + ax$ ($a < 0$) 的图像可以是 ()



8. “ $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

9. 已知角 α 的终边经过点 $P(-4m, 3m)$ ($m \neq 0$), 则 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值是 ()

- A. 1 或 -1 B. $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$ C. 1 或 $-\frac{2}{5}$ D. -1 或 $\frac{2}{5}$

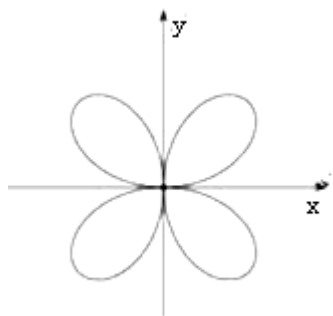
10. 关于函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 的单调性, 下列叙述正确的是 ()

- A. 单调递增 B. 单调递减 C. 先递减后递增 D. 先递增后递减

11. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 例如: 四叶草曲线就是其中一种, 其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论:

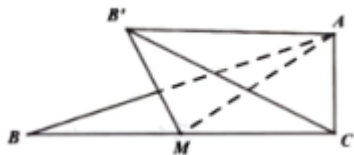
- ① 曲线 C 有四条对称轴;
② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$;
③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$;
④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中, 所有正确结论的序号是 ()



- A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②④

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AM 翻折成 $\triangle A'B'C'$, 且点 A' 不在平面 ABC 内, 点 P 是线段 $A'B'$ 上一点. 若二面角 $A'-BC'-A$ 与二面角 $A'-BC-A$ 的平面角相等, 则直线 AP 经过 $\triangle A'B'C'$ 的 ()



- A. 重心 B. 垂心 C. 内心 D. 外心

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点, 则抛物线 E 的准线与圆 C 相交所得弦长是 _____.

14. 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 如果 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x 项的系数为 -80, 那么 $a =$ _____.

15. 等腰直角三角形 ABC 内有一点 P , $PA = 1$, $PB = \sqrt{2}$, $PC = 2$, $\angle A = 90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 面积为 _____.

16. 若将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象沿 x 轴向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位后所得的图象与 $f(x)$ 的图象关于 x 轴对称, 则 φ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 若不等式 $1 + 2^x + 4^x \cdot a > 0$ 在 $x \in (0, 1]$ 时恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 后与函数 $g(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象重合.

(1) 求 ω 和 φ 的值;

(2) 若函数 $h(x) = f\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + g\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, 求 $h(x)$ 的单调递增区间及图象的对称轴方程.

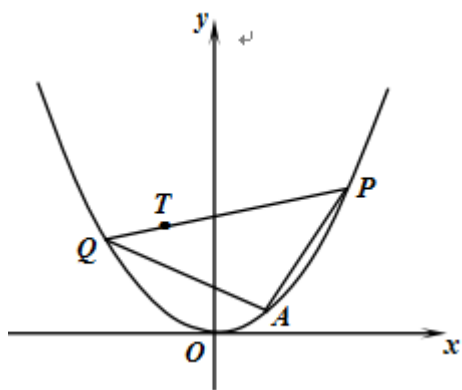
19. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为:
$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad (\text{其中 } t \text{ 为参数}),$$
 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}m \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}m \end{cases} \quad (\text{其中 } m \text{ 为参数})$$

(1) 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C 与直线 l 交于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(2, 0)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

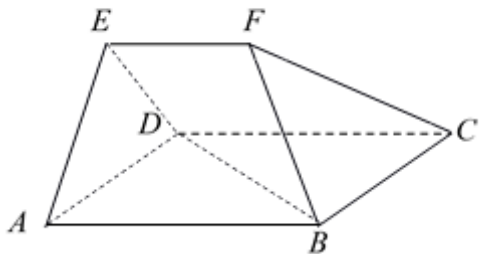
20. (12分) 已知三点 P, Q, A 在抛物线 $\Gamma: x^2 = 4y$ 上.



(I) 当点 A 的坐标为 $(2, 1)$ 时, 若直线 PQ 过点 $T(-2, 4)$, 求此时直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积;

(II) 当 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$ 时, 求 $\triangle APQ$ 面积的最小值.

21. (12分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = AE = ED = 2EF$, $EF \parallel AB$, 二面角 $E-AD-B$ 为直二面角.



(I) 证明: $BD \perp FC$;

(II) 求二面角 $A-CF-B$ 的余弦值.

22. (10分) 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 当 $k=2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;
- (3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由 $7S_2 = 4S_4$ 可得 $3(a_1 + a_2) = 4(a_3 + a_4)$, 故可求 q 的值.

【详解】

因为 $7S_2 = 4S_4$, 所以 $3(a_1 + a_2) = 4(S_4 - S_2) = 4(a_3 + a_4)$,

故 $q^2 = \frac{3}{4}$, 因 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 故 $q > 0$, 所以 $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 C.

【点睛】

一般地, 如果 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为其前 n 项和, 则有性质:

- (1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m+n = p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$;
- (2) 公比 $q \neq 1$ 时, 则有 $S_n = A + Bq^n$, 其中 A, B 为常数且 $A + B = 0$;
- (3) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列 ($S_n \neq 0$) 且公比为 q^n .

2、D

【解析】

甲乙丙三人陈述中都提到了甲的路线, 由题意知这三句中一定有一个是正确另外两个错误的, 再分情况讨论即可.

【详解】

若甲走的红门盘道徒步线路, 则乙, 丙描述中的甲的去向均错误, 又三人的陈述都只对一半, 则乙丙的另外两句话丙走红门盘道徒步线路, “乙走红门盘道徒步线路”正确, 与“三人走的线路均不同”矛盾.

故甲的另一句“乙走桃花峪登山线路”正确,故丙的“乙走红门盘道徒步线路”错误,“甲走天烛峰登山线路”正确.乙的话中“甲走桃花峪登山线路”错误,“丙走红门盘道徒步线路”正确.

综上所述,甲走天烛峰登山线路,乙走桃花峪登山线路,丙走红门盘道徒步线路

故选: D

【点睛】

本题主要考查了判断与推理的问题,重点是找到三人中都提到的内容进行分类讨论,属于基础题型.

3、 D

【解析】

把 5 本书编号,然后用列举法列出所有基本事件.计数后可求得概率.

【详解】

3 本不同的语文书编号为 A, B, C , 2 本不同的数学书编号为 a, b , 从中任意取出 2 本, 所有的可能为:

$AB, AC, Aa, Ab, BC, Ba, Bb, Ca, Cb, ab$ 共 10 个, 恰好都是数学书的只有 ab 一种, $\therefore$ 所求概率为 $P = \frac{1}{10}$.

故选: D.

【点睛】

本题考查古典概型, 解题方法是列举法, 用列举法写出所有的基本事件, 然后计数计算概率.

4、 B

【解析】

解出两个不等式的解集, 根据充分条件和必要条件的定义, 即可得到本题答案.

【详解】

由 $|x-1| < 2$, 得 $-1 < x < 3$, 又由 $x^2 < x$, 得 $0 < x < 1$,

因为集合 $\{x | 0 < x < 1\} \subset \{x | -1 < x < 3\}$,

所以“ $|x-1| < 2$ ”是“ $x^2 < x$ ”的必要不充分条件.

故选: B

【点睛】

本题主要考查必要不充分条件的判断, 其中涉及到绝对值不等式和一元二次不等式的解法.

5、 D

【解析】

选取 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 为基底, 其他向量都用基底表示后进行运算.

【详解】

由题意 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\vec{AG} \cdot \vec{MB} = 3 \times \frac{2}{3} \vec{AN} \cdot (-\vec{BM}) = -2(\vec{BN} - \vec{BA}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA}) = (\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{BC}) \cdot (\vec{BC} + \vec{BA})$$

$$= \vec{BA}^2 - \frac{1}{2}\vec{BC}^2 + \frac{1}{2}\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{BA} \cdot \vec{BC}$$

$$\vec{CA}^2 + \vec{CB}^2 = (\vec{BA} - \vec{BC})^2 + 1 = \vec{BA}^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2 + 1 = 5 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} + 1 + 1,$$

$$\therefore \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 7 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC}, \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1,$$

$$\therefore \vec{AG} \cdot \vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AN} \cdot \vec{AC} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{BC} - \vec{BA}) \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{BC}^2 - \frac{3}{2}\vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{BA}^2) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 5) = \frac{8}{3},$$

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的数量积，解题关键是选取两个不共线向量作为基底，其他向量都用基底表示参与运算，这样做目标明确，易于操作.

6、B

【解析】

先求出 $P = \{x | x \leq 2\}$, $Q = \{x | 0 < x \leq 3\}$, 得到 $\partial_R P = \{x | x > 2\}$, 再结合集合交集的运算, 即可求解.

【详解】

$$\text{由题意, 集合 } P = \{x | x - 2 \leq 0\}, Q = \left\{x \mid \frac{x-3}{x} \leq 0\right\},$$

$$\text{所以 } P = \{x | x \leq 2\}, Q = \{x | 0 < x \leq 3\}, \text{ 则 } \partial_R P = \{x | x > 2\},$$

$$\text{所以 } (\partial_R P) \cap Q = \{x | 2 < x \leq 3\} = (2, 3].$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了集合的混合运算，其中解答中熟记集合的交集、补集的定义及运算是解答的关键，着重考查了计算能力，属于基础题.

7、B

【解析】

根据 $x < 0, f(x) > 0$, 可排除 A, D, 然后采用导数, 判断原函数的单调性, 可得结果.

【详解】

由题可知: $a < 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$,

$$\text{又 } f'(x) = e^x + a,$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 则 } x > \ln(-a)$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 则 } x < \ln(-a)$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 单调递减

在 $(\ln(-a), +\infty)$ 单调递增,

故选: B

【点睛】

本题考查函数的图像, 可从以下指标进行观察: (1) 定义域; (2) 奇偶性; (3) 特殊值; (4) 单调性; (5) 值域, 属基础题.

8、B

【解析】

先求出满足 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ 的 α 值, 然后根据充分必要条件的定义判断.

【详解】

由 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ 得 $2\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, 即 $\alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$, 因此“ $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ ”的必要不充分条件.

故选: B.

【点睛】

本题考查充分必要条件, 掌握充分必要条件的定义是解题基础. 解题时可根据条件与结论中参数的取值范围进行判断.

9、B

【解析】

根据三角函数的定义求得 $\sin a, \cos a$ 后可得结论.

【详解】

$$\text{由题意得点 } P \text{ 与原点间的距离 } r = \sqrt{(-4m)^2 + (3m)^2} = 5|m|.$$

$$\text{①当 } m > 0 \text{ 时, } r = 5m,$$

$$\therefore \sin a = \frac{3m}{5m} = \frac{3}{5}, \cos a = \frac{-4m}{5m} = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore 2\sin a + \cos a = 2 \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

②当 $m < 0$ 时, $r = -5m$,

$$\therefore \sin a = \frac{3m}{-5m} = -\frac{3}{5}, \cos a = \frac{-4m}{-5m} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore 2\sin a + \cos a = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}.$$

综上可得 $2\sin a + \cos a$ 的值是 $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{5}$.

故选 B.

【点睛】

利用三角函数的定义求一个角的三角函数值时需确定三个量: 角的终边上任意一个异于原点的点的横坐标 x , 纵坐标 y , 该点到原点的距离 r , 然后再根据三角函数的定义求解即可.

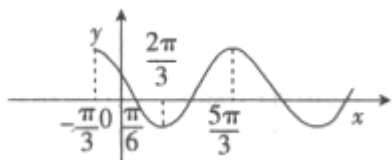
10、C

【解析】

先用诱导公式得 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 再根据函数图像平移的方法求解即可.

【详解】

函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y = \cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到, 如图所示, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上先递减后递增.



故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的平移与单调性的求解. 属于基础题.

11、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数; ②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值; ③将面积转化为 x, y 的关系式, 然后根据基本不等式求解出最大值; ④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系, 从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/946045110031010234>