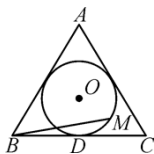


(2) 如图, 圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆, 其与 BC 边相切于点 D , 点 M 为圆上任意一点, $\vec{BM} = x\vec{BA} + y\vec{BD}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $2x + y$ 的最大值为 ()



A. $\sqrt{2}$

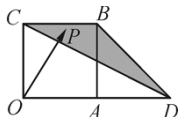
B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

变式 (1) 在扇形 OAB 中, $\angle AOB = 60^\circ$, C 为 $\overrightarrow{AB}$ 上的一个动点, 若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 则 $3x + y$ 的取值范围是_____.

(2) 如图, 四边形 $OABC$ 是边长为 1 的正方形, 点 D 在 OA 的延长线上, 且 $AD = 1$, 点 P 是 $\triangle BCD$ (含边界) 的动点, 设 $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为_____.



◀ 总结提升 ▶

1. 极化恒等式: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}[(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2]$.

(1) 几何意义: 向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与“差对角线”平方差的 $\frac{1}{4}$.

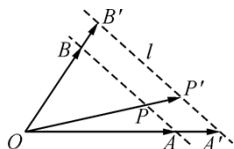
(2) 在平行四边形 $PMQN$ 中, O 是对角线交点, 则:

① $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{NM}|^2)$ (平行四边形模式);

② $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{NM}|^2$ (三角形模式).

2. 等和(高)线定理

(1) 由三点共线结论推导等和(高)线定理: 如图, 若 $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu = 1$. 由 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 相似, 必存在一个常数 $k, k \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$, 则 $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP} = k\lambda\overrightarrow{OA} + k\mu\overrightarrow{OB}$, 又 $\overrightarrow{OP'} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 所以 $x + y = k\lambda + k\mu = k$; 反之也成立.



(2) 平面内一组基底 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 及任一向量 $\vec{OP'}$, $\vec{OP'} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$,

若点 P' 在直线 AB 上或在平行于 AB 的直线上, 则 $\lambda + \mu = k$ (定值); 反之也成立, 我们把直线 AB 以及与直线 AB 平行的直线称为等和(高)线.

- ① 当等和线恰为直线 AB 时, $k=1$;
- ② 当等和线在 O 点和直线 AB 之间时, $k \in (0, 1)$;
- ③ 当直线 AB 在 O 点和等和线之间时, $k \in (1, +\infty)$;
- ④ 当等和线过 O 点时, $k=0$;
- ⑤ 若两等和线关于 O 点对称, 则定值 k 互为相反数;
- ⑥ 定值 k 的变化与等和线到 O 点的距离成正比.

固能力►触类旁通

一、单项选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, M 为边 BC 上任意一点, N 为 AM 的中点, $\vec{AN} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$,

则 $\lambda + \mu$ 的值为()

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. 1

2. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\vec{OP} \cdot \vec{FP}$ 的最大值为()

- A. 2
- B. 3
- C. 6
- D. 8

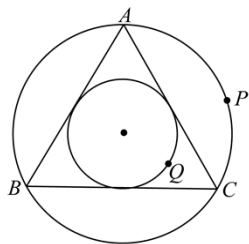
3. 如图, 在四边形 $MNPQ$ 中, 若 $\vec{NO} = \vec{OQ}$, $|\vec{OM}| = 6$, $|\vec{OP}| = 10$, $\vec{MN} \cdot \vec{MQ} = -$

28, 则 $\vec{NP} \cdot \vec{QP}$ 等于()

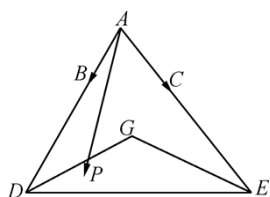
上的一个动点, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是_____.

8. 若平面向量 a, b 满足 $|2a-b| \leq 3$, 则 $a \cdot b$ 的最小值为_____.

9. 如图, 已知点 P 为等边三角形 ABC 外接圆上一点, 点 Q 是该三角形内切圆上的一点, 若 $\vec{AP} = x_1 \vec{AB} + y_1 \vec{AC}$, $\vec{AQ} = x_2 \vec{AB} + y_2 \vec{AC}$, 则 $|(2x_1 - x_2) + (2y_1 - y_2)|$ 的最大值为_____.



10. 如图, G 为 $\triangle ADE$ 的重心, P 为 $\triangle GDE$ 内任一点(包括边界), B, C 均为 AD, AE 上的三等分点(靠近点 A), $\vec{AP} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$, 则 $\alpha + \frac{1}{2}\beta$ 的取值范围是_____.



微切口 2 立体几何中动点的轨迹问题

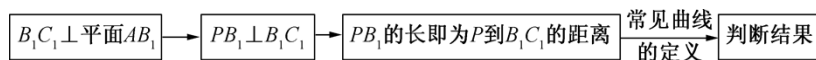
研考题►聚焦切口

探究 1 轨迹定性研究

例 1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面 AB_1 内有一点 P 到直线 AB 与到直线 B_1C_1 的距离相等, 则动点 P 所在曲线的形状为()

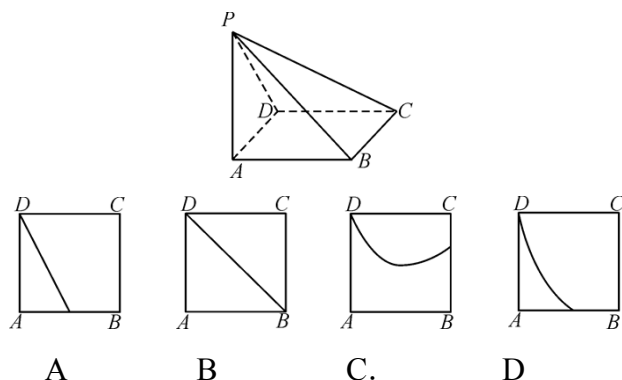
- A. 线段
- B. 一段椭圆弧
- C. 双曲线的一部分
- D. 抛物线的一部分

【思维引导】



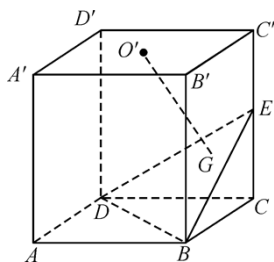
变式 (2021·宿迁中学)如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为正三角形, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为底面 $ABCD$

内的一个动点, 且满足 $MP=MC$, 则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为()



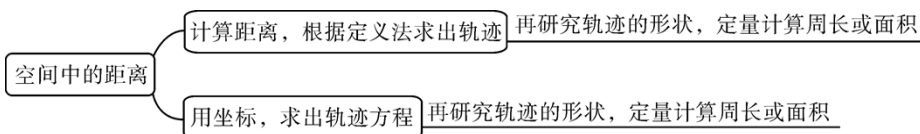
探究2 轨迹定量研究

例2 (2021·重庆二模)如图, 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=BC=\sqrt{2}$, $AA'=\sqrt{3}$, 上底面 $A'B'C'D'$ 的中心为 O' , 当点 E 在线段 CC' 上从 C 移动到 C' 时, 点 O' 在平面 BDE 上的射影 G 的轨迹长度为()



- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

【思维引导】



变式1 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知底面 $ABCD$ 为正方形, P 为 A_1D_1 的中点, $AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$, 点 Q 为正方形 $ABCD$ 所在平面内的一个动点, 且满足 $QC=\sqrt{2}QP$, 则线段 BQ 的长度的最大值是_____.

变式2 (2021·永州二模)点 M 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点, 点 N 为 B_1C_1 上一点, $NC_1=2NB_1$, $DM\perp BN$, 若球 O 的体积为 $9\sqrt{2}\pi$, 则动点 M 的轨迹的长度为_____.

①空间几何体中的动点的轨迹类型有：线段、圆、圆锥曲线、球面等.

固能力▶触类旁通

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 在正方体的侧面 BCC_1B_1 上的

D

A. $6\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

D. 6π

B. 椭圆的一部分

D. 两条直线

4. 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 AA_1 的中点, P 是底面 $ABCD$ 所在平面内一动点, 设 PD_1 , PE 与底面 $ABCD$ 所成的角分别为 θ_1 , θ_2 (θ_1 ,

θ_2 均不为 0), 若 $\theta_1 = \theta_2$, 则三棱锥 $P-BB_1C_1$ 体积的最小值是()

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

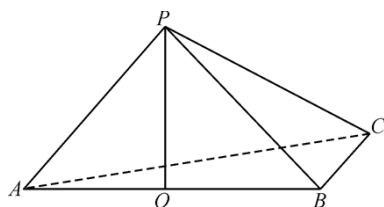
D. $\frac{5}{4}$

(第 3 题)

(第 5 题)

二、多项选择题

5. (2021·通州中学)已知在三棱锥 $P-ABC$ 中, O 为 AB 中点, $PO \perp$ 平面 ABC , $\angle APB = 90^\circ$, $PA = PB = 2$, 下列说法中正确的是()



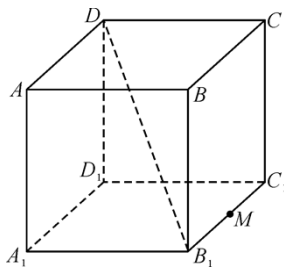
A. 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $PC = 2$

B. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则 $AP \perp BC$

C. 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, PC 与平面 PAB 所成角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$

D. 当 $PC = 4$ 时, M 为平面 PBC 内动点, 若 $OM \parallel$ 平面 PAC , 则点 M 在 $\triangle PBC$ 内的轨迹长度为 2

6. (2021·青岛调研)如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 2 的正方体, M 为 B_1C_1 的中点, 下列命题中正确的有()



A. AB_1 与 BC_1 成 60° 角

B. 若 $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{NC_1}$, 平面 A_1MN 交 CD 于点 E , 则 $CE = \frac{1}{3}$

C. 若 P 点在正方形 ABB_1A_1 边界及内部运动, 且 $MP \perp DB_1$, 则 P

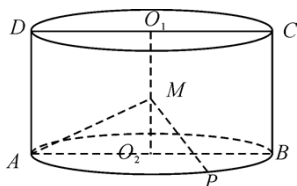
点的轨迹长等于 $\sqrt{2}$

D. 若 E, F 分别在 DB_1, A_1C_1 上, 且 $\frac{DE}{EB_1} = \frac{A_1F}{FC_1} = 2$, 直线 EF 与 AD_1, A_1D

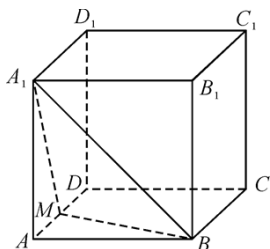
所成角分别是 α, β , 则 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

三、填空题

7. 如图, 在圆柱的轴截面 $ABCD$ 中, $AB=4, BC=2, O_1, O_2$ 分别为圆柱上、下底面的中心, M 为 O_1O_2 的中点, 动点 P 在圆柱下底面内(包括圆周). 若 $AM \perp MP$, 则点 P 形成的轨迹的长度为_____.



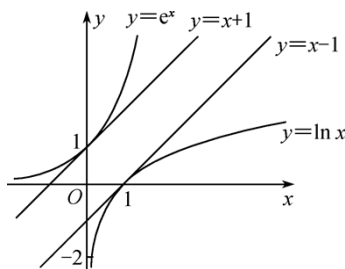
8. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 是 AD 中点, 动点 P 在底面 $ABCD$ 内(不包括边界), 使四面体 A_1-BMP 的体积为 $\frac{2}{3}$, 则 C_1P 的最小值是_____.



9. (2021·宜昌调研)在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱长为 6, 底面是边长为 8 的菱形, 且 $\angle ABC = 120^\circ$, 点 E 在边 BC 上, 且满足 $BE = 3EC$, 动点 M 在该四棱柱的表面上运动, 并且总保持 $ME \perp BD_1$, 则动点 M 的轨迹围成的图形的面积为_____.

微切口 3 指、对数函数的切线放缩的运用

【追本溯源】如图, $y=x+1$ 是 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线, 有 $e^x \geq x+1$ 恒成立;
 $y=x-1$ 是 $y=\ln x$ 在 $(1,0)$ 处的切线, 有 $\ln x \leq x-1$ 恒成立.



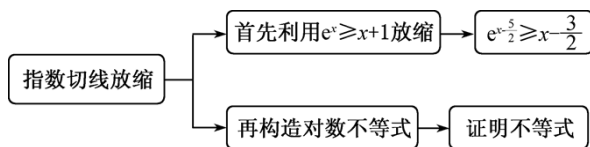
在不等式“改造”或证明的过程中,有时借助于 e^x , $\ln x$ 有关的常用不等式进行适当地放缩,再进行证明,会取得意想不到的效果.

研考题►聚焦切口

探究1 指数切线放缩

例1 求证:当 $x>0$ 时,不等式 $2ex - \frac{5}{2} - \ln x + \frac{1}{x} > 0$ 恒成立.

【思维引导】



变式 已知函数 $f(x) = \ln x - a^2x^2 + ax$.

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a=1$, 求证:当 $x>0$ 时, $f(x) < e^{2x} - x^2 - 2$.

探究2 对数切线放缩

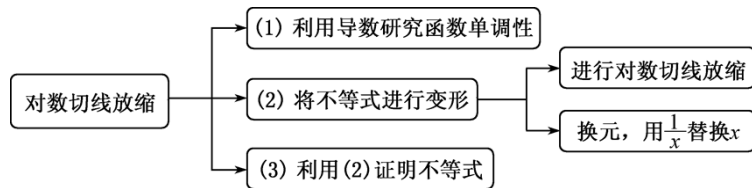
例2 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求证:当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c>1$, 求证:当 $x \in (0,1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

【思维引导】



变式 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a 的值并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求证：当 $a \geq -\frac{1}{e}$ 时， $f(x) \geq 0$.

◀ 总结提升 ▶

由 $e^x \geq x+1$ 引出的放缩：

① $e^{x-1} \geq x$ (用 $x-1$ 替换 x ，切点横坐标是 $x=1$)，通常表达为 $e^x \geq ex$.

② $e^{x+a} \geq x+a+1$ (用 $x+a$ 替换 x ，切点横坐标是 $x=-a$)，平移模型，找到切点是关键.

③ $xe^x \geq x + \ln x + 1$ (用 $x + \ln x$ 替换 x ，切点横坐标满足 $x + \ln x = 0$)，常见的指对跨阶改头换面模型，切线的方程是按照指数函数给予的.

④ $e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 > x^2 (x > 0)$ (用 $\frac{x}{2}$ 替换 x ，切点横坐标是 $x=2$)，通常有 $\frac{x}{n} \geq e \cdot \frac{x}{n} (x > 0)$ 的构造模型.

由 $\ln x \leq x-1$ (也可以记为 $\ln ex \leq x$ ，切点为 $(1,0)$) 引出的放缩：

最常见的就是 $\ln(x+1) \leq x$ ，由 $\ln x < x-1$ 向左平移 1 个单位长度来理解，或者将 $e^x \geq x+1$ 两边取对数而来.

① $\ln x \leq \frac{x}{e}$ (用 $\frac{x}{e}$ 替换 x ，切点横坐标是 $x=e$)，表示过原点的 $f(x)=\ln x$ 的切线为 $y = \frac{x}{e}$.

② $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (用 $\frac{1}{x}$ 替换 x ，切点横坐标 $x=1$)，或者记为 $x \ln x \geq x-1$.

③ $\ln x \leq x^2 - x$ (由 $\ln x \leq x-1$ 及 $x-1 \leq x^2 - x$ ，切点横坐标是 $x=1$)，或者记为 $\frac{\ln x}{x} \leq x-1$.

④ $\ln x \leq \frac{1}{2}(x^2-1)$ (由 $\ln x \leq x-1 \leq \frac{1}{2}(x^2-1)$)，即在点 $(1,0)$ 处三曲线相切.

固能力 ▶ 触类旁通

1. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+2)$ ，求证： $f(x) > 0$.

2. 已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 a 的值；

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n ， $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < m$ ，求 m

的最小值.

3. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$.

(1) 求证: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x}{1+x} < f(x) < x$;

(2) 已知 e 为自然对数的底数, 求证: $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sqrt{e} < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) < e.$$

4. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln(x-1)$ (其中常数 $e=2.718\ 28\cdots$, 是自然对数的底数).

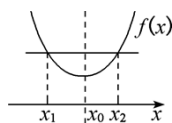
(1) 若 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 1+e^{-a})$ 上不单调, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} > a$.

微切口 4 极值点偏移问题

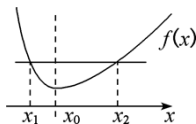
【追本溯源】1. 已知函数 $f(x)$ 图象顶点的横坐标就是极值点 x_0 , 若 $f(x)=c$ 的两根的中点刚好满足 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$, 即极值点在两根的正中间, 也就是说极值点没有偏移, 此时函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧, 函数值变化快慢相同, 如图(1)所示.

2. 若 $\frac{x_1+x_2}{2} \neq x_0$, 则极值点偏移, 此时函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧, 函数值变化快慢不同, 如图(2)(3)所示.



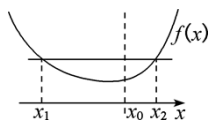
图(1)

(无偏移, 左右对称, 二次函数) 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1+x_2=2x_0$



图(2)

(左陡右缓, 极值点向左偏移) 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1+x_2 > 2x_0$



图(3)

(左缓右陡, 极值点向右偏移)若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1+x_2 < 2x_0$

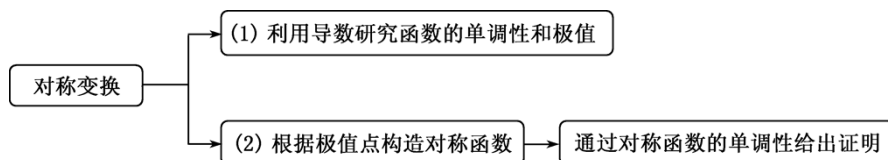
研考题►聚焦切口

探究1 对称变换 (基本解法之对称化构造)

例1 已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x \in \mathbf{R})$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 求证: $x_1+x_2 > 2$.

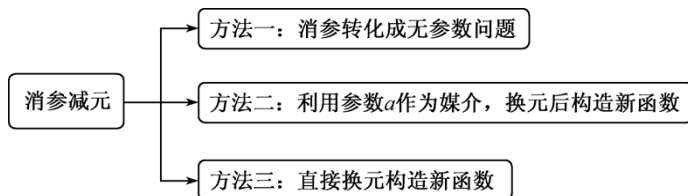
【思维引导】



探究2 消参减元(含参函数问题可考虑先消去参数)

例2 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, a 为常数, 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 \cdot x_2 > e^2$.

【思维引导】

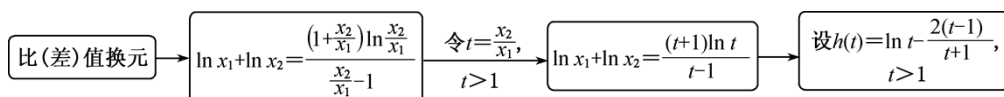


探究3 比(差)值换元

例3 已知 $f(x)=x \ln x - \frac{1}{2}mx^2 - x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $m=-2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的所有零点;
- (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $x_1 x_2 > e^2$ (e 为自然对数的底数).

【思维引导】



◀ 总结提升 ▶

1. 对称变换, 主要用来解决与两个极值点之和、积相关的不等式的证明问题. 其解题要点如下:

(1) 定函数(极值点为 x_0), 即利用导函数符号的变化判断函数的单调性, 进而确定函数的极值点 x_0 .

(2) 构造函数, 即根据极值点构造对称函数 $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$, 若证 $x_1 x_2 > x_0^2$, 则令 $F(x) = f(x) - f\left(\frac{x_0^2}{x}\right)$.

(3) 判断单调性, 即利用导数讨论 $F(x)$ 的单调性.

(4) 比较大小, 即判断函数 $F(x)$ 在某段区间上的正负, 并得出 $f(x)$ 与 $f(2x_0 - x)$ 的大小关系.

(5) 转化, 即利用函数 $f(x)$ 的单调性, 将 $f(x)$ 与 $f(2x_0 - x)$ 的大小关系转化为 x 与 $2x_0 - x$ 之间的关系, 进而得到所证或所求.

2. 消参减元的主要目的就是减元, 进而建立与所求解问题相关的函数.

3. 比(差)值换元的目的也是消参、减元, 就是根据已知条件首先建立极值点之间的关系, 然后利用两个极值点之比(差)作为变量, 从而实现消参、减元的目的. 设法用比值或差值(一般用 t 表示)表示两个极值点, 继而将所求解问题转化为关于 t 的函数问题.

固能力▶触类旁通

1. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 4$.

2. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 求证: $x_1 + x_2 < 2$.

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有极大值为 $-\frac{1}{2}$, 且方程 $f(x) = m$ 的两个根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$

, 求证: $x_1+x_2>4a$.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}+b(a, b\in\mathbf{R})$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-$

1.

(1) 求实数 a, b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时, 比较 x_1+x_2 与 $2e$ (e 为自然对数的底数) 的大小.

微切口 5 导函数的隐零点问题

研考题►聚焦切口

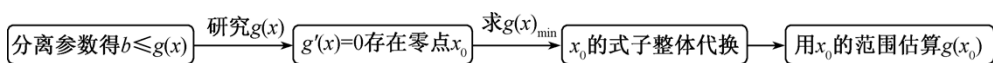
探究 1 求参数的最值或范围

例 1 (2021·唐山三模) 已知函数 $f(x)=ae^x-bx$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a\geq 1$ 时, $f(x)\geq \ln x + \frac{4}{5}$, 求整数 b 的最大值.

【思维引导】



变式 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln x+ax^2(a\in\mathbf{R})$, 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线

与直线 $x+2y-1=0$ 垂直.

(1) 求 a 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 λ 是整数, 当 $x>0$ 时, 总有 $f(x)-(3+\lambda)x-\lambda>\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2$, 求 λ 的最大

值.

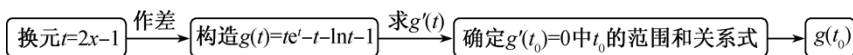
探究 2 不等式的证明

例 2 (2021·西安一模) 已知函数 $f(x)=2x+\ln(2x-1)$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 求证: $f(x)\leq (2x-1)e^{2x-1}$ (e 为自然对数的底数).

【思维引导】



◀ 总结提升 ▶

导函数的零点能否求精确解可以分为两类：一类是数值上能精确求解的，称之为“显零点”；另一类是能够判断其存在但无法直接表示的，称之为“隐零点”. 隐零点可设为 x_0 ，再利用导函数的单调性确定 x_0 所在区间，最后根据 $f'(x_0)=0$ ，研究 $f(x_0)$ ，注意若 $f(x)$ 中含有参数 a ，关系式 $f'(x_0)=0$ 是关于 x_0, a 的关系式，确定 x_0 的合适范围，往往和 a 的范围有关.

固能力►触类旁通

1. 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程是 $x+y+b=0$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求证：函数 $f(x)$ 有唯一的极值点 x_0 ，且 $f(x_0) > -\frac{3}{2}$.

2. 已知 $f(x)=x\ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若 $f(x) \geq kx-2(k+1)(k \in \mathbf{Z})$ 对任意 $x > 2$ 都成立，求整数 k 的最大值.

3. (2021·洛阳三模) 已知函数 $f(x)=(x-a)e^x(a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a=2$ 时，设函数 $g(x)=f(x)+\ln x-x-b, b \in \mathbf{Z}$ ，若 $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \in$

$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 恒成立，求 b 的最小值.

4. (2021·莆田二模节选) 已知函数 $f(x)=\ln x-x, g(x)=x+\frac{a}{x}$ ，且函数 $f(x)$ 与 $g(x)$

有相同的极值点.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求证： $f(x)+g(x) < \frac{e^x+\cos x}{x}$.

微切口 6 指、对跨阶同构的运用

研考题►聚焦切口

探究 1 构造函数 $f(x)=x+e^x$ 或 $f(x)=x+\ln x$

例 1 (1) 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$ ，若 $f(x) \geq 1$ ，求 a 的取值范围.

【思维引导】

一、单项选择题

1. 已知 x_0 是方程 $2x^2e^{2x} + \ln x = 0$ 的实根, 则关于实数 x_0 的判断正确的是()

- A. $x_0 \geq \ln 2$
- B. $x_0 \leq \frac{1}{e}$
- C. $2x_0 + \ln x_0 = 0$
- D. $2ex_0 + \ln x_0 = 0$

2. 设实数 $m>0$, 若对任意的 $x\geq e$, 不等式 $x^2\ln x - me_x^{-m}\geq 0$ 恒成立, 则 m 的

最大值是()

- A. $\frac{1}{e}$
- B. $\frac{e}{3}$
- C. e
- D. $2e$

3. 若不等式 $\frac{e^{x-1}}{x} \geq x - \ln x + a$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 a 的最大值为()

- A. 1
B. $\frac{1}{e}$
C. 0
D. $-e$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^{x-1}} + x - \ln(ax) - 2 (a > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内

在零点, 则实数 a 的取值范围为()

- A. $(0,1]$
B. $[1, +\infty)$
C. $(0, e]$
D. $[3, +\infty)$

二、填空题

5. 若关于 x 的不等式 $xe^{x+1} \geq k \ln x + k(x+1)$ 对任意 $x > 0$ (其中 $k > 0$) 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

6. 若关于 x 的不等式 $x^2 e^{3x} \geq (k+3)x + 2\ln x + 1$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

7. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln(ax - a) + a (a > 0)$, 若 $f(x) > 0$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

8. 若不等式 $x + a \ln x + \frac{1}{e^x} \geq x^a$ 对 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是

_____.

9. 若对于任意实数 $x>0$, 不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

10. 已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x$ (其中 a 为参数), 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x)>a\ln a$ 恒成立, 则正实数 a 的取值范围是_____.

微切口 7 抛物线中的阿基米德三角形探究

【追本溯源】圆锥的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫做阿基米德三角形.

研考题►聚焦切口

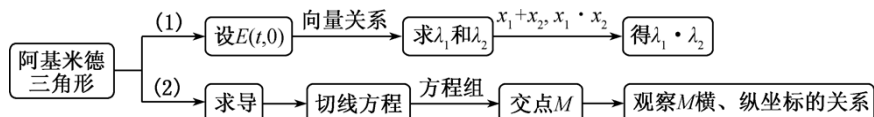
探究 1 顶点在定直线上的阿基米德三角形

例 1 (2021·汕头模拟) 已知抛物线 $D: x^2=4y$, 过 x 轴上一点 E (不同于原点) 的直线 l 与抛物线 D 交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 与 y 轴交于 C 点.

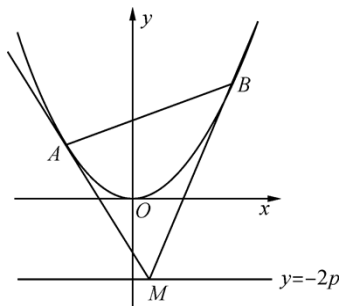
(1) 若 $\vec{EA}=\lambda_1\vec{EC}$, $\vec{EB}=\lambda_2\vec{EC}$, 求乘积 $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ 的值;

(2) 若 $E(4,0)$, 过 A, B 分别作抛物线 D 的切线, 两切线交于点 M , 证明: 点 M 在定直线上, 并求此定直线方程.

【思维引导】



变式 如图, 设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$, M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点, 过点 M 引抛物线的切线, 切点分别为 A, B .



(1) 求证: A, B, M 三点的横坐标成等差数列;

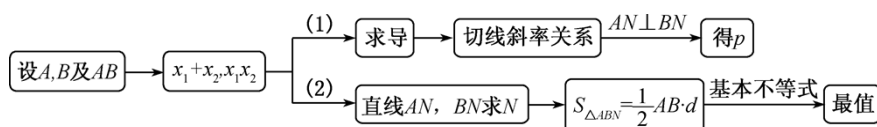
(2) 当点 M 的坐标为 $(2, -2p)$ 时, $AB=4\sqrt{10}$, 求此时抛物线的方程.

探究 2 一边过焦点的阿基米德三角形

例2 已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 和定点 $M(0,1)$, 设过点 M 的动直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 抛物线 C 在 A, B 处的切线的交点为 N .

- (1) 若 N 在以 AB 为直径的圆上, 求 p 的值;
- (2) 若 $\triangle ABN$ 的面积的最小值为 4, 求抛物线 C 的方程.

【思维引导】



◀ 总结提升 ▶

(1) 过抛物线上的点作切线的方程:

- ① 过抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$;
- ② 过抛物线 $y^2=-2px$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=-p(x+x_0)$.
- ③ 过抛物线 $x^2=2py$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x=p(y+y_0)$;
- ④ 过抛物线 $x^2=-2py$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x=-p(y+y_0)$.

(2) 阿基米德三角形有以下常用性质:

- ① 阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的轴;
- ② 若直线 l 与抛物线没有公共点, 以 l 上的点为顶点的阿基米德三角形的底边过定点;

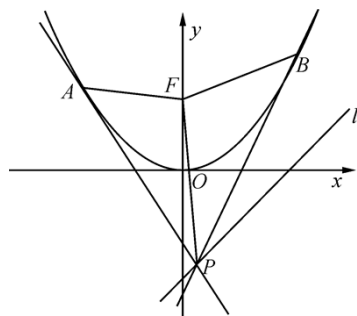
③ 底边为 a 的阿基米德三角形的面积最大值为 $\frac{a^3}{8p}$;

④ 若阿基米德三角形的底边过焦点, 顶点 Q 的轨迹为准线, 且阿基米德三角形的面积最小值为 p^2 ;

⑤ 在阿基米德三角形中, $\angle QFA = \angle QFB$ (Q 是切线的交点, A, B 为切点).

固能力▶触类旁通

1. 如图, 设抛物线 $C: y=x^2$ 的焦点为 F , 动点 P 在直线 $l: x-y-2=0$ 上运动, 过 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB , 且与抛物线 C 分别相切于 A, B 两点. 求证: $\angle PFA = \angle PFB$.



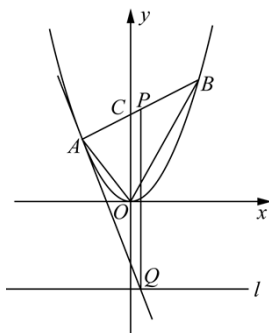
2. 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过点 D 作 C 的两条切线,

切点分别为 A, B .

(1) 求证: 直线 AB 过定点;

(2) 若以 $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

3. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 y 轴正方向上一点 $C(0, c)$ 任作一直线, 与抛物线 $y = x^2$ 相交于 A, B 两点, 一条垂直于 x 轴的直线, 分别与线段 AB 和直线 $l: y = -c$ 交于 P, Q .



(1) 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$, 求 c 的值;

(2) 若 P 为线段 AB 的中点, 求证: QA 为此抛物线的切线;

(3) 试问(2)的逆命题是否成立? 说明理由.

4. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , A, B 是抛物线上的两动点, 且 $\vec{AF} = \lambda \vec{FB} (\lambda > 0)$, 过 A, B 两点分别作抛物线的切线, 设其交点为 M .

(1) 求证: $\vec{FM} \cdot \vec{AB}$ 为定值;

(2) 设 $\triangle ABM$ 的面积为 S , 写出 $S = f(\lambda)$ 的表达式, 并求 S 的最小值.

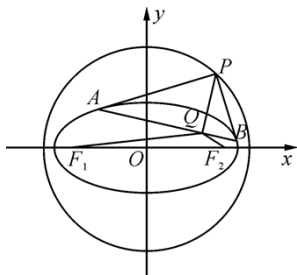
微切口 8 | 圆锥曲线与圆的复合研究

研考题►聚焦切口

探究 1 圆锥曲线与圆构成复合图形

例 1 (2021·马鞍山二模) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 5$, 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的

左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆和圆所截得弦长分别为 1 和 $2\sqrt{2}$.



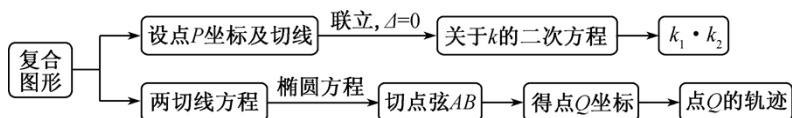
(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 如图, P 为圆上任意一点, 过 P 分别作椭圆两条切线切椭圆于 A, B 两点.

①若直线 PA 的斜率为 2, 求直线 PB 的斜率;

②作 $PQ \perp AB$ 于点 Q , 求证: $QF_1 + QF_2$ 是定值.

【思维引导】



探究 2 圆锥曲线中的外接圆与内切圆

例 2 (2021·张家口一模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一动点 P , 左、

右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $F_2(2, 0)$, 定直线 $l: x = \frac{3}{2}$, $PM \perp l$, 点 M 在直线 l 上, 且

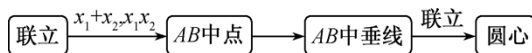
满足 $\frac{PM}{PF_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求双曲线的标准方程;

(2) 若直线 l_0 的斜率 $k=1$, l_0 过双曲线右焦点且与双曲线右支交于 A, B

两点, 求 $\triangle ABF_1$ 的外接圆方程.

【思维引导】



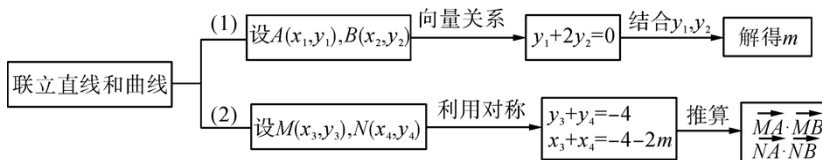
探究3 圆锥曲线上的四点共圆问题

例3 已知直线 $l: y=x+m$ 交抛物线 $C: y^2=4x$ 于 A, B 两点.

(1) 设直线 l 与 x 轴的交点为 T , 若 $\vec{AT}=2\vec{TB}$, 求实数 m 的值;

(2) 若点 M, N 在抛物线 C 上, 且关于直线 l 对称, 求证: A, B, M, N 四点共圆.

【思维引导】



◀ 总结提升 ▶

曲线上四点共圆问题的处理方法: ①某点到四个点的距离相等; ②利用四点共圆的充要条件:

定理: 若两条直线 $y=k_i x+b_i (i=1,2)$ 与曲线 $ax^2+by^2+cx+dy+c=0 (a \neq b)$ 有四个交点, 则四个交点共圆的充要条件是 $k_1+k_2=0$.

证明: 两直线组成的曲线方程为 $(k_1 x-y+b_1)(k_2 x-y+b_2)=0$, 则过四个交点的曲线方程可设为 $(k_1 x-y+b_1)(k_2 x-y+b_2)+\lambda(ax^2+by^2+cx+dy+c)=0$ ①.

必要性: 若四点共圆, 则方程①表示圆, 那么①式左边展开式中 xy 项的系数为零, 即有 $k_1+k_2=0$.

充分性: 当 $k_1+k_2=0$ 时, 令①式左边展开式中 x^2, y^2 项的系数相等, 得 $k_1 k_2 + \lambda a = 1 + \lambda b$, 联立解得 $k_2 = -k_1, \lambda = \frac{1+k_1^2}{a-b}$, 将其代入①, 整理得 $x^2+y^2+c'x+d'y+e'=0$ ②.

方程②的几何意义是如下三种情形之一: 表示一个圆、表示一个点、无轨迹. 由题设知四个交点在方程②所表示的曲线上, 故方程②表示圆.

固能力▶触类旁通

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $OA = OF$, 其中 O 为坐标原点.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 已知点 C 满足 $3\vec{OC} = \vec{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点, 求直线 AB 的方程.

2. (2021·嘉兴测试) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, 且过点 $A(2, \sqrt{2})$.

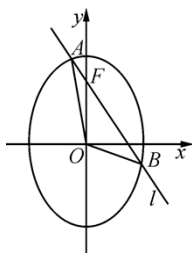
(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过原点 O 作两条相互垂直的直线 l_1, l_2 , l_1 与椭圆交于 M, N 两点, l_2 与椭圆交于 P, Q 两点, 求证: 四边形 $MQNP$ 的内切圆半径 r 为定值.

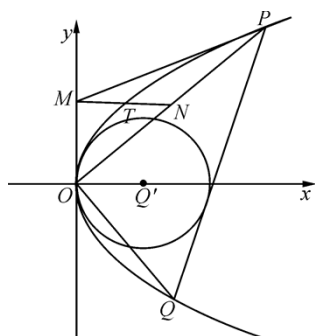
3. 已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \vec{0}$.

(1) 求证: 点 P 在 C 上;

(2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q , 求证: A, P, B, Q 四点在同一圆上.



4. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过原点的直线 $l: y = k_1x (k_1 > 0)$ 交抛物线 $C: y^2 = 2x$ 于点 P (异于原点 O), 抛物线 C 上点 P 处的切线交 y 轴于点 M , 设线段 OP 的中点为 N , 连接 MN 交抛物线 C 于点 T .



(1) 求 $\frac{TM}{MN}$ 的值；

(2) 过点 P 作圆 $O' : (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的切线交 C 于另一点 Q ，设直线 OQ 的斜率为 k_2 ，求证： $|k_1 - k_2|$ 为定值.

第二篇 考前大排查之基础回归练——安心定志

第 1 练 复习性价比最高的几个问题——集合、简易逻辑、复数

查方法►明晰思路

集合运算	交、并、补	数轴和韦恩图是进行交、并、补运算的有力工具
	子集	若一个集合中有 n 个元素，则该集合的子集的个数为 2^n
简易逻辑	充要条件	若 p 对应集合 A ， q 对应集合 B ，则 $p \Rightarrow q$ 等价于 $A \subseteq B$ ， $p \Leftrightarrow q$ 等价于 $A = B$
	存在量词命题与全称量词命题	若 p 为假命题，则 p 为真命题
复数	加减法	$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i (a, b, c, d \in \mathbf{R})$
	乘法	$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i (a, b, c, d \in \mathbf{R})$
	除法	$(a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-da}{c^2+d^2}i (c+di \neq 0, a, b, c, d \in \mathbf{R})$

查能力►树立信心

一、单项选择题

1. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - 3x + 3 > 0$ ”的否定是()

A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 3 < 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 3 \leq 0$

C. $\exists x \notin \mathbf{R}, x^2 - 3x + 3 \leq 0$ D. $\exists x \notin \mathbf{R}, x^2 - 3x + 3 < 0$

2. 已知复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, i 为虚数单位, 那么 $|z| + \frac{1}{z}$ 等于()

A. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x+2} \leq 0 \right\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 那么 $A \cap B$

中元素的个数为()

A. 4 B. 5
C. 6 D. 无数个

4. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $(a-b)a^2 < 0$ ” 是 “ $a < b$ ” 的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 < 0\}$, $B = \left\{ y \mid y = x + \frac{1}{x}, x > 0 \right\}$, 则 $A \cup (\complement_U B)$ 等于()

A. $(-\infty, 3)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ D. $(-\infty, +\infty)$

6. 已知 $z_1 = -3 + 4i$, $|z| = 2$, 那么 $|z - z_1|$ 的最大值为()

A. 6 B. 7
C. 8 D. 9

二、多项选择题

7. 设集合 $M = \{x \mid a < x < 3 + a\}$, $N = \{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$, 则下列结论中正确的是()

A. 若 $a < -1$, 则 $M \subseteq N$ B. 若 $a > 4$, 则 $M \subseteq N$
C. 若 $M \cup N = \mathbf{R}$, 则 $1 < a < 2$ D. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $1 < a < 2$

8. 使得不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 成立的一个充分不必要条件是()

- A. $-2 < x < 0$ B. $0 < x < 3$
C. $-2 < x < 3$ D. $-2 < x < 4$

9. 下列结论中不正确的是()

- A. “ $x \in \mathbf{N}$ ”是“ $x \in \mathbf{Q}$ ”的充分不必要条件
B. “ $\exists x \in \mathbf{N}^*, x^2 - 3 < 0$ ”是假命题

C. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 则 “ $a^2 + b^2 = c^2$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 是直角三角形” 的充要条件

D. 命题 “ $\forall x > 0, x^2 - 3 > 0$ ” 的否定是 “ $\exists x > 0, x^2 - 3 \leq 0$ ”

10. 已知复数 $z = \frac{1+i}{1-i}$, 则()

- A. z^{2021} 是纯虚数
B. $|z+i|=2$
C. z 的共轭复数为 $-i$
D. 复数 $\bar{z} + z \cdot i$ 在复平面内对应的点在第二象限

三、填空题

11. 若不等式 $|x-2m| < 1$ 成立的一个充分不必要条件为 $1 < x < 2$, 则实数 m 的取值范围为_____.

12. 设集合 $A = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$. ①若 $a = -\frac{1}{3}$, 则集合 A 与 B 的关系为_____ ; ②若 $A \cap B = B$, 则实数 a 组成的集合 $C =$ _____.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 + (1-2i)x + (3m-i) = 0 (m \in \mathbf{R})$ 有实数根, 则实数 m 的值为_____, 方程的实数根 x 的值为_____.

14. 已知集合 $M = \{m \in \mathbf{Z} | \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + mx - 42 = 0 \text{ 有整数解}\}$, 集合 A 满足条件: ① A 是非空集合且 $A \subseteq M$; ②若 $a \in A$, 则 $-a \in A$. 则所有这样的集合 A 的个数为_____.

第2练 不等式

查方法►明晰思路

		注意四点: ①二次项系数为 0 或正、负情况; ②
--	--	---------------------------

不 等 式	一元二次不等式	二次方程的根是否存在；③根的大小情况；④不等号的方向
	基本不等式	已知 $a>0, b>0$, 那么 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立
	恒成立问题 (二次)	两种方法：①结合图象判断；②参变量分离

查能力►树立信心

一、单项选择题

1. 下列结论中正确的是()

- A. 若 $a>b, c>b$, 则 $a>c$ B. 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$
C. 若 $a>b, c>d$, 则 $ac>bd$ D. 若 $a>b, c>d$, 则 $a+c>b+d$

2. 若 $b>a>1$, 则下列不等式一定正确的是()

- A. $ab>2$ B. $a+b<2$
C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$

3. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-3,1)$, 则关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a>0$ 的解集为()

- A. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

4. 若正实数 a, b 满足 $\lg a + \lg b = 1$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{5}{b}$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. 2

5. 若关于 x 的不等式 $x^2+x^{-2}+a(x+x^{-1})+a+1>0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是()

- A. $\{a|a>-2\}$ B. $\{a|a>-1\}$

C. $\{a|a>0\}$

D. $\{a|a>1\}$

6. 若正数 a, b 满足 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 则 $\frac{2}{a-3} + \frac{3}{b-2}$ 的最小值为()

- A. 1
B. $\sqrt{2}$
C. 2
D. 4

二、多项选择题

7. 已知实数 x, y 满足 $-1 \leq x+y \leq 3, 4 \leq 2x-y \leq 9$, 则()

- A. $1 \leq x \leq 4$
B. $-2 \leq y \leq 1$
C. $2 \leq 4x+y \leq 15$
D. $\frac{1}{3} \leq x-y \leq \frac{23}{3}$

8. 若不等式 $\frac{1}{4x} + \frac{1}{1-4x} - m \geq 0$ 对 $x \in \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$ 恒成立, 则实数 m 的值可以为()

- A. 1
B. 2
C. 4
D. 5

9. 已知 $a > 0, b > 0, a+b=1$, 则()

- A. $ab \leq \frac{1}{4}$
B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$
D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{4}$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ 的最大值为 m , 若 $\exists x \in [0, +\infty)$, 使得 $m > x^2 - 2x + n$ 成立, 则满足条件的正整数 n 可能是()

- A. 4
B. 1
C. 2
D. 3

三、填空题

11. 若关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax + a \leq 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

12. 不等式 $-1 \leq x^2 - 2x - 1 < 2$ 的解集是_____.

13. 设函数 $f(x) = (k^2 + 4k - 5)x^2 + 2(1 - k)x + 1$, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) > 0$, 则实数 k 的取值范围为_____.

14. 设 $f(x) = 2|x-1| + |x+1|$, 则 $f(x)$ 的最小值 m 的值为_____, 若 $a^2 + b^2 =$

$(a-b) \cdot (a-2c)$ 的最大值是()

- A. $\frac{1}{2}$ B. -2
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $AB=2$, $AD=1$, $\angle DAB=60^\circ$, E 是 BC 的中点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{DB}$ 等于()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

6. 已知等边三角形 ABC 的边长为 2, $\vec{BD}=x\vec{BA}$, $\vec{CE}=y\vec{CA}$, $x>0$, $y>0$, 且 $x+y=1$, 则 $\vec{CD} \cdot \vec{BE}$ 的最大值为()

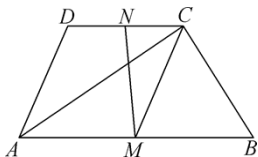
- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$
C. $-\frac{9}{8}$ D. -2

二、多项选择题

7. 已知 $|\mathbf{a}|=1$, $\mathbf{b}=(1, \sqrt{3})$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}+2\mathbf{b})=3$, 则()

- A. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=1$ B. 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$
C. $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ D. $\mathbf{a} \parallel (\mathbf{a}-2\mathbf{b})$

8. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为梯形, 若 $AB \parallel CD$, $AB=2CD$, M , N 分别为 AB , CD 的中点, 则下列结论正确的是()



- A. $\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ B. $\vec{MC} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BC}$
C. $\vec{MN} = \vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}$ D. $\vec{BC} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}$

9.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/948033111142006077>