

河北省重点高中

高三5月高考模拟数学试题（二）

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = |x-1| + |x+2|\}$ ， $B = \left\{x \left| y = \frac{6}{\sqrt{10-x^2}} \right.\right\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $(\sqrt{10}, +\infty)$ B. $[3, \sqrt{10})$ C. $[3, +\infty)$ D. $(-\sqrt{10}, 3]$

2. 已知复数 $z = 1 + i$ ，则 $\frac{\bar{z} + 3i}{z + 1} =$ ()

- A. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ C. $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

3. 已知圆 O 的半径为 2，弦 MN 的长为 $2\sqrt{3}$ ，若 $\vec{MP} = \vec{PN}$ ，则 $\vec{MO} \cdot \vec{OP} =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ，若 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，则 $a_{2023} =$ ()

- A. 2 B. -2 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (x+2)(x^2 + x + m)$ ，若函数 $f(x)$ 有一极大值点为 -2，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-2, +\infty)$ B. $(-4, -2]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -2)$

6. 已知实数 $a > b > 0$ ，则下列选项可作为 $a - b < 1$ 的充分条件的是 ()

A. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$ B. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ C. $2^a - 2^b = 1$ D. $\log_2 a - \log_2 b = 1$

7. 已知四面体 $ABCD$ 满足 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\cos \angle CAD = \frac{1}{3}$, $\cos \angle DAB = \frac{1}{4}$, $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = 2$, 则

点 A 到平面 BCD 的距离为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8. 在边长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是 BC 的中点, 点 P 是侧面 ABB_1A_1 内的动点 (含四条边), 且 $\tan \angle APD = 4 \tan \angle EPB$, 则 P 的轨迹长度为 ()

A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{2\pi}{9}$ C. $\frac{4\pi}{9}$ D. $\frac{8\pi}{9}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 甲袋中有 20 个红球, 10 个白球, 乙袋中红球、白球各有 10 个, 两袋中的球除了颜色有差别外, 再没有其他差别. 现在从两袋中各换出 1 个球, 下列结论正确的是 ()

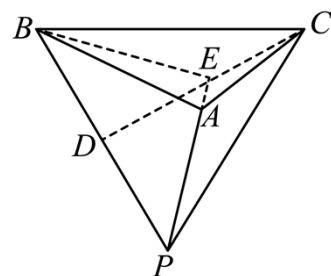
A. 2 个球都是红球的概率为 $\frac{1}{3}$

B. 2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{2}$

C. 不都是红球的概率为 $\frac{2}{3}$

D. 都不是红球的概率为 $\frac{2}{3}$

10. 如图所示, 有一个棱长为 4 的正四面体 $P - ABC$ 容器, D 是 PB 的中点, E 是 CD 上的动点, 则下列说法正确的是 ()



A. 直线 AE 与 PB 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

B. V_{ABE} 的周长最小值为 $4 + \sqrt{34}$

C. 如果在这个容器中放入 1 个小球（全部进入），则小球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. 如果在这个容器中放入 4 个完全相同的小球（全部进入），则小球半径的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}-2}{5}$

11. 已知函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ ， $f(x+y)+f(x)+f(y)=f(x) \cdot f(y)+2$ ；②若 $x \neq y$ ，则 $f(x) \neq f(y)$ 。则（ ）

A. $f(0)$ 的值为 2

B. $f(x)+f(-x) \geq 4$

C. 若 $f(1)=3$ ，则 $f(3)=9$

D. 若 $f(4)=10$ ，则 $f(-2)=4$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l 。斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线经过焦点 F ，交 C 于点 A ，交准线 l 于点 B （ A, B 在 x 轴的两侧），若 $|AB|=16$ ，则抛物线 C 的方程为_____。

13. 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，四位同学给出了四个说法：

小明：双曲线 C 的实轴长为 8；

小红：双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 3；

小强：双曲线 C 的离心率为 $\frac{3}{2}$ ；

小同：双曲线 C 上的点到焦点距离的最小值为 1；

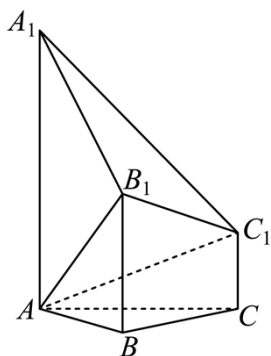
若这 4 位同学中只有 1 位同学的说法错误，则说法错误的是_____；双曲线 C 的方程为_____。（第一空的横线上填“小明”、“小红”、“小强”或“小同”）

14. 设 A, B, C, D 为平面内四点，已知 $|\overrightarrow{AB}|=2$ ， $|\overrightarrow{AC}|=1$ ， $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 60° ， M 为 AB 的中点， $|\overrightarrow{MD}|=1$ ，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的最大值为_____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图，已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ ， A_1A, B_1B, C_1C 均垂直于平面

ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $A_1A = 4$ ， $C_1C = 1$ ， $AB = BC = B_1B = 2$ 。



(I) 求证: $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;

(II) 求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角的正弦值.

16. (15 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3$, 令 $a_n \cdot b_n = a_{n+2} \cdot b_{n+1}$, 求证: $\sum_{k=1}^n b_k < \frac{9}{2}$.

17. (15 分) 已知抛物线 $C: x^2 = -4y$, 直线 l 垂直于 y 轴, 与 C 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 过点 N 且平行于 y 轴的直线与直线 OM 交于点 P , 记动点 P 的轨迹为曲线 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 点 A 在直线 $y = -1$ 上运动, 过点 A 作曲线 E 的两条切线, 切点分别为 P_1, P_2 , 在平面内是否存在定点 B , 使得 $AB \perp P_1P_2$? 若存在, 请求出定点 B 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

18. (17 分) 现有甲、乙、丙三个工厂生产某种相同的产品进入市场, 已知甲、乙、丙三个工厂生产的产品能达到优秀等级的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$, 现有某质检部门, 对该产品进行质量检测, 首先从三个工厂中等可能地随机选择一个工厂, 然后从该工厂生产的产品抽取一件进行检测.

(1) 若该质检部门的一次抽检中, 测得的结果是该件产品为优秀等级, 求该件产品是从乙工厂抽取的概率;

(2) 因为三个工厂的规模大小不同, 假设三个工厂进入市场的产品的比例为 $2:1:1$, 若该质检部门从已经进入市场的产品中随机抽取 10 件产品进行检测, 求能达到优秀等级的产品的件数 ξ 的分布列及数学期望.

19. (17分) 数学归纳法是一种数学证明方法, 通常被用于证明某个给定命题在整个(或者局部)自然数范围内成立. 证明分为下面两个步骤: 1. 证明当 $n = n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) 时命题成立; 2. 假设 $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, 且 $k \geq n_0$) 时命题成立, 推导出在 $n = k+1$ 时命题也成立.

用模取余运算: $a \bmod b = c$ 表示“整数 a 除以整数 b , 所得余数为整数 c ”. 用带余除法可表示为:

被除数 = 除数 $\times$ 商 + 余数, 即 $a = b \times r + c$, 整数 r 是商. 如 $7 = 3 \times 2 + 1$, 则 $7 \bmod 3 = 1$; 再如

$3 = 7 \times 0 + 3$, 则 $3 \bmod 7 = 3$. 当 $a \bmod b = 0$ 时, 则称 b 整除 a .

现从序号分别为 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的 $n+1$ 个人中选出一名幸运者, 为了增加趣味性, 特制定

一个遴选规则: 大家按序号围成一个圆环, 然后依次报数, 每报到 m ($m \geq 2$) 时, 此人退出圆环;

直到最后剩 1 个人停止, 此人即为幸运者, 该幸运者的序号下标记为 $f(n+1, m)$. 如 $f(1, m) = 0$ 表

示当只有 1 个人时幸运者就是 a_0 ; $f(6, 2) = 4$ 表示当有 6 个人而 $m = 2$ 时幸运者是 a_4 ; $f(6, 3) = 0$

表示当有 6 个人而 $m = 3$ 时幸运者是 a_0 .

(1) 求 $10 \bmod 3$;

(2) 当 $n \geq 1$ 时, $f(n+1, m) = (f(n, m) + m) \bmod (n+1)$, 求 $f(5, 3)$;

当 $n \geq m$ 时, 解释上述递推关系式的实际意义;

(3) 由 (2) 推测当 $2^k \leq n+1 < 2^{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) 时, $f(n+1, 2)$ 的结果, 并用数学归纳法证明.

河北省重点高中 高三 5 月高考模拟数学试题 (二)

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y | y = |x-1| + |x+2|\}$, $B = \left\{x \left| y = \frac{6}{\sqrt{10-x^2}} \right.\right\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(\sqrt{10}, +\infty)$ B. $[3, \sqrt{10})$ C. $[3, +\infty)$ D. $(-\sqrt{10}, 3]$

【答案】B

【解析】

【分析】由绝对值三角不等式求得 $A = [3, +\infty)$, 然后由解析式有意义求得 $B = (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$, 再由交集运算可得.

【详解】由 $|x-1| + |x+2| \geq |(x-1) - (x+2)| = 3$,

当且仅当 $(x-1)(x+2) \leq 0$, 即 $-2 \leq x \leq 1$ 时, 等号成立, 得 $A = [3, +\infty)$;

由 $10 - x^2 > 0$ 得 $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$, 即 $B = (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$.

所以 $A \cap B = [3, \sqrt{10})$.

故选: B

2. 已知复数 $z = 1 + i$, 则 $\frac{\bar{z} + 3i}{z + 1} =$ ()

- A. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$ B. $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ C. $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

【答案】B

【解析】

【分析】根据共轭复数定义, 利用除法运算法则计算可得结果.

【详解】由 $z = 1 + i$ 可得 $\bar{z} = 1 - i$,

所以 $\frac{\bar{z} + 3i}{z + 1} = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 4i - 2i^2}{4 - i^2} = \frac{4 + 3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$,

故选: B

3. 已知圆 O 的半径为 2, 弦 MN 的长为 $2\sqrt{3}$, 若 $2\vec{MP} = \vec{PN}$, 则 $\vec{MO} \cdot \vec{OP} =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

【答案】B

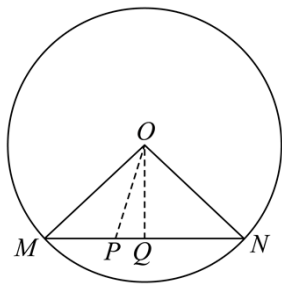
【解析】如图，设 MN 的中点为 Q ，连接 OQ ，则 $OQ \perp MN$ 。由 $|\vec{NO}| = |\vec{MO}| = 2$ ，

$|\vec{MN}| = 2\sqrt{3}$ ，得 $|MQ| = \sqrt{3}$ ， $|OQ| = 1$ ，所以 $\angle OMQ = \frac{\pi}{6}$ ， $|\vec{MP}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $|PQ| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\angle POQ = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\angle POM = \frac{\pi}{6}$ ， $|\vec{OP}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\vec{MO} \cdot \vec{OP} = -\vec{OM} \cdot \vec{OP} = -|\vec{OM}| |\vec{OP}| \cos \frac{\pi}{6} = -2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2$ 。

故选：B。



4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ，若 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，则 $a_{2023} =$ ()

A. 2 B. -2 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

因为 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，

所以 $a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ， $a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-2} = -1$ ， $a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 的周期为 3。

所以 $a_{2023} = a_{3 \times 674 + 1} = a_1 = \frac{1}{2}$ 。

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (x+2)(x^2+x+m)$ ，若函数 $f(x)$ 有一极大值点为 -2 ，则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(-2, +\infty)$ B. $(-4, -2]$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -2)$

【答案】D

【详解】由题意 $f'(x) = (x+2)(x^2+x+m)$ ，令 $g(x) = x^2+x+m$ ，

若 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 易知: 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时 $f'(x) \leq 0$, 当 $x \in (-2, +\infty)$ 时 $f'(x) \geq 0$,

所以 -2 是 $f(x)$ 的极小值点, 不合题意, 故 $g(x)$ 有两个不同零点.

设 $g(x)$ 的两个零点分别为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则 $f'(x) = (x - x_1)(x + 2)(x - x_2)$,

结合三次函数的图象与性质知: $x_1 < -2 < x_2$,

在 $(-\infty, x_1)$ 、 $(-2, x_2)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(x_1, -2)$ 、 $(x_2, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

-2 是 $f(x)$ 的极大值点, 符合题意,

此时需 $g(-2) = 2 + m < 0$, 得 $m < -2$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2)$.

故选: D.

6. 已知实数 $a > b > 0$, 则下列选项可作为 $a - b < 1$ 的充分条件的是 ()

A. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$ B. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ C. $2^a - 2^b = 1$ D. $\log_2 a - \log_2 b = 1$

【答案】C

【解析】取 $a = 4, b = 1$, 排除 A; 取 $a = 2, b = 1$, 排除 B; 取 $a = 4, b = 2$, 排除 D;

由 $2^a - 2^b = 1$, 可推出 $2^a = 2^b + 1 < 2^{b+1}$, 即 $a < b + 1$. 选 C.

7. 已知四面体 $ABCD$ 满足 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}, \cos \angle CAD = \frac{1}{3}, \cos \angle DAB = \frac{1}{4}, AB = 2, AC = 3, AD = 2$, 则

点 A 到平面 BCD 的距离为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【答案】D

【解析】由题意得 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3, \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 2, \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 1$, 设平面 BCD 的一个法向量

$$\vec{n} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}, \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0, \\ (x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = 0, \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{cases} -x + 6y + z = 0, \\ -3x - y + 3z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 解得 } x = 1, y = 0, \text{ 所以 } \vec{n} = \vec{AB} + \vec{AD}, \text{ 所以}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cos \angle BAD} = \sqrt{10}, \vec{AB} \cdot \vec{n} = 4 + 1 = 5, \text{ 设点 } A \text{ 到平面 } BCD \text{ 的距离为 } h$$

，则 $h = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.

8. 在边长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 BC 的中点，点 P 是侧面 ABB_1A_1 内的动点（含四条边），且 $\tan \angle APD = 4 \tan \angle EPB$ ，则 P 的轨迹长度为（ ）

A. $\frac{\pi}{9}$

B. $\frac{2\pi}{9}$

C. $\frac{4\pi}{9}$

D. $\frac{8\pi}{9}$

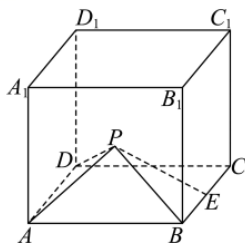
【答案】D

【解析】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，由于 $DA \perp$ 平面 A_1ABB_1 ， $CB \perp$ 平面 A_1ABB_1 ，

在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 和 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中， $\tan \angle APD = \frac{AD}{AP}$ ， $\tan \angle EPB = \frac{BE}{PB}$ ，

由 $\tan \angle APD = 4 \tan \angle EPB$ ， $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$ ， $\therefore PA = \frac{1}{2}PB$ ，

在平面 ABB_1A_1 ，以 A 为坐标原点，以 AB ， AA_1 为 x, y 轴的正方向，建立平面直角坐标系，



设 $P(x, y)$ ，则 $A(0, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，

则由 $PA = \frac{1}{2}PB$ 可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ ，

化简可得 $\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{64}{9}$ ，

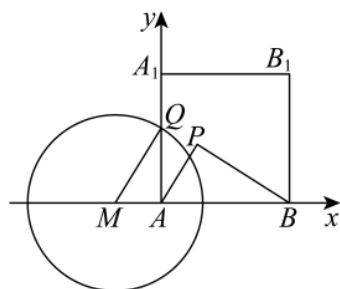
由于 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ，

故 P 的轨迹表示圆心在 $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ ，半径为 $r = \frac{8}{3}$ 的圆在第一象限的弧长，

由于 $Q\left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ ，

故 $\angle QMA = \frac{\pi}{3}$ ，因此轨迹为 $\angle QMA = \frac{\pi}{3}$ 所对的弧长，故长度为 $\frac{\pi}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{9}$ ，

故选：D



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 甲袋中有 20 个红球，10 个白球，乙袋中红球、白球各有 10 个，两袋中的球除了颜色有差别外，再没有其他差别．现在从两袋中各换出 1 个球，下列结论正确的是（ ）

A. 2 个球都是红球的概率为 $\frac{1}{3}$

B. 2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{2}$

C. 不都是红球的概率为 $\frac{2}{3}$

D. 都不是红球的概率为 $\frac{2}{3}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】设出事件，得到 $P(A_1) = \frac{2}{3}$ ， $P(A_2) = \frac{1}{2}$ ，A 选项， $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{3}$ ；B 选项，求事

件 $A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2$ 的概率即可；C 选项，根据对立事件概率公式得到 C 正确；D 选项，

$$P(\overline{A_1 A_2}) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

【详解】记事件 A_1 ：从甲袋中任取 1 个球为红球，事件 A_2 ：从乙袋中任取 1 个球为红球，

则 $P(A_1) = \frac{2}{3}$ ， $P(A_2) = \frac{1}{2}$ ，

对于 A 选项，即求事件 $A_1 A_2$ 的概率， $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{3}$ ，所以 A 正确；

对于 B 选项，即求事件 $A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2$ 的概率，

$$P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ 所以 B 正确,}$$

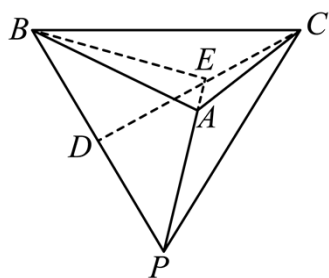
对于 C 选项, 由于“都是红球”与“不都是红球”互为对立事件,

所以概率为 $1 - P(A_1A_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, C 正确;

对于 D 选项, 即求事件 $\overline{A_1A_2}$ 的概率, $P(\overline{A_1A_2}) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$, 所以 D 错误.

故选: ABC

10. 如图所示, 有一个棱长为 4 的正四面体 $P-ABC$ 容器, D 是 PB 的中点, E 是 CD 上的动点, 则下列说法正确的是 ()



A. 直线 AE 与 PB 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

B. $\triangle ABE$ 的周长最小值为 $4 + \sqrt{34}$

C. 如果在这个容器中放入 1 个小球 (全部进入), 则小球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

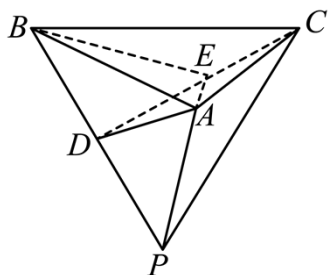
D. 如果在这个容器中放入 4 个完全相同的小球 (全部进入), 则小球半径的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}-2}{5}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项, 作出辅助线, 由三线合一得到线线垂直, 进而得到线面垂直, 进而得到线线垂直, 求出答案; B 选项, 把 $\triangle ACD$ 沿着 CD 展开与平面 BDC 同一平面内, 由余弦定理求出 $AE + BE$ 的最小值, 得到周长的最小值; C 选项, 求出正四面体的内切球即为小球半径的最大值; D 选项, 当四个小球相切且与大正四面体相切时, 小球半径最大, 连接四个小球的球心, 构成正四面体, 设出半径, 结合 C 选项中结论得到方程, 求出小球半径的最大值.

【详解】A 选项, 连接 AD , 由于 D 为 PB 的中点,



所以 $PB \perp CD$ ， $PB \perp AD$ ，

又 $CD \cap AD = D$ ， $AD, CD \subset \text{平面 } ACD$ ，

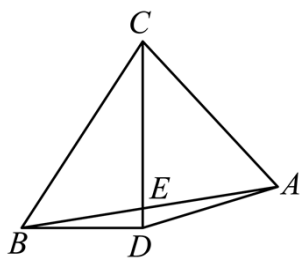
所以直线 $PB \perp \text{平面 } ACD$ ，又 $AE \subset \text{平面 } ACD$ ，

所以 $PB \perp AE$ ，故 A 正确；

B 选项，把 $\triangle ACD$ 沿着 CD 展开与平面 BDC 同一个平面内，连接 AB 交 CD 于点 E ，

则 $AE + BE$ 的最小值即为 AB 的长，

由于 $AD = CD = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 4$ ，



$$\cos \angle ADC = \frac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{2CD \cdot AD} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 4^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \angle ADB = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \angle ADC \right) = -\sin \angle ADC = -\frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos \angle ADB = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 16 + \frac{16\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{故 } AB = \sqrt{16 + \frac{16\sqrt{6}}{3}} = 4\sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}, \text{ } \triangle ABE \text{ 的周长最小值为 } 4 + 4\sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}, \text{ B 错误；}$$

C 选项，要使小球半径最大，则小球与四个面相切，是正四面体的内切球，

设球心为 O ，取 AC 的中点 M ，连接 BM, PM ，过点 P 作 PF 垂直于 BM 于点 F ，

则 F 为 $\triangle ABC$ 的中心，点 O 在 PF 上，过点 O 作 $ON \perp PM$ 于点 N ，

$$\text{因为 } AM = 2, AB = 4, \text{ 所以 } BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 同理 } PM = 2\sqrt{3},$$

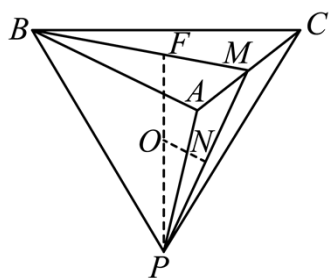
则 $MF = \frac{1}{3}BM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故 $PF = \sqrt{PM^2 - MF^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$,

设 $OF = ON = R$ ，故 $OP = PF - OF = \frac{4\sqrt{6}}{3} - R$ ，

因为 $\triangle PNO \sim \triangle PFM$ ，所以 $\frac{ON}{FM} = \frac{OP}{PM}$ ，即 $\frac{R}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{3} - R}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ ，

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，C 正确；



D 选项，4 个小球分两层（1 个，3 个）放进去，要使小球半径要最大，则 4 个小球外切，且小球与三个平面相切，

设小球半径为 r ，四个小球球心连线是棱长为 $2r$ 的正四面体 $Q-VKG$ ，

由 C 选项可知，其高为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$ ，

由 C 选项可知， PF 是正四面体 $P-ABC$ 的高， PF 过点 Q 且与平面 VKG 交于 S ，与平面 HJI 交于 Z ，

则 $QS = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$ ， $SF = r$ ，

由 C 选项可知，正四面体内切球的半径是高的 $\frac{1}{4}$ 得，如图正四面体 $P-HJI$ 中， $QZ = r$ ， $QP = 3r$ ，

正四面体 $P-ABC$ 高为 $3r + \frac{2\sqrt{6}}{3}r + r = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 4$ ，解得 $r = \frac{2\sqrt{6}-2}{5}$ ，D 正确。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/948015050047006075>