函数经典模型题

【模型名称 4】**定义域的求法**

【模型概述】

函数的定义域是研究函数问题的先决条件，它会直接影响函数的性质，所以要树立定义域优先的意识．高考中对定义域的考查常穿插在其他函数问题中，与值域、性质等综合起来考。

解题时需注意函数的定义域是指使函数有意义的自变量的取值范围，求函数定义域的主要步骤是：①写出使函数式有意义的不等式(组)；②解不等式组；③写出函数定义域．(注意用区间或集合的形式写出)

【模型详解】

【模型题】(1)函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为______________.

(2)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是

____________.

【答案】（1）$(-1,1)$；（2）$[0,1)$

【知识点】

【解析】 (1)由$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases}$，得$-1<x<1$.`

(2)由已知有$\begin{cases}0\le 2x\le 2,\\x-1\ne 0,\end{cases}$ 解之得 $0\le x<1$，定义域为$[0,1)$.

【变式 1】 若函数 $f(x)=\dfrac{x-4}{mx^2+4mx+3}$的定义域为 R，则实数 m 的取值范围是__________.

【答案】$\left[0，\dfrac{3}{4}\right)$

【解析】 $f(x)$的定义域为 **R**，即 $mx^2+4mx+3\ne 0$ 恒成立.

①当 $m=0$ 时，符合条件.

②当 $m\ne 0$ 时，$\Delta=(4m)^2-4\times m\times 3<0$，

即 $m(4m-3)<0$，$\therefore 0<m<\dfrac{3}{4}$.

综上所述，m 的取值范围是$\left[0，\dfrac{3}{4}\right)$.

【知识点】

[redacted]

【变式 2】若函数 $y=f(x^2)$的定义域是[0,2]，则函数 $g(x)=\dfrac{f(3x)}{1+\lg x}$ 的定义域是____________

【答案】$\left[0,\dfrac{1}{10}\right)\cup\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{4}{3}\right]$

【解析】由题意得 $\begin{cases}0\le 3x\le 4\\ \lg x\ne -1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}0\le x\le \dfrac{4}{3}\\ x\ne \dfrac{1}{10}\end{cases}$ ∴定义域为 $\left[0,\dfrac{1}{10}\right)\cup\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{4}{3}\right]$

【知识点】

[redacted]

【小试牛刀】

1．若函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 的定义域为 R，则 a 的取值范围为________.

【答案】$[-1,0]$

【解析】 由题意知 $2^{x^2+2ax-a}-1\ge 0$ 恒成立．∴$x^2+2ax-a\ge 0$ 恒成立，

∴$\varDelta=4a^2+4a\le 0$，∴$-1\le a\le 0$.

[redacted]

2．设全集为 R，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt[4]{4-x^2}$ 的定义域为 M，则 $C_{\mathbf{R}}M$ 为________

【答案】$(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup(2,+\infty)$

【解析】由 $\begin{cases}x+1>0,\\ \ln(x+1)\ne 0,\\ 4-x^2\ge 0\end{cases}$ 得 $-1<x\le 2$，且 $x\ne 0$. $\therefore M=(-1,0)\cup(0,2]$

$\therefore C_R M=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup(2,+\infty)$

[redacted]

【模型名称 5】值域的求法

【模型概述】

函数问题历来都是高考中的重点内容，也是平时教学中的一个重难点，其中一类重要的考查形式就是求函数的值域或是最值问题，以及由此变化而来的恒成立问题，求参数范围问题等其他题型。函数的值域与最值是两个既有联系又有区别的不同的概念，一般说来，求出了一个函数的最值，未必能确定该函数的值域，反之，一个函数的值域被确定，这个函数也未必有最大值或最小值。但是，在许多常见的函数中，函数的值域与最值的求法是相通的、类似的.

关于求函数值域与最值的方法也是多种多样的，但是有许多方法是类似的。归纳起来，常用的方法有：观察法、配方法、换元法、反表示法、判别式法、基本不等式法、利用函数的单调性、利用已知函数的有界性、数形结合法等，在选择方法时，要注意所给函数表达式的结构，不同的结构选择不同的解法。

【模型详解】

【模型题】求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$；　　(2) $y=2x-1-\sqrt{13-4x}$.

（3）$y=\log_3x+\log_x3-1$.　　（4）$y=\ln(-x^2+2x)$

（5）$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

【答案】（1）$\left[-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$；（2）$\left(-\infty,\ \dfrac{11}{2}\right]$；（3）$(-\infty,\ -3]\cup[1,\ +\infty)$；

（4）$(-\infty,0]$；（5）$(-1,1)$

【解析】(1)方法一　(常数分离法、配方法)

$\because y=1-\dfrac{1}{x^2-x+1}$，

又 $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{x^2-x+1}\leq\dfrac{4}{3}$，$\therefore -\dfrac{1}{3}\leq y<1$.

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$.

方法二　(判别式法)

由 $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$，$x\in R$，

得$(y-1)x^2+(1-y)x+y=0$.

又∵$x\in R$，∴$\varDelta=(1-y)^2-4y(y-1)\geq 0$ 且 $y-1\neq 0$

解得$-\dfrac{1}{3}\leq y\leq 1$，$y\neq 1$

综上得$-\dfrac{1}{3}\leq y<1$.∴函数的值域为$\left[-\dfrac{1}{3}，1\right)$.

(2)方法一　(换元法)

设$\sqrt{13-4x}=t$，则 $t\geq 0$，$x=\dfrac{13-t^2}{4}$，

于是 $f(x)=g(t)=2\cdot\dfrac{13-t^2}{4}-1-t$

$=-\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{11}{2}=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+6$，

显然函数 $g(t)$在$[0，+\infty)$上是单调递减函数，

所以 $g(t)\leq g(0)=\dfrac{11}{2}$，

因此原函数的值域是$\left(-\infty，\dfrac{11}{2}\right]$.

方法二　(单调性法)

函数定义域是$\left\{x|x\leq\dfrac{13}{4}\right\}$，

当自变量 x 增大时，$2x-1$ 增大，$\sqrt{13-4x}$减小，

所以 $2x-1-\sqrt{13-4x}$增大，

因此函数 $f(x)=2x-1-\sqrt{13-4x}$在其定义域上是一个单调递增函数，

所以当 $x=\dfrac{13}{4}$时，函数取得最大值 $f\left(\dfrac{13}{4}\right)=\dfrac{11}{2}$，

故原函数的值域是$\left(-\infty，\dfrac{11}{2}\right]$.

(3)(基本不等式法)

函数定义域为$\{x|x\in R，x>0，且 x\neq 1\}$.

当 $x>1$ 时，$\log_3x>0$，

于是 $y=\log_3x+\dfrac{1}{\log_3x}-1\geq 2\sqrt{\log_3x\cdot\dfrac{1}{\log_3x}}-1=1$；

当 $0<x<1$ 时，$\log_3x<0$，于是

$y=\log_3x+\dfrac{1}{\log_3x}-1=-\left[(-\log_3x)+\left(\dfrac{1}{-\log_3x}\right)\right]-1$

$\leq -2-1=-3$.

故函数的值域是$(-\infty，-3]\cup[1，+\infty)$.

（4）（换元法、配方法）$\because -x^2+2x=t>0\ \therefore 0<x<2\ \therefore 0<t\le 1$

$\therefore\ y\in(-\infty,0]$，故函数的值域是$(-\infty,0]$

(4)法一（反表示法）：$\because y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$\therefore e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$.

$\therefore\dfrac{1+y}{1-y}>0$，$\therefore\dfrac{y+1}{y-1}<0$，$\therefore -1<y<1$.

$\therefore$函数$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的值域为$(-1,1)$，无最值.

法二（常数分离法）：$y=\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$.

$\because e^x>0$，$\therefore e^x+1>1.\therefore 0<\dfrac{1}{e^x+1}<1$，$\therefore 0<\dfrac{2}{e^x+1}<2$.

$\therefore -2<-\dfrac{2}{e^x+1}<0$，$\therefore -1<1-\dfrac{2}{e^x+1}<1$，

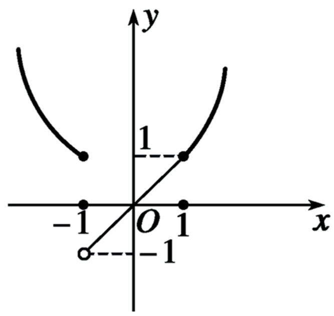
即$-1<y<1$.

$\therefore$函数$y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的值域为$(-1,1)$

【变式 1】 设$f(x)=\begin{cases}x^2，&|x|\ge 1，\\x，&|x|<1，\end{cases}$ $g(x)$是二次函数，若$f(g(x))$的值域是$[0，+\infty)$，则$g(x)$的值域是____________.

【答案】 $[0，+\infty)$

【解析】（数形结合法）$f(x)$的图象如图.



$g(x)$是二次函数，且$f(g(x))$的值域是$[0，+\infty)$，

$\therefore g(x)$的值域是$[0，+\infty)$.

[redacted]

【变式 2】设$f(x)=x^2+ax+3$，当$x\in[-2,2]$时，$f(x)\ge a$恒成立，则实数a的取值范围为________.

【答案】$[-7,2]$

【解析】①若$-\dfrac{a}{2}<-2$即$a>4$，则$f(x)$在$x\in[-2,2]$上的最小值为$f(-2)=7-2a$，于是$7-2a\ge a\Leftrightarrow a\le\dfrac{7}{3}$，矛盾，这种情况不可能.

②若$-2\le-\dfrac{a}{2}\le 2$即$-4\le a\le 4$，则$f(x)$在$x\in[-2,2]$上的最小值为$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=3-\dfrac{a^2}{4}$，