第十七章 多元函数微分学

§1 可微性

一、可微性与全微分

1. 可微性

回顾一元函数可微的定义:

定义 设函数 $y=f(x), x\in U(x_0)$. 如果增量

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示成

$$\Delta y = A\Delta x+o(\Delta x), \tag{1}$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数, 则称函数 f 在点 x_0 可微, 并称 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 处的微分, 记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x, \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=A\Delta x. \tag{2}$$

二元函数可微的定义:

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 在某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 对于 $P(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(P_0)$, 若 f 在 P_0 的全增量 Δz 可表示为:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\end{aligned} \tag{1}$$

其中A, B是仅与点 P_0 有关的常数, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量, 则称 f 在点 P_0 可微.

注1：$o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量是指

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = 0.$$

注2：判断函数可微性的方法：利用定义，证明上式是否成立。

2. 全微分

称 (1) 式中关于$\Delta x, \Delta y$的线性表达式

$$A\Delta x + B\Delta y$$

为 f 在 P_0 的全微分, 记作

$$\mathrm{d}z|_{P_0} = \mathrm{d}f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (2)$$

由 (1), (2) 可见, 当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 充分小时, $\mathrm{d}z \approx \Delta z$

于是有近似公式:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0). \qquad (3)$$

使用时经常用(1) 式等价形式：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \underbrace{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}_{o(\rho)}, \qquad (4)$$

这里 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta = 0.$

注3： $\rho \to 0 \Leftrightarrow (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$

例1 考察 $f(x,y)=xy$ 在任一点 (x_0,y_0) 的可微性.

解 f 在点 (x_0,y_0) 处的全增量为

$$\Delta f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0$$
$$=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

由于 $\dfrac{|\Delta x\Delta y|}{\rho}=\rho\dfrac{|\Delta x|}{\rho}\dfrac{|\Delta y|}{\rho}\le\rho\to 0\ (\rho\to 0)$,

因此 $\Delta x\Delta y=o(\rho)$. 从而 f 在 (x_0,y_0) 可微, 且

$$\mathrm{d}f=y_0\Delta x+x_0\Delta y.$$

二、偏导数

1.偏导数的定义

由一元函数微分学知道: 若 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\text{其中 } A=f'(x_0).$$

问题: 当二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微时,

(1) 式中的常数 A, B 应取怎样的值?

解：在 (4) 式中先令$\Delta y=0\ (\Delta x\neq 0)$, 这时得到 f 关于 x 的偏增量为

$$\Delta_x z=A\Delta x+\alpha\Delta x \quad \text{或} \quad \frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\alpha.$$

现让 $\Delta x \to 0$, 则

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \quad (5)$$

容易看出, (5) 式右边的极限正是关于 x 的一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数.

类似地, 在 (4) 式中令 $\Delta x=0\ (\Delta y\neq 0)$, 又可得到

$$B=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}, \quad (6)$$

它是关于 y 的一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数.

二元函数当固定其中一个自变量时，它对另一个自变量的导数称为该函数的**偏导数**.

定义 2 设函数 $z = f(x,y),(x,y)\in D$, 且 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义. 则当极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \qquad (7)$$

存在时, 称此极限为 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数, 记作

$$f_x(x_0,y_0)\text{或}z_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

f 在点 (x_0, y_0) 关于 y 的偏导数:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \quad (7)'$$

记作 $f_y(x_0, y_0)$ 或 $z_y(x_0, y_0)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$.

注4: f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的偏导数正是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数.

f 在点 (x_0, y_0) 关于 y 的偏导数正是一元函数 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数.

2.偏导函数的定义

若函数 $z=f(x,y)$在区域 D 上每一点(x,y)都存在对 x (或对y) 的偏导数, 则得到 $z=f(x,y)$ 在 D 上对 x (或对y) 的**偏导函数**(也简称偏导数), 记作

$$f_x(x,y) \text{ 或 } \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(f_y(x,y) \text{ 或 } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right),$$

也可简单地写作 $f_x, z_x,$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}\left(f_y, z_y, \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial y} \right).$

注1:这里 $\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是专用于偏导数的符号, 与一元函数的导数符号 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 相仿, 但又有区别.

注2: f 在点 (x_0, y_0) 存在关于 x(或 y) 的偏导数, f 至少在 $\{(x,y) \mid y = y_0, |x - x_0| < \delta\}$(或者 $\{(x,y) \mid x = x_0, |y - y_0| < \delta\}$)上有定义。

3.例题

例2 求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$ 在点 $(1,3)$ 处关于 x 和关于 y 的偏导数.

解 **法1：** 先求 f 在点 $(1,3)$ 处关于 x 的偏导数.

令 $y=3$,得到 $f(x,3)=x^3+6x^2-27$, 求它在 $x=1$ 的导数, 则得

$$f_x(1,3)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,3)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=(3x^2+12x)\Big|_{x=1}=15.$$

再求 f 在 (1, 3) 处关于 y 的偏导数. 为此令 $x = 1$, 得

$f(1,y) = 1 + 2y - y^3$, 求它在 $y = 3$ 处的导数, 又得

$$f_y(1,3) = \left.\frac{\mathrm{d}f(1,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=3} = 2 - 3y^2\Big|_{y=3} = -25.$$

法2：先分别求出关于 x 和 y 的偏导函数:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy,$$

$$f_y(x,y) = 2x^2 - 3y^2.$$

然后以 $(x, y) = (1, 3)$ 代入, 可得同样结果.

例3 求函数 $z = x^y$ $(x > 0)$ 的偏导数.

解 把 $z = x^y$依次看成幂函数和指数函数，分别求得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

例4 求三元函数 $u=\sin(x+y^2-\mathrm{e}^z)$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 看作常数, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z);$$

把 z, x 看作常数, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z);$$

把 x, y 看作常数, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\mathrm{e}^z\cos(x+y^2-\mathrm{e}^z).$$

4.偏导数的几何意义

$z=f(x,y)$ 的几何图象通常是三维空间中的曲面,

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为此曲面上一点, 其中

$z_0=f(x_0,y_0)$. 过点 P_0 作平面 $y=y_0$,

它与曲面相交得一曲线:

$$C:\ y=y_0,\ z=f(x,y).$$

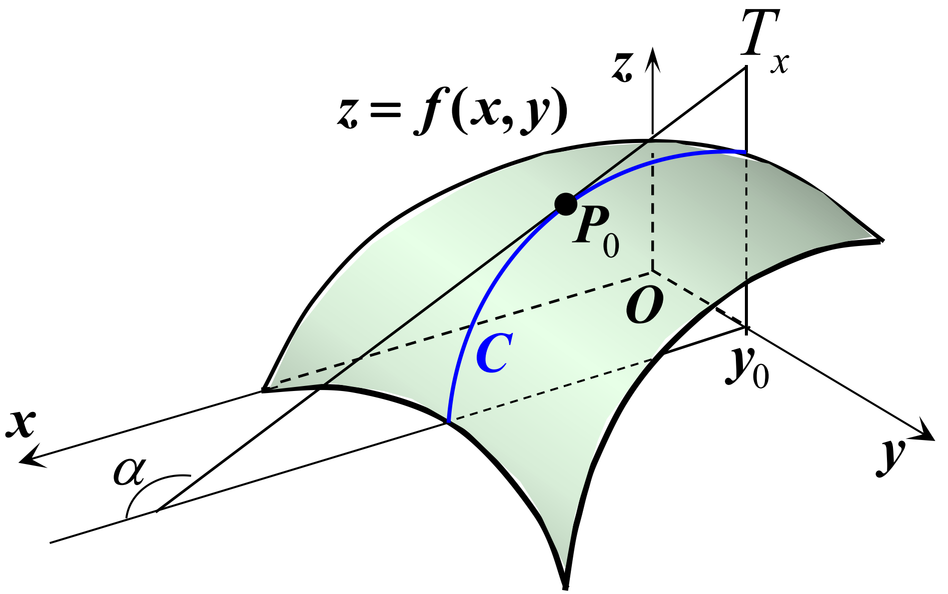

图 17-1

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义为:

曲线 C 在点 P_0 处的切线 T_x 对于 x 轴的斜率，即 T_x 与x 轴

正向所成倾角 α 的正切，即 $f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha$.

可同样偏导数$f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义为:

曲线C_1：$x=x_0$，$z=f(x,y)$ 在点 P_0处的切线 T_y

对于y轴的斜率，即 T_y 与y 轴正向所成倾角β 的正切,

即 $f_y(x_0,y_0)=\tan\beta$.