

江西省南昌八中、南昌二十三中等四校 2024 届高三 3 月统一联合考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直三棱柱中 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $\angle ABC=120^\circ$ ， $AB=2$ ， $BC=CC_1=1$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角的正弦值为（ ）。

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 若 P 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，则 $\neg p$ 是 q 的（ ）

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. 已知点 $M(2,0)$ ，点 P 在曲线 $y^2=4x$ 上运动，点 F 为抛物线的焦点，则 $\frac{|PM|^2}{|PF|-1}$ 的最小值为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $2(\sqrt{5}-1)$ C. $4\sqrt{5}$ D. 4

4. 已知集合 $M=\{y|-1<y<3\}$ ， $N=\{x|x(2x-7)\leq 0\}$ ，则 $M\cup N=$ （ ）

- A. $[0,3)$ B. $\left(0,\frac{7}{2}\right]$ C. $\left[-1,\frac{7}{2}\right]$ D. $\emptyset$

5. 设集合 A 、 B 是全集 U 的两个子集，则“ $A\subseteq B$ ”是“ $A\cap \complement_U B=\emptyset$ ”的（ ）

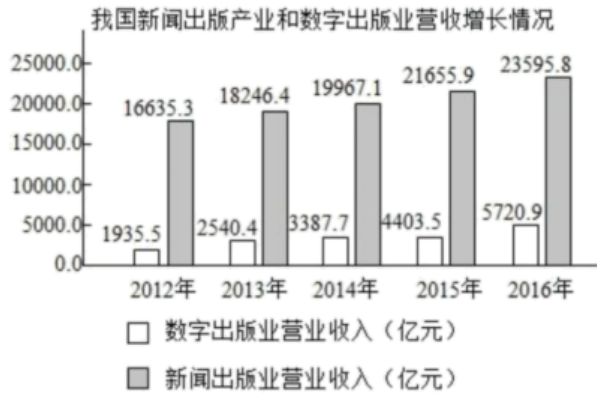
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点为 F_1 ， F_2 ，且 C 上点 P 满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ ， $|\overrightarrow{PF_1}|=3$ ， $|\overrightarrow{PF_2}|=4$ ，则双曲线 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5

7.

新闻出版业不断推进供给侧结构性改革，深入推动优化升级和融合发展，持续提高优质出口产品供给，实现了行业的良性发展.下面是 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收增长情况，则下列说法错误的是（ ）



- A. 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
- B. 2016 年我国数字出版业营收超过 2012 年我国数字出版业营收的 2 倍
- C. 2016 年我国新闻出版业营收超过 2012 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
- D. 2016 年我国数字出版营收占新闻出版营收的比例未超过三分之一

8. 已知命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$, 则 $\neg P$ 为()

- A. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 \geq 1$ B. $\forall x \in R, \sin x \geq 1$
- C. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1$ D. $\forall x \in R, \sin x > 1$

9. 中国古典乐器一般按“八音”分类. 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最先见于《周礼·春官·大师》, 分为“金、石、土、革、丝、木、匏 (páo)、竹”八音, 其中“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器. 现从“八音”中任取不同的“两音”, 则含有打击乐器的概率为 ()

- A. $\frac{3}{14}$ B. $\frac{11}{14}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{2}{7}$

10. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x) > 0$, 若 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数, 则不等式 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

11. 集合 $\left\{x \in N^* \mid \frac{12}{x} \in Z\right\}$ 中含有的元素个数为 ()

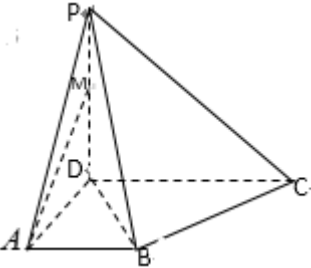
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

12. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BP$, $AC \perp PC$, $AB \perp AC$, $PB = PC = 2\sqrt{2}$, 点 P 到底面 ABC 的距离为 2, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ()



(2) 已知直线 l 与椭圆 C 相切于点 P , 且分别与直线 $x = -4$ 和直线 $x = -1$ 相交于点 M 、 N . 试判断 $\frac{|MF_1|}{|MF_2|}$ 是否为定值, 并说明理由.

19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, M 为侧棱 PD 上一点, 已知 $BD = 2, BC = 2\sqrt{3}, CD = 4, DP = 4, DM = 3$.



(I) 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 PBD ;

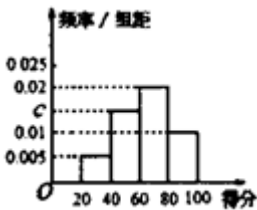
(II) 求二面角 $A-BM-C$ 的余弦值.

20. (12 分) 已知点 $M(x_0, y_0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上任意一点, 直线 $l: x_0x + 2y_0y = 2$ 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 6$ 交于 A , B 两点, 点 F 为椭圆 C 的左焦点.

(1) 求证: 直线 l 与椭圆 C 相切;

(2) 判断 $\angle AFB$ 是否为定值, 并说明理由.

21. (12 分) 某校为了解校园安全教育系列活动的成效, 对全校学生进行了一次安全意识测试, 根据测试成绩评定“合格”“不合格”两个等级, 同时对相应等级进行量化: “合格”记 5 分, “不合格”记 0 分. 现随机抽取部分学生的答卷, 统计结果及对应的频率分布直方图如下:



等级	不合格		合格	
得分	[20,40]	[40,60]	[60,80]	[80,100]
频数	6	a	24	b

(1) 由该题中频率分布直方图求测试成绩的平均数和中位数;

(2) 其他条件不变, 在评定等级为“合格”的学生中依次抽取 2 人进行座谈, 每次抽取 1 人, 求在第 1 次抽取的测试得分低于 80 分的前提下, 第 2 次抽取的测试得分仍低于 80 分的概率;

(3) 用分层抽样的方法，从评定等级为“合格”和“不合格”的学生中抽取 10 人进行座谈。现再从这 10 人中任选 4 人，记所选 4 人的量化总分为 ξ ，求 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 。

22. (10 分) 在全面抗击新冠肺炎疫情这一特殊时期，我市教育局提出“停课不停学”的口号，鼓励学生线上学习.某校数学教师为了调查高三学生数学成绩与线上学习时间之间的相关关系，对高三年级随机选取 45 名学生进行跟踪问卷，其中每周线上学习数学时间不少于 5 小时的有 19 人，余下的人中，在检测考试中数学平均成绩不足 120 分的占 $\frac{8}{13}$ ，统计成绩后得到如下 2×2 列联表：

	分数不少于 120 分	分数不足 120 分	合计
线上学习时间不少于 5 小时		4	19
线上学习时间不足 5 小时			
合计			45

- (1) 请完成上面 2×2 列联表；并判断是否有 99% 的把握认为“高三学生的数学成绩与学生线上学习时间有关”；
- (2) ①按照分层抽样的方法，在上述样本中从分数不少于 120 分和分数不足 120 分的两组学生中抽取 9 名学生，设抽到不足 120 分且每周线上学习时间不足 5 小时的人数是 X ，求 X 的分布列（概率用组合数算式表示）；
- ②若将频率视为概率，从全校高三该次检测数学成绩不少于 120 分的学生中随机抽取 20 人，求这些人中每周线上学习时间不少于 5 小时的人数的期望和方差.

(下面的临界值表供参考)

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a + b + c + d$)

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，得出

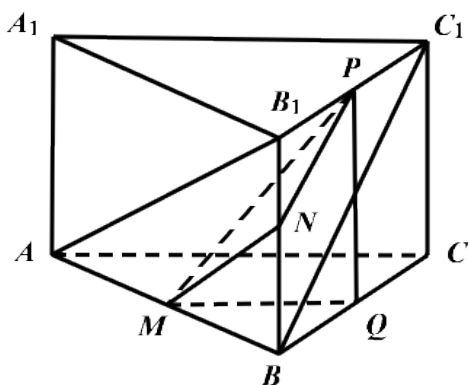


的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角，根据中位线定理，

结合余弦定理求出 AC, MQ, MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值再求其正弦值即可。

【详解】

根据题意画出图形：



设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点，

则



的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

$$\text{可知 } MN = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad NP = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

作 BC 中点 Q ，则 $VPQM$ 为直角三角形；

$$PQ = 1, MQ = \frac{1}{2} AC$$

$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

$$\therefore AC = \sqrt{7}, \quad MQ = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{在 } \triangle MQP \text{ 中, } MP = \sqrt{MQ^2 + PQ^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

在 $VPMN$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2 \cdot MH \cdot NP} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{所以 } \sin \angle MNP = \sqrt{1 - \cos^2 \angle MNP} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

故选: C

【点睛】

此题考查异面直线夹角, 关键点通过平移将异面直线夹角转化为同一平面内的夹角, 属于较易题目.

2、B

【解析】

试题分析: 通过逆否命题的同真同假, 结合充要条件的判断方法判定即可.

由 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件知“若 p 则 $\neg q$ ”为真, “若 $\neg q$ 则 p ”为假, 根据互为逆否命题的等价性知, “若 q 则 $\neg p$ ”为真, “若 $\neg p$ 则 q ”为假, 故选 B.

考点: 逻辑命题

3、D

【解析】

如图所示: 过点 P 作 PN 垂直准线于 N , 交 y 轴于 Q , 则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$, 设 $P(x, y)$, $x > 0$, 则

$$\frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = x + \frac{4}{x}, \text{ 利用均值不等式得到答案.}$$

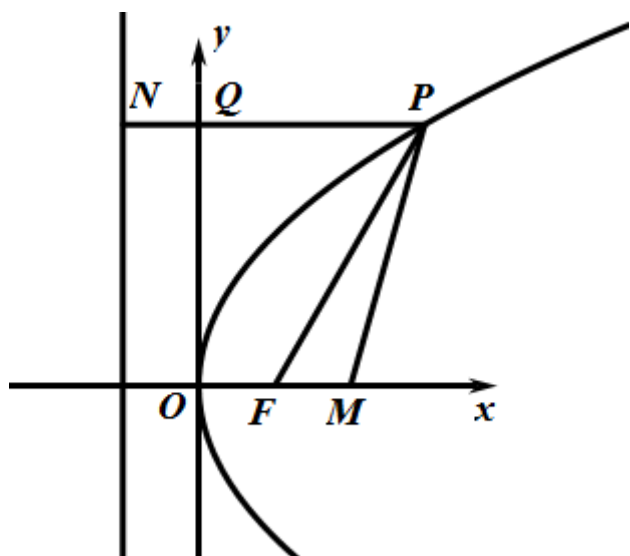
【详解】

如图所示: 过点 P 作 PN 垂直准线于 N , 交 y 轴于 Q , 则 $|PF| - 1 = |PN| - 1 = |PQ|$,

$$\text{设 } P(x, y), x > 0, \text{ 则 } \frac{|PM|^2}{|PF| - 1} = \frac{|PM|^2}{|PQ|} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x} = \frac{(x-2)^2 + 4x}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 4,$$

当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ 时等号成立.

故选: D.



【点睛】

本题考查了抛物线中距离的最值问题，意在考查学生的计算能力和转化能力.

4、C

【解析】

先化简 $N = \{x \mid x(2x - 7) \geq 0\} = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ，再求 $M \cup N$.

【详解】

因为 $N = \{x \mid x(2x - 7) \geq 0\} = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ，

又因为 $M = \{y \mid -1 < y < 3\}$ ，

所以 $M \cup N = \left(-1, \frac{7}{2}\right]$ ，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查一元二次不等式的解法、集合的运算，还考查了运算求解能力，属于基础题.

5、C

【解析】

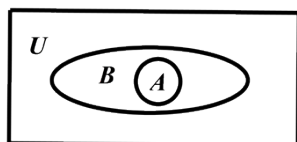
作出韦恩图，数形结合，即可得出结论.

【详解】

如图所示， $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \complement B = \emptyset$ ，

同时 $A \cap \complement B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

故选:C.



【点睛】

本题考查集合关系及充要条件，注意数形结合方法的应用，属于基础题.

6、D

【解析】

根据双曲线定义可以直接求出 a ，利用勾股定理可以求出 c ，最后求出离心率.

【详解】

依题意得， $2a = |PF_2| - |PF_1| = 1$ ， $|F_1F_2| = \sqrt{|PF_2|^2 + |PF_1|^2} = 5$ ，因此该双曲线的离心率

$$e = \frac{|F_1F_2|}{|PF_2| - |PF_1|} = 5.$$

【点睛】

本题考查了双曲线定义及双曲线的离心率，考查了运算能力.

7、C

【解析】

通过图表所给数据，逐个选项验证.

【详解】

根据图示数据可知选项 A 正确；对于选项 B： $1935.5 \times 2 = 3871 < 5720.9$ ，正确；对于选项 C：

$16635.3 \times 1.5 > 23595.8$ ，故 C 不正确；对于选项 D： $23595.8 \times \frac{1}{3} \approx 7865 > 5720.9$ ，正确.选 C.

【点睛】

本题主要考查柱状图是识别和数据分析，题目较为简单.

8、C

【解析】

根据全称量词命题的否定是存在量词命题，即得答案.

【详解】

Q 全称量词命题的否定是存在量词命题，且命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$ ，

$$\therefore \neg p: \exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定，属于基础题.

9、B

【解析】

分别求得所有基本事件个数和满足题意的基本事件个数，根据古典概型概率公式可求得结果.

【详解】

从“八音”中任取不同的“两音”共有 $C_8^2 = 28$ 种取法；

“两音”中含有打击乐器的取法共有 $C_8^2 - C_4^2 = 22$ 种取法；

$$\therefore \text{所求概率 } p = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查古典概型概率问题的求解，关键是能够利用组合的知识求得基本事件总数和满足题意的基本事件个数.

10、A

【解析】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，根据已知条件判断出 $g(x)$ 的单调性. 根据 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，求得 $f(2)$ 的值，

由此化简不等式 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 求得不等式的解集.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，依题意可知 $g'(x) = \frac{(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x)}{e^x} > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 R 上递增. 由于

$$y = f(x+2) - e^3 \text{ 是奇函数，所以当 } x=0 \text{ 时， } y = f(2) - e^3 = 0，\text{ 所以 } f(2) = e^3，\text{ 所以 } g(2) = \frac{2 \times e^3}{e^2} = 2e.$$

由 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 得 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x} < 2e = g(2)$ ，所以 $x < 2$ ，故不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查构造函数法解不等式，考查利用导数研究函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

11、B

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/946054111222011000>