2025年高考数学一轮基础知识复习

第三章

函数的概念与性质

3.4 函数的应用（一）

必备知识解读

知识点　解答函数应用题的基本思想与步骤

例1 (2024·天津市塘沽一中期中)

某公司招聘员工，面试人数按拟录用人数分段计算，计算公式为

$y=\begin{cases}4x,1\leq x<10,x\in\mathbf{N}^*,\\2x+10,10\leq x<100,x\in\mathbf{N}^*,\\1.5x,x\geq 100,x\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$其中，$x$代表拟录用人数，$y$代表面试人数．若应聘的面试人数为60，则该公司拟录用人数为(　C　)

A.15　　B.40　　C.25　　D.130

【解析】令$y = 60$，若$4x = 60$，则$x = 15 > 10$，不合题意；

若$2x + 10 = 60$，则$x = 25$，满足题意；

若$1.5x = 60$，则$x = 40 < 100$，不合题意．

故拟录用人数为25．

例2 某工厂生产某种产品，每件产品的出厂价为50元，成本价为25元，在生产过程中平均每生产一件产品有 0.5立方米污水排出，为了净化环境，工厂设计了两套方案对污水进行处理，并准备实施．

方案一：工厂的污水先净化处理后再排出，每处理1立方米污水所用原料费为2元，每月排污设备损耗费为30 000元.

方案二：工厂将污水排到污水处理厂统一处理，每处理1立方米污水需付14元的排污费．

假设生产出的产品能全部销售出厂，问：

（1）工厂每月生产3 000件产品时，你作为厂长，在不污染环境又节约资金的前提下应选择哪种方案?通过计算加以说明．

【解析】当$x=3\,000$时，$y_1=42\,000, y_2=54\,000,$

$\because y_1<y_2$，$\therefore$ 应选择方案二处理污水．

（2）若工厂每月生产6 000件产品，你作为厂长，又该如何决策呢?

【解析】当$x=6\,000$时，$y_1=114\,000$，$y_2=108\,000$，

$\because y_1>y_2$，$\therefore$ 应选择方案一处理污水．

【解析】设工厂每月生产x件产品时，方案一的利润为y_1元，方案二的利润为y_2元.

由题意知$y_1=(50-25)x-2\times0.5x-30\,000=24x-30\,000,$

$y_2=(50-25)x-14\times0.5x=18x.$

关键能力构建

题型1　一次函数模型的实际应用问题

例3　商店出售茶壶和茶杯，茶壶每只定价20元，茶杯每只定价5元，该商店现推出两种优惠活动：

（1）买一只茶壶赠送一只茶杯；

（2）按购买总价的92%付款．

某顾客需购买茶壶4只，茶杯若干只（不少于4只），若购买x只茶杯时总付款为y元，试分别建立两种优惠活动中y与x之间的函数关系式，并指出如果该顾客需购买茶杯40只，应选择哪种优惠活动?

【**解析**】设优惠活动（1），（2）对应的付款分别为y_1元，y_2元.

由优惠活动（1）得函数关系式为

$y_1 = 20 \times 4 + 5(x - 4)$

$= 5x + 60(x \geq 4，x \in \mathbf{N}_+)$.

由优惠活动（2）得函数关系式为

$y_2 = (20 \times 4 + 5x) \times 92\%$

$= 4.6x + 73.6(x \geq 4，x \in \mathbf{N}_+)$.

当该顾客购买茶杯40只时，采用优惠活动（1）应付款$y_1 = 5 \times 40 + 60 = 260$（元）；采用优惠活动（2）应付款$y_2 = 4.6 \times 40 + 73.6 = 257.6$（元）.由于$y_2 < y_1$　故应选择优惠活动（2）.

题型2　二次函数模型的实际应用问题

例4　A，B两城相距100 km，拟在两城之间距A城x km处建一发电站给A，B两城供电，为保证城市安全，发电站距城市的距离不得小于10 km．已知供电费用等于供电距离(单位：km)的平方与供电量（单位：亿度）之积的0.25倍，若每月向A城供电20亿度，每月向B城供电10亿度.

（1）求x的取值范围；

【解析】x的取值范围为$\{x|10 \leq x \leq 90\}$．

（2）把月供电总费用y表示成关于x的函数；

【解析】

$y = 0.25 \times x^2 \times 20 + 0.25 \times (100 - x)^2 \times 10 = \frac{15}{2}x^2 - 500x + 25\,000(10 \le x \le$

（3）发电站建在距A城多远处,能使供电总费用y最少?

【解析】$y = \frac{15}{2}x^2 - 500x + 25\,000 = \frac{15}{2}\left(x - \frac{100}{3}\right)^2 + \frac{50\,000}{3}$，当$x = \frac{100}{3}$时，$y$取得最小值，$y_{\min} = \frac{50\,000}{3}$.故发电站建在距$A$城$\frac{100}{3}$ km处，能使供电总费用y最少．

【学会了吗|变式题】

1.(2024·湖南省永州市蓝山二中期中)某企业生产一种机器的固定成本为0.5万元，但每生产1百台时，另需增加投入0.25万元．市场对此商品的年需求量为5百台，销售的收入（单位：万元）函数为$R(x)=5x-\frac{1}{2}x^2(0\leq x\leq 5)$，其中$x$是年产量（单位：百台）．

（1）将利润表示为关于年产量的函数；

【答案】依题意得，设利润为$G(x)$,则

$$G(x)=\left(5x-\frac{1}{2}x^2\right)-(0.5+0.25x)=-\frac{1}{2}x^2+4.75x-0.5(0\leq x\leq 5).$$

（2）年产量是多少时，企业所得利润最大？

【答案】由（1）可知，$G(x)=-\frac{1}{2}x^2+4.75x-0.5(0\le x\le 5)$，当$x=4.75$时，$G(x)$有最大值.故当年产量为4.75百台时，企业所得利润最大．

题型3 幂函数模型的实际应用问题

例5 众所周知，大包装商品的成本要比小包装商品的成本低.某种品牌的饼干，其100克装的售价为1.6元，其400克装的售价为4.8元，假定该商品的售价由三部分组成：生产成本、包装成本、利润．生产成本与饼干质量成正比且系数为m，包装成本与饼干质量的算术平方根成正比且系数为n，利润率为20%，试写出该种饼干900克装的合理售价．

【解析】设饼干的质量为x克，则其售价y（单位：元）与x之间的函数解析式为

$y=\left(mx+n\sqrt{x}\right)(1+0.2)$．

由题意得$1.6=\left(100m+\sqrt{100}n\right)(1+0.2)$，

即$\frac{2}{3}=50m+5n$ ①，

$4.8=\left(400m+\sqrt{400}n\right)(1+0.2)$,

即$100m+5n=1$ ②.

由①②解得$m=\frac{1}{150}, n=\frac{1}{15}$.

$\therefore y=\frac{x}{125}+\frac{\sqrt{x}}{12.5}$.当$x=900$时，$y=9.6$．

故这种饼干900克装的售价为9.6元．

题型4 “对勾”函数$y = ax + \frac{b}{x}$模型的实际应用问题

例6 (2024·甘肃省兰州第一中学期末)为了在冬季供暖时减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层．某栋房屋要建造能使用20年的隔热层，每厘米厚的隔热层的建造费用是6万元．该栋房屋每年的能源消耗费用C（单位：万元）与隔热层厚度x(单位：cm)满足关系：$C(x) = \frac{k}{3x+8}(0 \leq x \leq 10)$.若无隔热层，则每年能源消耗费用为5万元．设$f(x)$为隔热层建造费用与使用20年的能源消耗费用之和．

（1）求$C(x)$和$f(x)$的表达式；

【解析】由题意知$C(0) = 5$，代入$C(x)$的关系式，得$k = 40$，因此$C(x) = \frac{40}{3x+8}(0 \leq x \leq 10)$，而每厘米厚的隔热层建造费用为6万元，所以隔热层建造费用与使用20年的能源消耗费用之和为
$f(x) = 20C(x) + 6x = \frac{800}{3x+8} + 6x(0 \leq x \leq 10)$.

（2）当隔热层修建多厚时，总费用$f(x)$最小？并求出最小值．

【解析】$f(x)=\frac{800}{3x+8}+6x=\frac{800}{3x+8}+2(3x+8)-16\geq 2\sqrt{1\,600}-16=64$，当且仅当$\frac{800}{3x+8}=2(3x+8)$,即$x=4$时取等号.

故当隔热层修建4 cm厚时，总费用达到最小，为64万元.

【学会了吗|变式题】

2.(2024·上海市华师大二附中期末)“绿水青山就是金山银山”这一科学论断，成为树立生态文明观、引领中国走向绿色发展之路的理论之基．新能源汽车环保、节能，以电代油，减少排放，既符合我国的国情，也代表了世界汽车产业发展的方向.某新能源公司投资280万元用于新能源汽车充电桩项目，$n(n \leq 16$且$n \in \mathbf{N}^{*})$年内的总维修保养费用为$C(n)=kn^{2}+40n(k \in \mathbf{R})$万元，该项目每年可给公司带来200万元的收入．设到第$n(n \leq 16$且$n \in \mathbf{N}^{*})$年年底，该项目的纯利润（纯利润=累计收入-累计维修保养费-投资成本）为$L(n)$万元．已

知到第3年年底，该项目的纯利润为128万元．

（1）求实数k的值，并求该项目到第几年年底纯利润第一次能达到232万元；

【答案】由题意可知$L(n)=200n-280-kn^2-40n=-kn^2+160n-280$，

$\because L(3)=128$，$\therefore -9k+160\times 3-280=128$，$\therefore k=8$,

$\therefore L(n)=-8n^2+160n-280$.令$-8n^2+160n-280=232$，

即$n^2-20n+64=0$，解得$n=4$或$n=16$.

故该项目到第4年年底纯利润第一次能达到232万元.

（2）到第几年年底，该项目年平均利润（平均利润=纯利润÷ 年数）最大？并求出最大值．

【答案】年平均利润为

$\frac{-8n^2+160n-280}{n}=-8n-\frac{280}{n}+160=-8(n+\frac{35}{n})+160\leq-16\sqrt{n\cdot\frac{35}{n}}+160=-16\sqrt{35}+160$，

当且仅当$n=\frac{35}{n}$，**即**$n=\sqrt{35}$**时取等号，又**$n\in\mathrm{N}^*$，∴ **当**$n=6$**时，取得最大值为**$-8\times\left(6+\frac{35}{6}\right)+160=\frac{196}{3}$．

故当$n=6$**时,年平均利润最大，此时最大值为**$\frac{196}{3}$．

题型5 分段函数模型的实际应用问题

例7 (2024·浙江省金华市期末)“空气质量指数(AQI)”是定量描述空气质量状况的无量纲指数．当AQI大于200时，表示空气重度污染，不宜开展户外活动．某地某天$0\sim24$时的空气质量指数y随时间t变化的趋势由函数$y=\begin{cases}-10t+290,0\leq t\leq 12,\\ 56\sqrt{t}-24,12<t\leq 24\end{cases}$描述，则该天适宜开展户外活动的时长至多为(**C**)

A.5小时　　B.6小时　　C.7小时　　D.8小时

【解析】由题意知，当$0\leq t\leq 12$时，令$-10t+290\leq 200$，解得$9\leq t\leq 12$；当$12<t\leq 24$时，令$56\sqrt{t}-24\leq 200$，解得$12<t\leq 16$.

故该天适宜开展户外活动的时长至多为$3+4=7$（时）．

例8 (2024·河北省石家庄市二十七中月考)国内某企业计划在2024年投资新技术，生产新手机.通过市场分析，生产此款手机全年需投入固定成本250万元，每生产x千部手机，需另投入成本$R(x)$万元，且$R(x)=\begin{cases}10x^2+100x, 0<x<40,\\701x+\frac{10\,000}{x}-9\,450, x\geq 40,\end{cases}$由市场调研知每部手机的售价为0.7万元.且全年内生产的手机当年能全部销售完.

（1）试写出2024年利润$L(x)$（单位：万元）关于年产量x（单位：千部）的函数解析式；

【解析】根据利润=销售额-成本，可得

当$0 < x < 40$时，

$L(x) = 1\,000x \times 0.7 - 250 - (10x^2 + 100x) = -10x^2 + 600x - 250$，

当$x \geq 40$时，

$L(x) = 1\,000x \times 0.7 - 250 - \left(701x + \frac{10\,000}{x} - 9\,450\right) = -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200$，

故$L(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, 0 < x < 40, \\ -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200, x \geq 40. \end{cases}$

（2）当2024年产量为多少千部时，企业所获利润最大？并求出最大利润．

【解析】 由（1）可知，当$0 < x < 40$时，

$L(x) = -10x^2 + 600x - 250 = -10(x-30)^2 + 8\,750$，

当$x = 30$时，$L(x)_{\max} = 8\,750$，

当$x \geq 40$时，$L(x) = -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200 \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{10\,000}{x}} + 9\,200 = 9\,000$，

当且仅当$x = 100$时，等号成立，此时$L(x)_{\max} = 9\,000.$

$\because 9\,000 > 8\,750$，$\therefore$ 产量为100千部时，企业所获利润最大，最大利润是9 000万元．

【学会了吗|变式题】

3.(2024·四川省江油中学月考)“硬科技”是以人工智能、航空航天、生物技术、光电芯片、信息技术、新材料、新能源、智能制造等为代表的高精尖科技，属于由科技创新构成的物理世界，是需要长期研发投入、持续积累才能形成的原创技术，具有极高技术门槛和技术壁垒，难以被复制和模仿.最近十年，我国的一大批自主创新的企业都在打造自己的科技品牌.某高科技企业自主研发了一款具有自主知识产权的高级设备，并从2024年起全面发售．经测算，生产该高级设备每年需投入固定成本1 000万元，每生产x百台高级设备需要另投入成本y万元，且

$y=\begin{cases}2x^2+40x, 0\le x<40,\\ 165x+\frac{18\,000}{x}-2\,250, 40\le x\le 100,\end{cases}$ $100x\in\mathbf{N}$,每百台高级设备售价为160万元，假设每年生产的高级设备能够全部售出，且高级设备年产量最大为10 000台．

（1）求企业所获年利润P（单位：万元）关于年产量x（单位：百台）的函数关系式；

【答案】由题意知，当$0 \leq x < 40$时，

$$P = 160x - \left(2x^2 + 40x\right) - 1\,000 = -2x^2 + 120x - 1\,000,$$

当$40 \leq x \leq 100$时，

$$P = 160x - 165x - \frac{18\,000}{x} + 2\,250 - 1\,000 = -5x - \frac{18\,000}{x} + 1\,250.$$

综上所述，$P = \begin{cases} -2x^2 + 120x - 1\,000, 0 \leq x < 40, \\ -5x - \frac{18\,000}{x} + 1\,250, 40 \leq x \leq 100, \end{cases} 100x \in \mathrm{N}.$

（2）当年产量为多少时，企业所获年利润最大？并求最大年利润．

【答案】由（1）知，当$0 \leq x < 40$时，

$P = -2x^2 + 120x - 1\,000 = -2(x-30)^2 + 800$，$\therefore$ 当$x = 30$时，$P_{max} = 800$．

当$40 \leq x \leq 100$时，

$$P = -5x - \frac{18\,000}{x} + 1\,250 = 1\,250 - 5\left(x + \frac{3\,600}{x}\right) \leq 1\,250 - 5 \times 2\sqrt{x \cdot \frac{3\,600}{x}} = 650$$

当且仅当$x = \frac{3\,600}{x}$，即$x = 60$时等号成立.

又$800 > 650$，故当年产量为30百台时，企业所获年利润最大，且最大年利润为800万元．