

浙江省宁波市慈溪市 2022-2023 学年高一下学期期末

数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 已知复数 z 满足 $zi = 2 + i$ (i 为虚数单位), 则 $z =$ ()

- A. $1 + 2i$ B. $1 - 2i$ C. $2 + i$ D. $2 - i$

【答案】B

【解析】因为 $zi = 2 + i$, 所以 $z = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)(-i)}{i \cdot (-i)} = 1 - 2i$.

故选: B.

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 1)$, 点 $A(-1, 2)$, 则点 C 的坐标为 ()

- A. $(3, 4)$ B. $(4, 2)$ C. $(2, 6)$ D. $(-4, -2)$

【答案】C

【解析】设点 $C(x, y)$, 又因为 $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3, 4)$,

即 $(x+1, y-2) = (3, 4)$, 所以 $\begin{cases} x+1=3 \\ y-2=4 \end{cases}$, 解得 $x=2, y=6$,

所以点 C 的坐标为 $(2, 6)$.

故选: C.

3. 据慈溪市气象局统计, 2022 年我市每月平均最高气温 (单位: 摄氏度) 分别为 12、11、10、20、23、28、36、36、31、24、23、19, 这组数据的第 60 百分位数是 ()

- A. 19 B. 20 C. 23 D. 24

【答案】D

【解析】将这组数据由小到大排列依次为 10、11、12、19、20、23、23、24、28、31、36、36, 因为 $12 \times 0.6 = 7.2$, 因此, 这组数据的第 60 百分位数为 24.

故选: D.

4. 据长期观察, 某学校周边早上 6 时到晚上 18 时之间的车流量 y (单位: 量) 与时间 t

(单位: h) 满足如下函数关系式: $y = A \sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{13}{8}\pi\right) + 300$ (A 为常数,

$6 \leq t \leq 18$). 已知早上 8:30 (即 $t = 8.5h$) 时的车流量为 500 量, 则下午 15:30 (即 $t = 15.5h$) 时的车流量约为 () (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

A. 441 量

B. 159 量

C. 473 量

D. 127 量

【答案】A

【解析】由题意可得 $500 = A \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 8.5 - \frac{13}{8}\pi\right) + 300$, 可得 $200 = A \sin \frac{\pi}{2}$,

解得 $A = 200$, 所以 $y = 200 \sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{13}{8}\pi\right) + 300$,

当 $t = 15.5h$ 时,

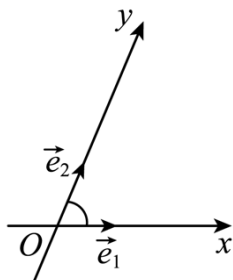
$$y = 200 \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 15.5 - \frac{13}{8}\pi\right) + 300 = 200 \sin \frac{9}{4}\pi + 300 = 100\sqrt{2} + 300$$

$$\approx 100 \times 1.41 + 300 = 441 \text{ (量)}.$$

故选: A.

5. 如图, 设 Ox , Oy 是平面内相交成 θ 角 ($0 < \theta < \pi$) 的两条数轴, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 分别是与 x 轴、 y 轴正方向同向的单位向量. 若向量 $\vec{OQ} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, 则称有序实数对 (x, y) 为向量 $\vec{OQ}$

在坐标系 Oxy 中的坐标, 已知在该坐标系下, 向量 $\vec{OM} = (1, 2)$, $\vec{ON} = (2, 1)$, 若 $\vec{OM} \perp \vec{ON}$, 则 $\cos \theta =$ ()



A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】由题意可得向量 $\vec{OM} = (1, 2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{ON} = (2, 1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$,

高级中学名校试卷

因为 $\vec{OM} \perp \vec{ON}$ ，所以 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2\vec{e}_1^2 + 5\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_2^2$
 $= 2 + 5 \times 1 \times 1 \times \cos \theta + 2 = 4 + 5 \cos \theta = 0$,

所以 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$.

故选：A.

6. 已知某圆锥的底面积为 16π ，且它的外接球的体积为 $\frac{500}{3}\pi$ ，则该圆锥的侧面积为()

A. $16\sqrt{5}\pi$

B. $8\sqrt{5}\pi$ 或 $20\sqrt{5}\pi$

C. $16\sqrt{5}\pi$ 或 $8\sqrt{5}\pi$

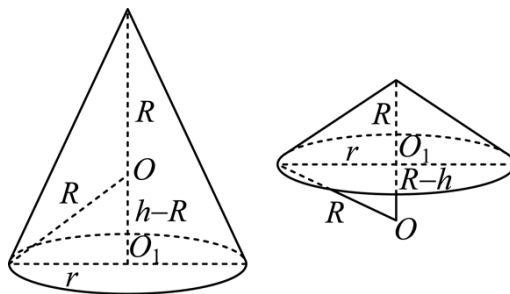
D. $16\sqrt{5}\pi$ 或 $20\sqrt{5}\pi$

【答案】C

【解析】设该圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，高为 h ，圆锥的外接球的半径为 R ，

$$\pi r^2 = 16\pi, \quad r = 4; \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi, \quad R = 5,$$

设圆锥底面圆心为 O_1 ，外接球球心为 O ，如图所示，



则有 $R^2 = (h-R)^2 + r^2$ ，即 $5^2 = (h-5)^2 + 4^2$ ，得 $h^2 - 10h + 16 = 0$ ，解得 $h = 8$ 或 $h = 2$ ，

当 $h = 8$ 时， $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 4\sqrt{5}$ ，此时圆锥的侧面积为 $\pi r l = 16\sqrt{5}\pi$ ；

当 $h = 2$ 时， $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{5}$ ，此时圆锥的侧面积为 $\pi r l = 8\sqrt{5}\pi$ 。

故选：C.

7. 从 2023 年 6 月开始，浙江省高考数学使用新高考全国数学 I 卷，与之前浙江高考数学卷相比最大的变化是出现了多选题. 多选题规定：在每题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对且没有选错的得 2 分. 若某题多选题正确【答案】是 BCD，某同学不会做该题的情况下打算随机选 1 个到 3 个选项作为【答案】，每种【答案】都等可能（例如，选 A，AB，ABC 是等可能的），则该题得 2

分的概率是 ()

- A. $\frac{5}{14}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{7}$

【答案】B

【解析】随机地填涂了1个或2个或3个选项，有A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD共有14种涂法，

得2分的涂法为BC, BD, CD, B, C, D, 共6种，

故能得2分的概率为 $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

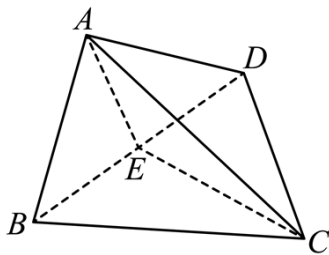
故选：B.

8. 在四面体 $ABCD$ 中，已知二面角 $A-BD-C$ 为直二面角， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle CBD = 45^\circ$ ， $AB = AD = \sqrt{3}$ ，设 $AC = t (t > 0)$. 若满足条件的四面体 $ABCD$ 有两个，则 t 的取值范围是 ()

- A. $(0, \sqrt{3})$ B. $(0, \frac{3}{2})$ C. $(\sqrt{3}, 3)$ D. $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$

【答案】D

【解析】取 BD 中点为 E ，连接 AE, EC ，



因为 $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD = \sqrt{3}$ ， E 为 BD 中点，所以 $AE \perp BD$ ，

且 $AE = BE = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

因为 $AE \subset$ 平面 ABD ，又二面角 $A-BD-C$ 是直二面角，所以 $AE \perp$ 平面 BCD ，

又 $EC \subset$ 平面 BCD ，所以 $AE \perp EC$ ，

在 $\triangle BCE$ 中， $\angle CBD = 45^\circ$ ，由余弦定理得：

$$EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cos 45^\circ = \frac{3}{2} + BC^2 - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + BC^2 - \sqrt{3}BC,$$

$$\text{又 } EC^2 = AC^2 - AE^2 = AC^2 - \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } AC^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + BC^2 - \sqrt{3}BC, \text{ 即 } BC^2 - \sqrt{3}BC + 3 - AC^2 = 0,$$

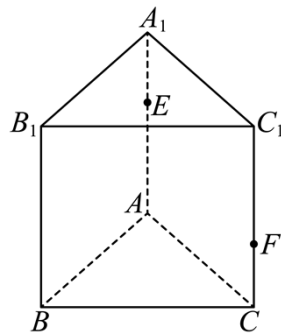
设 $BC = a (a > 0)$, 即 $a^2 - \sqrt{3}a + 3 - t^2 = 0$, 满足条件的四面体 $ABCD$ 有两个,

$$\text{所以 } a \text{ 有两个正根, 所以 } \begin{cases} \Delta = -9 + 4t^2 > 0 \\ 3 - t^2 > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } t \in \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3} \right).$$

故选: D.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求全部选对得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 如图, 在等边正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 (注: 侧棱长和底面边长相等的正三棱柱叫做等边正三棱柱), $AB = 3$, 已知点 E, F 分别在线段 AA_1 和 CC_1 上, 且满足 $A_1E = CF = 1$, 若过 B_1, E, F 三点的平面把等边正三棱柱分成上下两部分, 则 ()



A. 上半部分是四棱锥

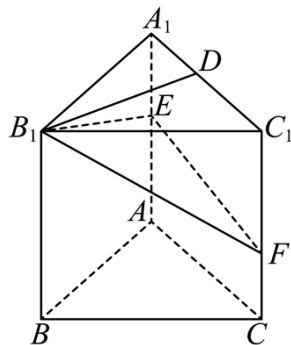
B. 下半部分是三棱柱

C. 上半部分的体积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. 下半部分的体积是 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

【答案】AD

【解析】连接 B_1E, EF, B_1F , 如图,



高级中学名校试卷

对于 A, 以 B_1 为顶点, 面 A_1EFC_1 为底面, 则上半部分 $B_1-A_1EFC_1$ 是四棱锥, 故 A 正确;

对于 B, 因为下半部分 $B_1EF-ABC$ 的两个底面并不平行,

所以下半部分不可能是三棱柱, 故 B 错误;

对于 C, 记 A_1C_1 的中点为 D , 连接 B_1D ,

因为在等边正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=3$,

所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等边三角形, 所以 $B_1D \perp A_1C_1$, $A_1C_1=3$, $B_1D = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

易知 $AA_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1$, $B_1D \subset$ 面 $A_1B_1C_1$, 所以 $B_1D \perp AA_1$,

又 $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$, $AA_1, A_1C_1 \subset$ 面 AA_1C_1C , 所以 $B_1D \perp$ 面 AA_1C_1C ,

而 $A_1E = CF = 1$, 则 $C_1F = CC_1 - CF = 2$, 易知 $A_1C_1 \perp A_1E$, $A_1C_1 \perp C_1F$,

所以梯形 A_1EFC_1 的面积为 $S_{A_1EFC_1} = \frac{1}{2}(A_1E + C_1F) \cdot A_1C_1 = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 3 = \frac{9}{2}$,

故 $V_{B_1-A_1EFC_1} = \frac{1}{3} S_{A_1EFC_1} \cdot B_1D = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 故 C 错误;

对于 D, 易得 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{ABC} \times AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$,

所以 $V_{B_1EF-ABC} = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_{B_1-A_1EFC_1} = \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确.

故选: AD.

10. 已知复数 $z = 2 + \sqrt{x} \cdot i (x > 0)$, 设 $y = z \cdot \bar{z}$, 当 x 取大于 0 的一组实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 时, 所得的 y 值依次为另一组实数 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 , 则 ()

A. 两组数据的中位数相同

B. 两组数据的极差相同

C. 两组数据的方差相同

D. 两组数据的均值相同

【答案】BC

【解析】因为 $z = 2 + \sqrt{x} \cdot i (x > 0)$, 则 $\bar{z} = 2 - \sqrt{x} \cdot i$,

则 $y = z \cdot \bar{z} = (2 + \sqrt{x} \cdot i)(2 - \sqrt{x} \cdot i) = x + 4$,

高级中学名校试卷

所以, $y_n = x_n + 4 (n=1, 2, 3, 4, 5)$, 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$,

则 $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq y_5$,

对于 A 选项, x 值的中位数为 x_3 , y 值的中位数为 y_3 , 且 $y_3 = x_3 + 4 > x_3$, A 错;

对于 B 选项, x 值的极差为 $x_5 - x_1$, y 值的极差为 $y_5 - y_1$,

且 $y_5 - y_1 = (x_5 + 4) - (x_1 + 4) = x_5 - x_1$, 故两组数据的极差相同, B 对;

对于 C 选项, 记 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$,

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} = \frac{(x_1 + 4) + (x_2 + 4) + (x_3 + 4) + (x_4 + 4) + (x_5 + 4)}{5}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} + 4 = \bar{x} + 4,$$

$$x \text{ 值的方差为 } s_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{5},$$

$$y \text{ 值的方差为 } s_y^2 = \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + (y_3 - \bar{y})^2 + (y_4 - \bar{y})^2 + (y_5 - \bar{y})^2}{5}$$

$$= \frac{[(x_1 + 4) - (\bar{x} + 4)]^2 + [(x_2 + 4) - (\bar{x} + 4)]^2 + [(x_3 + 4) - (\bar{x} + 4)]^2 + [(x_4 + 4) - (\bar{x} + 4)]^2 + [(x_5 + 4) - (\bar{x} + 4)]^2}{5}$$

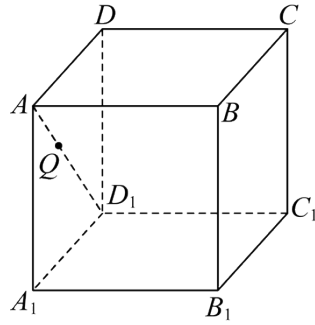
$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{5} = s_x^2,$$

故两组数据的方差相同, C 对;

对于 D 选项, 由 C 选项可知, $\bar{y} = \bar{x} + 4 > \bar{x}$, D 错.

故选: BC.

11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 Q 在线段 AD_1 上运动 (包括端点), 则 ()



- A. 直线 CQ 与直线 B_1D 互相垂直
- B. 直线 CQ 与直线 B_1D 是异面直线
- C. 存在点 Q 使得直线 CQ 与直线 A_1C_1 所成的角为 45°
- D. 当 Q 是线段 AD_1 的中点时, 二面角 $Q-B_1C_1-A_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】ACD

【解析】由 $A_1B_1 \perp$ 面 ADD_1A_1 , $AD_1 \subset$ 面 ADD_1A_1 , 则 $A_1B_1 \perp AD_1$,

又 $AD_1 \perp A_1D$, $A_1B_1 \cap A_1D = A_1$, $A_1B_1, A_1D \subset$ 面 A_1B_1D , 则 $AD_1 \perp$ 面 A_1B_1D ,

由 $B_1D \subset$ 面 A_1B_1D , 则 $AD_1 \perp B_1D$, 同理可证 $AC \perp B_1D$,

由 $AD_1 \cap AC = A$, $AD_1, AC \subset$ 面 AD_1C , 故 $B_1D \perp$ 面 AD_1C ,

又 $CQ \subset$ 面 AD_1C , 则 $B_1D \perp CQ$, 且它们可能相交, A 对, B 错;

由正方体性质易知: $\triangle VAD_1C$ 为等边三角形, 而 Q 在线段 AD_1 上运动 (包括端点),

所以直线 CQ 与直线 AC 所成角的范围为 0° 到 60° 之间 (含端点值), 又 $A_1C_1 \parallel AC$,

所以存在点 Q 使得直线 CQ 与直线 A_1C_1 所成的角为 45° , C 对;

令正方体棱长为 2, 若 Q 与 AD_1 中点 O 重合, E, F 分别为 A_1D_1, B_1C_1 , 连接 OE, EF, OF ,

显然 $\triangle VOD_1C_1 \cong \triangle VOA_1B_1$, 则 $OC_1 = OB_1$, $OA_1 = OD_1$, 故 $OE \perp A_1D_1, OF \perp B_1C_1$,

$A_1D_1 \parallel B_1C_1$,

所以 $OE \perp B_1C_1, OF \perp B_1C_1$, $OE \cap OF = O$, $OE, OF \subset$ 面 EOF , 则 $B_1C_1 \perp$ 面 EOF ,

$EF \subset$ 面 EOF , 故 $B_1C_1 \perp EF$, $OF \perp B_1C_1$, 故 $\angle OFE$ 为二面角 $Q-B_1C_1-A_1$ 的平面角,

且 $OE = 1, EF = 2$,

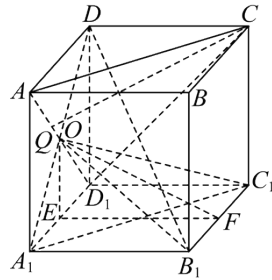
面 $ADD_1A_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$, 面 $ADD_1A_1 \cap$ 面 $A_1B_1C_1D_1 = A_1D_1$, $OE \perp A_1D_1$,

$OE \subset$ 面 ADD_1A_1 ,

所以 $OE \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$, $EF \subset$ 面 $A_1B_1C_1D_1$, 则 $OE \perp EF$, 故

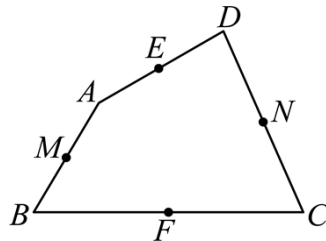
$$OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = \sqrt{5},$$

锐二面角 $Q-B_1C_1-A_1$ 的余弦值为 $\frac{EF}{OF} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, D 对.



故选: ACD.

12. 如图, 在四边形 $ABCD$, 点 E 、 F 、 M 、 N 分别是线段 AD 、 BC 、 AB 、 CD 的中点, 则 ()



A. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB}$

C. 当点 G 满足 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + (2-2\lambda) \overrightarrow{AE}$ ($0 < \lambda < 1$) 时, 点 G 必在线段 BD 上

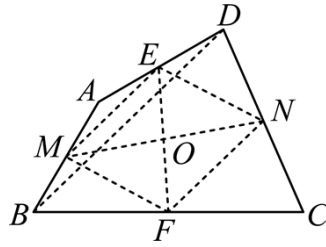
D. 当点 P 在直线 BD 上运动, 且当 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 最小时, 必有 $(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

【答案】ABC

【解析】对于 A 选项, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$, 所以 $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$,

同理 $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, 以上两式相加得 $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$, 所以 A 正确;

对于 B 选项, 连接 EM, BD, FN, EN, MF ,



点 E 、 M 分别是线段 AD 、 AB 的中点，所以 $EM \parallel DB$, $EM = \frac{1}{2}DB$,

同理 $NF \parallel DB$, $NF = \frac{1}{2}DB$, 所以 $EM \parallel NF$, $EM = NF$, 则四边形 $MFNE$ 是平行四边形,

设 EF 与 MN 交于点 O , 则 O 为 EF , MN 的中点,

所以 $\vec{AE} + \vec{AF} = 2\vec{AO}$, $\vec{BM} + \vec{BN} = 2\vec{BO}$,

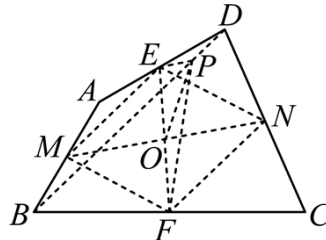
所以 $\vec{AE} + \vec{AF} - \vec{BM} - \vec{BN} = 2\vec{AO} - 2\vec{BO} = 2\vec{AB}$, 所以 B 正确;

对于 C 选项, 因为 $\vec{AG} = \lambda \vec{AB} + (2-2\lambda) \vec{AE}$, 又 $\vec{AD} = 2\vec{AE}$,

所以 $\vec{AG} = \lambda \vec{AB} + (1-\lambda) \vec{AD}$, 所以 $\vec{BG} - \vec{BA} = -\lambda \vec{BA} + (1-\lambda)(\vec{BD} - \vec{BA})$,

整理得 $\vec{BG} = (1-\lambda) \vec{BD}$, 且 $\lambda \in (0,1)$, 所以点 G 在线段 BD 上, 所以 C 正确;

对于 D 选项, EF 的中点为 O ,



因为 $\vec{PE} \cdot \vec{PF} = \frac{1}{4} \left[(\vec{PE} + \vec{PF})^2 - (\vec{PE} - \vec{PF})^2 \right] = \frac{1}{4} \left[(2\vec{PO})^2 - (\vec{FE})^2 \right] = \vec{PO}^2 - \frac{1}{4} \vec{EF}^2$,

又 $\vec{EF}^2$ 不变, 所以 $\vec{PO}^2$ 最小时取得最小值, 当 $\vec{PO} \perp \vec{BD}$ 时, $\vec{PO}^2$ 最小,

此时 $\vec{PO} \cdot \vec{BD} = 0$, 即 $(\vec{PE} + \vec{PF}) \cdot \vec{BD} = 0$, 所以 D 不正确.

故选: ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 据浙江省新高考规则, 每名同学在高一年级结束后, 需要从七门选考科目中选择其中三门作为高考选考科目.

高级中学名校试卷

某同学已经选择了物理、化学两门学科，还需要从生物、技术这两门理科学科和政治、历史、地理这三门文科学科共五门学科中再选择一门，设事件 E = “选择生物学科”， F = “选择一门理科学科”， G = “选择政治学科”， H = “选择一门文科学科”，现给出以下四个结论：

① G 和 H 是互斥事件但不是对立事件；

② F 和 H 是互斥事件也是对立事件；

③ $P(F) + P(G) = 1$ ；

④ $P(E \cup H) = P(E) + P(H)$ 。

其中，正确结论的序号是_____。（请把你认为正确结论的序号都写上）

【答案】②④

【解析】事件 H = “选择一门文科学科”，包含“选择政治学科”，“选择历史学科”，“选择地理学科”，

所以事件 G = “选择政治学科”，包含于事件 H ，故事件 G, H 可以同时发生，不是互斥事件，故①不正确；

事件 F = “选择一门理科学科”，与事件 H = “选择一门文科学科”，不能同时发生，且必有一个事件发生，故 F 和 H 是互斥事件也是对立事件，故②正确；

由题意可知 $P(F) = \frac{2}{5}$, $P(G) = \frac{1}{5}$ ，所以 $P(F) + P(G) = \frac{3}{5} \neq 1$ ，故③不正确；

事件 E = “选择生物学科”，与事件 H = “选择一门文科学科”，不能同时发生，故 E 和 H 是互斥事件，所以 $P(E \cup H) = P(E) + P(H)$ ，故④正确。

故【答案】为：②④。

14. 已知向量 $\vec{b} = (x, y)$ 在向量 $\vec{a} = (2, 0)$ 上的投影向量为 $\vec{c} = (1, 0)$ ，则向量 $\vec{b} =$ _____。

（写出满足条件的一个 $\vec{b}$ 即可）

【答案】(1,1)（【答案】不唯一）

【解析】向量 $\vec{b} = (x, y)$ 在向量 $\vec{a} = (2, 0)$ 上的投影向量为

$$\vec{c} = \left| \vec{b} \right| \cos \angle \vec{a}, \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{2x+0}{4} \cdot (2, 0) = (x, 0) = (1, 0),$$

所以 $x=1$ ，则向量 $\vec{b} = (1, 1)$ （【答案】不唯一）。

故【答案】为：(1,1) (【答案】不唯一) .

15. 若虚数 $1+2i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+mx+n=0(m, n \in \mathbf{R})$ 的一个根, 则 $\frac{m}{n}$ 的值等于_____.

【答案】 $-\frac{2}{5}$

【解析】因为虚数 $1+2i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+mx+n=0(m, n \in \mathbf{R})$ 的一个根,

所以 $1-2i$ 也是实系数方程 $x^2+mx+n=0(m, n \in \mathbf{R})$ 的一个虚数根,

由根与系数的关系得 $-m = (1+2i) + (1-2i) = 2$, 即 $m = -2$;

$n = (1+2i)(1-2i) = 1 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$, 所以 $\frac{m}{n} = -\frac{2}{5}$.

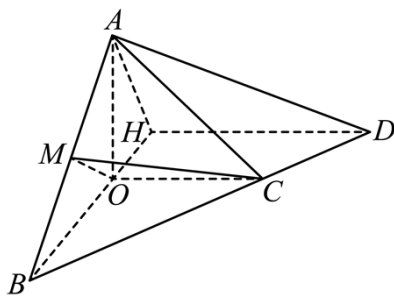
故【答案】为: $-\frac{2}{5}$.

16. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 已知 $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$, $OA = OB = OC$, 若点 D 是线段 BC 延长线上的一动点, 则直线 AD 与平面 AOB 所成的角的正弦值的最大值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】设 β 是直线 AD 与平面 AOB 所成的角, 设 γ 是平面 ABC 与平面 AOB 所成夹角,

取 AB 中点 M ,



因为 $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$, 所以 $OA \perp OC, OB \perp OC$,

因为 $OA \cap OB = O, OA, OB \subset$ 平面 AOB ,

所以 $OC \perp$ 平面 AOB ,

因为 $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$, $OA = OB = OC$,

所以 $AB = AC = BC$, 所以 $OM \perp AB$, $CM \perp AB$,

所以 $\gamma = \angle COM$,

设 $OA = 1$, 则 $AB = AC = BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

所以 $OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $CM = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $OC = 1$,

因为 $OM^2 + OC^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = CM^2$,

所以 $OC \perp OM$,

所以 $\sin \gamma = \frac{OC}{CM} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

又因为 $AD \subset$ 平面 ABC , 所以由最大角定理可知, $0 < \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$,

于是 $\sin \beta \leq \sin \gamma = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 当 $AD \parallel CM$ 时取得“=”, 满足条件.

故【答案】为: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|4\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$.

(1) 求 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$;

(2) 若向量 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线, 求实数 λ 的值.

解: (1) 设向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ,

由 $|4\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ 可得 $16\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$,

因为 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $16 + 4 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$,

所以, $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$, 又因为 $0 \leq \theta \leq \pi$, 则 $\theta = \frac{\pi}{3}$,

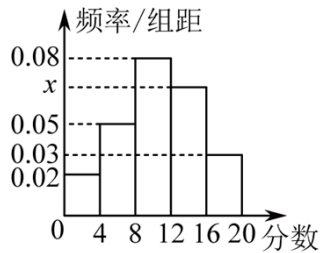
故 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2 \times 1 + 4 = 6$.

(2) 由 (1) 可知, $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线,

因为 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线, 所以存在实数 t , 使得 $\vec{a} + \lambda \vec{b} = t(2\vec{a} - \vec{b})$,

即 $\vec{a} + \lambda \vec{b} = 2t\vec{a} - t\vec{b}$, 所以, $\begin{cases} 2t = 1 \\ -t = \lambda \end{cases}$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$.

18. 第十九届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 在中国杭州举办, 为了了解我市居民对杭州亚运会相关信息和知识的掌握情况, 某学校组织学生开展社会实践活动, 采用问卷的形式随机对我市 100 名居民进行了调查. 为了方便统计分析, 调查问卷满分 20 分, 得分情况制成如下频率分布直方图.



- (1) 求 x 的值;
- (2) 根据频率分布直方图, 估计这 100 名居民调查问卷中得分的
 - (i) 平均值 (各组区间的数据以该组区间的中间值作代表);
 - (ii) 中位数 (结果用分数表示).

解: (1) $(0.02 + 0.05 + 0.08 + x + 0.03) \times 4 = 1$,

所以 $x = 0.07$.

(2) (i) $2 \times 0.02 \times 4 + 6 \times 0.05 \times 4 + 10 \times 0.08 \times 4 + 14 \times 0.07 \times 4 + 18 \times 0.03 \times 4 = 10.64$.

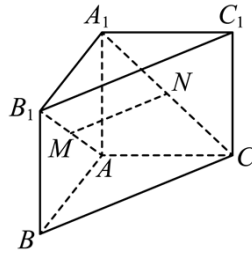
(ii) 因为 $0.02 \times 4 + 0.05 \times 4 = 0.28 < 0.5$,

$0.02 \times 4 + 0.05 \times 4 + 0.08 \times 4 = 0.6 > 0.5$,

所以中位数在 8 和 12 之间,

设中位数是 t , 所以 $0.02 \times 4 + 0.05 \times 4 + (t - 8) \times 0.08 = 0.5$, 可得 $t = \frac{43}{4}$.

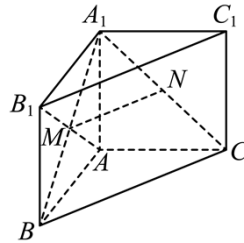
19. 如图, 在堑堵 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 (注: 堑堵是一长方体沿不在同一面上的相对两棱斜解所得的几何体, 即两底面为直角三角形的直三棱柱, 最早的文字记载见于《九章算术》商功章), 已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 2$, 点 M 、 N 分别是线段 B_1A 、 A_1C 的中点.



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值.

解: (1) 证明: 连接 A_1B ,



因为 $AA_1 \parallel BB_1$ 且 $AA_1 = BB_1$, 故四边形 AA_1B_1B 为平行四边形,

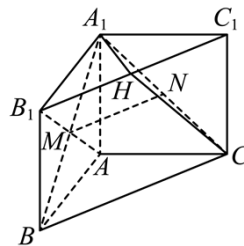
因为 M 为 AB_1 的中点, 则 M 为 A_1B 的中点,

又因为 N 为 A_1C 的中点, 所以, $MN \parallel BC$,

因为 $MN \not\subset$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC .

(2) 取 B_1C_1 中点 H , 由题意可知 $A_1B_1 = A_1C_1 = 2$,

所以 $A_1H \perp B_1C_1$, 且 $A_1B_1 \perp A_1C_1$,



因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $A_1H \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $A_1H \perp AA_1$,

又 $AA_1 \parallel CC_1$, 所以 $A_1H \perp CC_1$,

因为 $B_1C_1 \perp CC_1$, $CC_1, B_1C_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $A_1H \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

连接 CH , 则 $\angle A_1CH$ 是直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成的角,

由题意 $A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 同理可得 $B_1C_1 = 2\sqrt{2}$,

$$\text{则 } A_1H = \frac{1}{2}B_1C_1 = \sqrt{2},$$

因为 $A_1H \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $CH \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 则 $A_1H \perp CH$, 则

$$\sin \angle A_1CH = \frac{A_1H}{A_1C} = \frac{1}{2},$$

因为 $\angle A_1CH \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\angle A_1CH = \frac{\pi}{6}$, 即直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 为了纪念中国古代数学家祖冲之在圆周率上的贡献, 联合国教科文组织第四十届大会上把每年的 3 月 14 日定为“国际数学日”. 2023 年 3 月 14 日, 某学校举行数学文化节活动, 其中一项活动是数独比赛 (注: 数独是源自 18 世纪瑞士的一种数学游戏, 又称九宫格). 甲、乙两位同学进入了最后决赛, 进行数独王的争夺. 决赛规则如下: 进行两轮数独比赛, 每人每轮比赛在规定时间内做对得 1 分, 没做对得 0 分, 两轮结束总得分高的为数独王, 得分相同则进行加赛. 根据以往成绩分析, 已知甲每轮做对的概率为 0.8, 乙每轮做对的概率为 0.75, 且每轮比赛中甲、乙是否做对互不影响, 各轮比赛甲、乙是否做对也互不影响.

(1) 求两轮比赛结束乙得分为 1 分的概率;

(2) 求不进行加赛甲就获得数独王的概率.

解: (1) 设 A_i = “甲第 i 轮做对” ($i=1, 2$), 设 B_i = “乙第 i 轮做对” ($i=1, 2$),

设 C_i = “两轮比赛甲得 i 分” ($i=0, 1, 2$), 设 D_i = “两轮比赛乙得 i 分” ($i=0, 1, 2$).

$$\begin{aligned} P(D_1) &= P(\overline{B_1}B_2 \cup B_1\overline{B_2}) = P(\overline{B_1}B_2) + P(B_1\overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(B_2) + P(B_1)P(\overline{B_2}) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

所以两轮比赛结束乙得分为 1 分的概率为 $\frac{3}{8}$.

(2) 设 E = “不进行加赛甲就获得数独王”.

$$P(D_0) = P(\overline{B_1}\overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$\begin{aligned} P(C_1) &= P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}, \end{aligned}$$

$$P(C_2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25},$$

$$P(E) = P(C_2D_1 \cup C_2D_0 \cup C_1D_0) = P(C_2D_1) + P(C_2D_0) + P(C_1D_0)$$

$$= P(C_2)P(D_1) + P(C_2)P(D_0) + P(C_1)P(D_0)$$

$$= \frac{16}{25} \times \frac{3}{8} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{16} + \frac{8}{25} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{10},$$

所以不进行加赛甲就获得数独王的概率为 $\frac{3}{10}$.

21. 在① $2a - b = 2c \cos B$, ② $\sqrt{3}c \cdot \cos A + a \sin C = \sqrt{3}b$ 这两个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并求解 (1)、(2) 的【答案】.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知_____.

(1) 求角 C ;

(2) 若点 D 满足 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, 且 $CD = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

(注: 如果选择两个条件分别解答, 则按第一个解答计分.)

解: (1) 若选① $2a - b = 2c \cos B$: 由正弦定理得 $2 \sin A - \sin B = 2 \sin C \cos B$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin(B + C)$,

所以 $2 \sin(B + C) - \sin B = 2 \sin C \cos B$,

即 $2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C - \sin B = 2 \sin C \cos B$,

所以 $2 \sin B \cos C = \sin B$, 又 $B \in (0, \pi)$, 有 $\sin B > 0$,

所以 $\cos C = \frac{1}{2}$, 由 $C \in (0, \pi)$, 得 $C = \frac{\pi}{3}$.

若选② $\sqrt{3}c \cdot \cos A + a \sin C = \sqrt{3}b$: 由正弦定理得

$$\sqrt{3} \sin C \cdot \cos A + \sin A \cdot \sin C = \sqrt{3} \sin B,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B = \sin(A + C)$,

所以 $\sqrt{3} \sin C \cos A + \sin A \sin C = \sqrt{3} \sin(A + C)$

即 $\sqrt{3} \sin C \cdot \cos A + \sin A \cdot \sin C = \sqrt{3} \sin A \cdot \cos C + \sqrt{3} \cos A \cdot \sin C$,

所以 $\sin A \cdot \sin C = \sqrt{3} \sin A \cdot \cos C$, 又 $A \in (0, \pi)$, 有 $\sin A > 0$,

所以 $\tan C = \sqrt{3}$, 由 $C \in (0, \pi)$, 得 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 方法一: 由 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$,

$$\text{可得 } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA},$$

$$\text{两边平方可得 } \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA},$$

$$\text{即 } 1 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{4}{9}ab\cos C,$$

所以 $9 = a^2 + 4b^2 + 2ab \geq 6ab$ ，当且仅当 $a = 2b$ 时取“=”，

$$\text{所以 } ab \leq \frac{3}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

方法二：由角 C 余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ③，

由 $\cos \angle CDA + \cos \angle CDB = 0$ 结合余弦定理可得

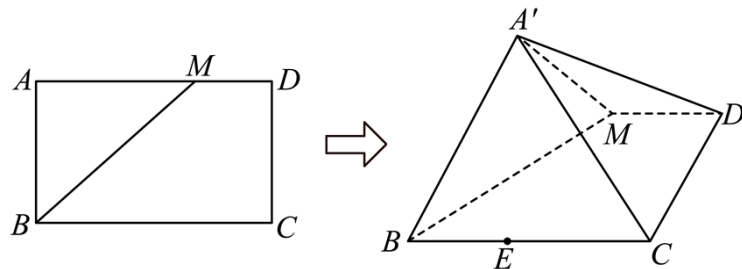
$$\frac{1^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - b^2}{\frac{2c}{3}} + \frac{1^2 + \left(\frac{2c}{3}\right)^2 - a^2}{\frac{4c}{3}} = 0,$$

$$\text{整理得 } 9 + 2c^2 = 3a^2 + 6b^2 \text{ ④},$$

由③可得 $9 = a^2 + 4b^2 + 2ab \geq 6ab$ ，当且仅当 $a = 2b$ 时取“=”，

$$\text{所以 } ab \leq \frac{3}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ 即 } (S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

22. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， M 是线段 AD 上的一动点，将 $\triangle ABM$ 沿着 BM 折起，使点 A 到达点 A' 的位置，满足点 $A' \notin$ 平面 $BCDM$ 且点 A' 在平面 $BCDM$ 内的射影 E 落在线段 BC 上.



(1) 当点 M 与端点 D 重合时，证明： $A'B \perp$ 平面 $A'CD$ ；

(2) 求三棱锥 $E-A'BM$ 的体积的最大值；

(3) 设直线 CD 与平面 $A'BM$ 所成的角为 α ，二面角 $A'-BM-C$ 的平面角为 β ，求 $\sin^2 \alpha \cdot \cos \beta$ 的最大值.

解：(1) 当点 M 与端点 D 重合时，由 $\angle BAD = 90^\circ$ 可知 $A'B \perp A'D$ ，

由题意知 $A'E \perp$ 平面 BCD ， $CD \subset$ 平面 BCD ，所以 $A'E \perp CD$ ，

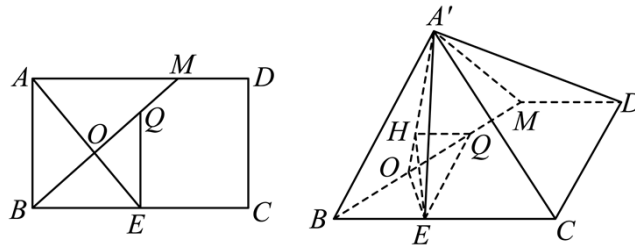
又 $BC \perp CD$ ， $A'E \cap BC = E$ ， $A'E \subset$ 平面 $A'BC$ ， $BC \subset$ 平面 $A'BC$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 $A'BC$ ，又 $A'B \subset$ 平面 $A'BC$ ，可知 $A'B \perp CD$ ，

$A'D \cap CD = D$ ， $CD \subset$ 平面 $A'CD$ ， $A'D \subset$ 平面 $A'CD$ ，

所以 $A'B \perp$ 平面 $A'CD$.

(2) 矩形中作 $AO \perp BM$ ，垂足为点 O ，折起后得 $A'O \perp BM$ ，



由 $A'E \perp$ 平面 BCD ， $BM \subset$ 平面 BCD ，可得 $A'E \perp BM$ ，

所以 $A'E, A'O \subset$ 平面 $A'OE$ ， $A'E \cap A'O = A'$ ，

所以 $BM \perp$ 平面 $A'OE$ ，

$OE \subset$ 平面 $A'OE$ ，可得 $BM \perp OE$ ，

所以 A, O, E 三点共线，

因此 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ABM$ 相似，满足 $\frac{AB}{BE} = \frac{AM}{AB}$ ，

设 $AM = t$ ，所以 $BE = \frac{1}{t}$ ， $BM = \sqrt{t^2 + 1}$ ， $OE = \frac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}}$ ，

$AO = A'O = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$ ， $A'E = \sqrt{A'O^2 - OE^2} = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}$ ，

要使点 A' 射影 E 落在线段 BC 上，则 $AO > OE$ ，所以 $t \in (1, \sqrt{3}]$ ，

所以 $V_{E-A'BM} = V_{A'-BEM} = \frac{1}{3} \cdot A'E \cdot S_{BEM} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}} = \frac{1}{6} \sqrt{-\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/948003032111006101>