

2023-2024 学年安徽省安庆第二中学第二次高考模拟高三数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 将函数 $y = \sin(3x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度后，得到函数 $f(x)$ 的图象，则“ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $f(x)$ 是偶函数”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

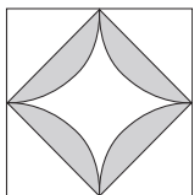
2. 已知集合 $A = \{y | y = |x| - 1, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 则下列结论正确的是（ ）

- A. $-3 \in A$ B. $3 \notin B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup B = B$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 若 F 到直线 $2bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$, 则 E 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4. 蒙特卡洛算法是以概率和统计的理论、方法为基础的一种计算方法，将所求解的问题同一定的概率模型相联系，用均匀投点实现统计模拟和抽样，以获得问题的近似解，故又称统计模拟法或统计实验法。现向一边长为 $2a$ 的正方形模型内均匀投点，落入阴影部分的概率为 p , 则圆周率 $\pi \approx$ ()



- A. $4p + 2$ B. $4p + 1$
C. $6 - 4p$ D. $4p + 3$

5. 已知命题 $p: \forall x > 0, \ln(x+1) > 0$; 命题 $q: \text{若 } a > b, \text{ 则 } a^2 > b^2$, 下列命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge \neg q$ C. $\neg p \wedge q$ D. $\neg p \wedge \neg q$

6. 若复数 $z = \frac{a-i}{1+i}$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-1,1)$ B. $(-\infty,-1)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(0,+\infty)$

7. 在复平面内, 复数 $z = \frac{2-i}{i}$ (i 为虚数单位) 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

8. 已知 $\vec{a} = (2 \sin \frac{\omega x}{2}, \cos \frac{\omega x}{2})$, $\vec{b} = (\sqrt{3} \cos \frac{\omega x}{2}, 2 \cos \frac{\omega x}{2})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ 在区间 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上恰有 3 个极值点, 则正实数 ω 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{8}{5}, \frac{5}{2})$ B. $[\frac{7}{4}, \frac{5}{2})$ C. $[\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2]$

9. 已知 A, B, C, D 是球 O 的球面上四个不同的点, 若 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$, 且平面 $DBC \perp$ 平面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

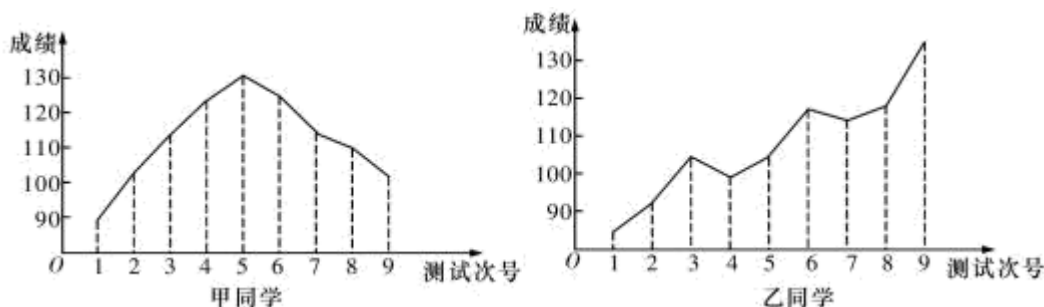
- A. $\frac{20\pi}{3}$ B. $\frac{15\pi}{2}$ C. 6π D. 5π

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) - a = 0$ 有四个不同的根, 记最大的根的所有取值为集合 D , 则“函

数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩 (单位: 分) 进行统计得到折线图, 下面是关于这两位同学的数学成绩分析.



- ①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性, 故平均成绩为 130 分;
②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计, 估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内;
③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性, 且为正相关;
④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步.

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

12. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于 ()
- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x) = \sin[\frac{\pi}{3}(x+1)] - \sqrt{3} \cos[\frac{\pi}{3}(x+1)]$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2020) =$ _____
14. 已知函数 $f(x) = x - m|\ln x|$ 恰好有 3 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为_____

15. 下表是关于青年观众的性别与是否喜欢综艺“奔跑吧，兄弟”的调查数据，人数如下表所示：

	不喜欢	喜欢
男性青年观众	40	10
女性青年观众	30	80

现在要在所有参与调查的人中用分层抽样的方法抽取 n 个人做进一步的调研，若在“不喜欢的男性青年观众”的人中抽取了 8 人，则 n 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x) = \cos x - f(-x)$, 且 $f'(x) + \frac{\sin x}{2} < 0$, 则满足 $f(x + \pi) + f(x) \leq 0$ 的 x 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = |x + a| + |x - 1| (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;
- (2) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \geq 2$, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 在国家“大众创业，万众创新”战略下，某企业决定加大对某种产品的研发投入.为了对新研发的产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格试销，得到一组检测数据如表所示：

试销价格 x (元)	4	5	6	7	8	9
产品销量 y (件)	89	83	82	79	74	67

已知变量 x, y 且有线性负相关关系，现有甲、乙、丙三位同学通过计算求得回归直线方程分别为:甲 $\hat{y} = 4x + 53$; 乙

乙 $y = -4x + 105$ ；丙 $y = -4.6x + 104$ ，其中有且仅有一位同学的计算结果是正确的。

- (1) 试判断谁的计算结果正确？
- (2) 若由线性回归方程得到的估计数据与检测数据的误差不超过1，则称该检测数据是“理想数据”，现从检测数据中随机抽取3个，求“理想数据”的个数 X 的分布列和数学期望。

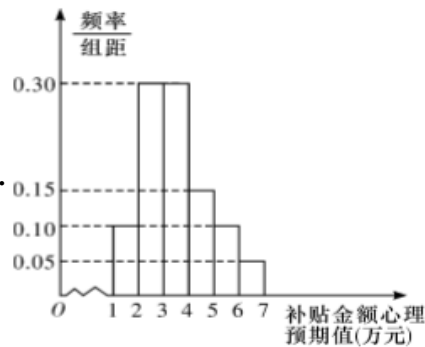
19. (12分) 已知 $f(x) = e^x - mx$.

- (1) 若曲线 $y = \ln x$ 在点 $(e^2, 2)$ 处的切线也与曲线 $y = f(x)$ 相切，求实数 m 的值；
- (2) 试讨论函数 $f(x)$ 零点的个数.

20. (12分) 已知抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ ，过点 $C(-2, 0)$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点，坐标原点为 O ，
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12$.

- (1) 求抛物线的方程；
- (2) 当以 AB 为直径的圆与 y 轴相切时，求直线 l 的方程.

21. (12分) 购买一辆某品牌新能源汽车，在行驶三年后，政府将给予适当金额的购车补贴.某调研机构对拟购买该品牌汽车的消费者，就购车补贴金额的心理预期值进行了抽样调查，其样本频率分布直方图如图所示



- (1) 估计拟购买该品牌汽车的消费群体对购车补贴金额的心理预期值的方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；
- (2) 将频率视为概率，从拟购买该品牌汽车的消费群体中随机抽取4人，记对购车补贴金额的心理预期值高于3万元的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) 统计最近5个月该品牌汽车的市场销售量，得其频数分布表如下：

月份	2018.11	2018.12	2019.01	2019.02	2019.03
销售量（万辆）	0.5	0.6	1.0	1.4	1.7

试预计该品牌汽车在2019年4月份的销售量约为多少万辆？

附：对于一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别

$$\text{为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

22. (10分) 某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律，据统计该地区蜻蜓有 A, B 两种，且这两种的个体数量大致相等，记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长(单位: mm) 分别为随机变量 X, Y ，其中 X 服从正态分布 $N(45, 25)$ ， Y 服从正态分布 $N(55, 25)$ 。

(I) 从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只，求这只蜻蜓的翼长在区间 $[45, 55]$ 的概率；

(II) 记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z ，若用正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 来近似描述 Z 的分布，请你根据 (I) 中的结果，求参数 μ_0 和 σ_0 的值 (精确到 0.1)；

(III) 在 (II) 的条件下，从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只，记这 3 只中翼长在区间 $[42.2, 57.8]$ 的个数为 W ，求 W 的分布列及数学期望 (分布列写出计算表达式即可)。

注:若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - 0.64\sigma \leq X \leq \mu + 0.64\sigma) \approx 0.4773$ ， $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ，

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9546$ 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

求出函数 $y = f(x)$ 的解析式，由函数 $y = f(x)$ 为偶函数得出 φ 的表达式，然后利用充分条件和必要条件的定义判断即可。

【详解】

将函数 $y = \sin(3x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度，得到的图象对应函数的解析式为

$$f(x) = \sin \left[3 \left(x + \frac{\pi}{9} \right) + \varphi \right] = \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} + \varphi \right),$$

若函数 $y = f(x)$ 为偶函数，则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $k = 0$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。

因此，“ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $y = f(x)$ 是偶函数”的充分不必要条件。

故选：A.

【点睛】

本题考查充分不必要条件的判断，同时也考查了利用图象变换求三角函数解析式以及利用三角函数的奇偶性求参数，考查运算求解能力与推理能力，属于中等题。

2、C

【解析】

试题分析：集合 $A = \{y | y \geq -1\}$ $\therefore B \subseteq A \therefore A \cap B = B$

考点：集合间的关系

3、A

【解析】

由已知可得到直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° ，有 $\frac{2b}{a} = 1$ ，再利用 $a^2 = b^2 + c^2$ 即可解决。

【详解】

由 F 到直线 $2bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ ，得直线 $2bx - ay = 0$ 的倾斜角为 45° ，所以 $\frac{2b}{a} = 1$ ，

即 $4(a^2 - c^2) = a^2$ ，解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的问题，一般求椭圆离心率的问题时，通常是构造关于 a, b, c 的方程或不等式，本题是一道容易题。

4、A

【解析】

计算出黑色部分的面积与总面积的比，即可得解。

【详解】

$$\text{由 } p = \frac{S_{\text{阴}}}{S_{\text{正}}} = \frac{\pi a^2 - 2a^2}{4a^2} = \frac{\pi - 2}{4}, \therefore \pi = 4p + 2.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了面积型几何概型的概率的计算，属于基础题.

5、B

【解析】

解：命题 $p: \forall x > 0, \ln(x+1) > 0$ ，则命题 p 为真命题，则 $\neg p$ 为假命题；

取 $a = -1, b = -2, a > b$ ，但 $a^2 < b^2$ ，则命题 q 是假命题，则 $\neg q$ 是真命题.

$\therefore p \wedge q$ 是假命题， $p \wedge \neg q$ 是真命题， $\neg p \wedge q$ 是假命题， $\neg p \wedge \neg q$ 是假命题.

故选 B.

6、B

【解析】

复数 $z = \frac{a-i}{1+i} = \frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2}i$ ，在复平面内对应的点在第二象限，可得关于 a 的不等式组，解得 a 的范围.

【详解】

$$z = \frac{a-i}{1+i} = \frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2}i,$$

由其在复平面对应的点在第二象限，

$$\text{得 } \begin{cases} a-1 < 0 \\ a+1 < 0 \end{cases}, \text{ 则 } a < -1.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了复数的运算法则、几何意义、不等式的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

7、C

【解析】

化简复数为 $a+bi$ ($a, b \in R$) 的形式，可以确定 z 对应的点位于的象限.

【详解】

$$\text{解：复数 } z = \frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)i}{i^2} = -(2i-i^2) = -1-2i$$

故复数 z 对应的坐标为 $(-1, -2)$ 位于第三象限

故选：C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的运算，复数和复平面内点的对应关系，属于基础题.

8、B

【解析】

先利用向量数量积和三角恒等变换求出 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1$ ，函数在区间 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上恰有 3 个极值点即为三个最值点， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 解出， $x = \frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$ ，再建立不等式求出 k 的范围，进而求得 ω 的范围.

【详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } f(x) &= \sqrt{3}\sin\omega x + 2\cos\frac{2\omega x}{2} = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x + 1 \\ &= 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1\end{aligned}$$

$$\text{令 } \omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得对称轴 } x = \frac{\pi}{3\omega} + \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}, f(0) = 2,$$

$$\text{又函数 } f(x) \text{ 在区间 } [0, \frac{4\pi}{3}] \text{ 恰有 3 个极值点, 只需 } \frac{\pi}{3\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \leq \frac{4\pi}{3} < \frac{\pi}{3\omega} + \frac{3\pi}{\omega}$$

$$\text{解得 } \frac{7}{4} \leq \omega < \frac{5}{2}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查利用向量的数量积运算和三角恒等变换与三角函数性质的综合问题.

(1)利用三角恒等变换及辅助角公式把三角函数关系式化成 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + t$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi) + t$ 的形式; (2)根据自变量的范围确定 $\omega x + \varphi$ 的范围, 根据相应的正弦曲线或余弦曲线求值域或最值或参数范围.

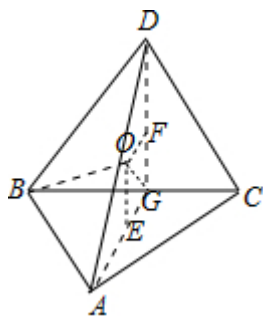
9、A

【解析】

由题意画出图形, 求出多面体外接球的半径, 代入表面积公式得答案.

【详解】

如图,



取 BC 中点 G, 连接 AG, DG, 则 $AG \perp BC$, $DG \perp BC$,

分别取 $\triangle VABC$ 与 $\triangle VDBC$ 的外心 E, F ，分别过 E, F 作平面 ABC 与平面 DBC 的垂线，相交于 O ，
则 O 为四面体 $A-BCD$ 的球心，

由 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$ ，得正方形 $OEGF$ 的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $OG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$\therefore$ 四面体 $A-BCD$ 的外接球的半径 $R = \sqrt{OG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ，

$\therefore$ 球 O 的表面积为 $4\pi \times \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = \frac{20\pi}{3}$ 。

故选 A。

【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查空间想象能力与思维能力，是中档题。

10、A

【解析】

作出函数 $f(x)$ 的图象，得到 $D = (2, 4]$ ，把函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有零点转化为 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有交点，利用导数求出切线斜率，即可求得 k 的取值范围，再根据充分、必要条件的定义即可判断。

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如图，

由图可知， $D = (2, 4]$ ，

函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有 2 个零点，即 $f(x) = kx$ 有两个不同的根，

也就是 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有 2 个交点，则 k 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ；

设过原点的直线与 $y = \log_2 x$ 的切点为 $(x_0, \log_2 x_0)$ ，斜率为 $\frac{1}{x_0 \ln 2}$ ，

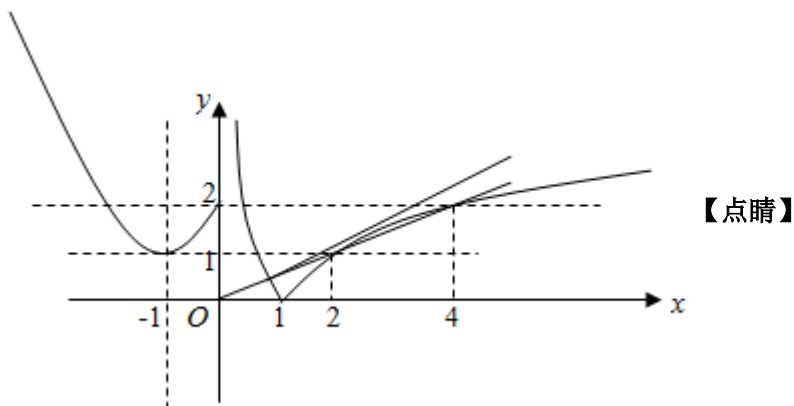
则切线方程为 $y - \log_2 x = \frac{1}{x_0 \ln 2} (x - x_0)$ ，

把 $(0, 0)$ 代入，可得 $-\log_2 x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$ ，即 $x_0 = e$ ， $\therefore$ 切线斜率为 $\frac{1}{e \ln 2}$ ，

$\therefore k$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e \ln 2}\right)$ ，

$\therefore$ 函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件，

故选 A.



本题主要考查了函数零点的判定，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，训练了利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，试题有一定的综合性，属于中档题.

11、C

【解析】

利用图形，判断折线图平均分以及线性相关性，成绩的比较，说明正误即可.

【详解】

- ①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，最高130分，平均成绩为低于130分，①错误；
- ②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间 $[110,120]$ 内，②正确；
- ③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关，③正确；
- ④乙同学在这连续九次测验中第四次、第七次成绩较上一次成绩有退步，故④不正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查折线图的应用，线性相关以及平均分的求解，考查转化思想以及计算能力，属于基础题.

12、B

【解析】

由 M 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，又由点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$ 可得 P 是三角形 ABC 的重心，根据重心的性质，即可求解.

【详解】

解： $\because M$ 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/947036110133006135>