幂的运算与新定义问题强化训练30题

一．解答题（共30小题）

1．定义：如果$a^c=b$，那么c为（a，b）的“幸福指数”，记为L（a，b）$=c$．例如$3^2=9$，那么2为（3，9）的“幸福指数”，记为L（3，9）$=2$．

（1）填空：L（2，8）＝________，L（－4，__________）＝2；

（2）若（－3，x）的“幸福指数”为3，（y，－8）的“幸福指数”也为3，求$x+y$的值．

2．如果$x^n=y$，那么我们记为：（x，y）$=n$．例如$3^2=9$，则（3，9）＝2．

（1）根据上述规定，填空：（2，8）＝ ________，（－3，9）＝ ________；

（2）若（x，64）＝2，则x＝ __________；

（3）若（4，a）＝2，（b，8）＝3，求（b，a）的值．

3．【定义新知】

如果a，b，c是整数，且$a^c=b$，那么我们规定一种记号（a，b）$=c$，例如$4^2=16$，那么记作（4，16）＝2．

【尝试应用】

（1）（2，8）＝ ________；

【拓展提升】

（2）若k、m、n、p均为整数，且（k，9）$=m$，（k，27）$=n$，（k，243）$=p$，求证：$m+n=p$．

4．如果 $x^n=y$，那么我们规定（x，y]＝n．例如：因为 $3^2=9$，所以（3，9]＝2．

（1）（2，32]＝ ______；若（－2，k]＝3，则 k＝ ________；

（2）已知（4，13]＝a，（2，3]＝b，（2，78]＝c，试求 a，b，c 满足的数量关系．

5．一般地，n 个相同的因数 a 相乘 $a\bullet a\bullet\cdots\bullet a$，记为 a^n，其中 a 称为底数，n 称为指数；若已知 $2^x=32$，易知 $x=5$，若 $2^x=33$，则该如何表示 x？一般地，如果 $a^x=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$），那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数（log*arithm*），记作 $x=\log_aN$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数．如 $3^4=81$，则 4 叫做以 3 为底 81 的对数，记为 $\log_381=4$；故 $2^x=33$ 中，$x=\log_233$．

（1）熟悉下列表示法，并填空：

$\because 2^1=2$，$\therefore \log_22=1$，

$\because 2^2=4$，$\therefore \log_24=2$，

$\because 2^3=8$，$\therefore \log_28=3$，

$\because 2^4=16$，$\therefore \log_216=$______，计算：$\log_232=$______；

（2）观察（1）中各个对数的真数和对数的值，我们可以发现 $\log_24+\log_28=$____________；（用对数表示结果）

（3）于是我们猜想：$\log_aM+\log_aN=$____________（$a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$）．请你请根据幂的运算法则及对数的含义证明你的结论；

（4）根据之前的探究，直接写出 $\log_aM-\log_aN=$_____________________．

6．如果 a、b、c 是整数，且 $a^c=b$，那么我们规定一种记号（a，b）$=c$，例如 $4^2=16$，那么记作（4，16）$=2$．

（1）（2，8）$=$ ＿＿＿＿＿．

（2）若 k、m、n、p 均为整数，且（k，9）$=m$，（k，27）$=n$，（k，243）$=p$，探究 m、n、p 之间满足的等量关系，并证明．

（3）小明在研究这种记号时发现一个规律：（a^n，b^n）$=$（a，b）（n 是正整数），请你帮他完成证明．

7．阅读理解：规定两数 a，b 之间的一种运算，若 $a^c=b$，记作（a，b）$=c$．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）$=3$．

（1）根据上述规定，填空：

①若（3，x）$=3$，则 $x=$＿＿＿＿＿＿；

②若（y，4）$=2$，则 $y=$＿＿＿＿＿＿．

（2）若（2，5）$=a$，（2，3）$=b$，（4，15）$=c$，请推理 a，b，c 三个量的数量关系．

8．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b），如果 $a^c=b$，那么（a，b）$=c$，例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）$=3$．

（1）根据上述规定，填空：（3，27）$=$＿＿＿＿＿，（5，1）$=$＿＿＿＿＿；

（2）小明在研究这种运算时发现一个现象，（3^n，4^n）$=$（3，4），小明给出了如下的证明：

设（3^n，4^n）$=x$，则 $(3^n)^x=4^n$，即 $(3^x)^n=4^n$，

∴$3^x=4$，即（3，4）$=x$，

∴（3^n，4^n）$=$（3，4）．

请你尝试用这种方法证明下面这个等式：（3，4）+（3，5）＝（3，20）.

9．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b），如果 $a^c=b$，则（a，b）＝c．我们叫（a，b）为“雅对”.

例如：因为 $2^3=8$，所以 （2，8）＝3．我们还可以利用“雅对”定义说明等式 （3，3）+（3，5）＝（3，15）成立．证明如下：

设 （3，3）＝m，（3，5）＝n，则 $3^m=3$，$3^n=5$，

故 $3^m\cdot 3^n=3^{m+n}=3\times 5=15$，

则 （3，15）＝$m+n$，

即 （3，3）+（3，5）＝（3，15）.

（1）根据上述规定，填空：（2，4）＝_______； （5，1）＝_______； （3，27）＝_______.

（2）计算 （5，2）+（5，7）＝_____________，并说明理由.

（3）利用“雅对”定义证明：（2^n，3^n）＝（2，3），对于任意自然数 n 都成立.

10．规定新运算“*”：$a*b=2^a\times 2^b$，如：$1*3=2\times 2^3=16$.

（1）求（－2）*5 的值；

（2）若 2*（$2x$+1）＝64，求 x 的值.

11．规定两正数 a，b 之间的一种运算记作 L（a，b），如果 $a^c=b$，那么 L（a，b）$=c$．

例如：因为 $3^2=9$，所以 L（3，9）=2．

请你解决下列问题：

（1）填空：L（2，16）=_______，$\mathrm{L}(\_\_\_，36)=-2$；

（2）如果正数 a、m、n，满足 L（a，m）$=x-2$，L（a，n）$=3x-6$，L（a，mn）$=2x+2$，求 x．

12．规定：$x\bullet y=3^x\bullet 3^y$．

（1）求 $2\bullet 5$ 的值；

（2）若 $1\bullet(4x-3)=81$，求 x 的值；

（3）判断，$x\bullet(y+z)$ 与 $(x+y)\bullet z$ 是否相等，并说明理由．

13．阅读下列材料：

若 a，b 两数满足 $a^x=b$，则称 x 为 b 的“对数”，记作（a，b）$=x$，如 $4^2=16$，所以（4，16）=2．

请根据以上规定，回答下列问题：

（1）根据上述规定要求，请完成填空：

（3，27）=_______，（-2，16）=_______，（$-\frac{2}{3}$，____________________）=3．

（2）计算（5，10）-（5，2）．

14．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b）；如果 $a^c=b$，那么（a，b）$=c$．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）＝3．

（1）根据上述规定，填空：

①（3，27）＝_______，（－2，－32）＝_______；

②若 $(x,\ \frac{1}{16})=-4$，则 x＝_________．

（2）若（3，5）＝a，（3，6）＝b，（3，30）＝c，试说明下列等式成立的理由：$a+b=c$．

15．在数学兴趣小组中，同学们从书上学到了很多有趣的数学知识．其中有一个数学知识引起了同学们的兴趣．根据 $a^n=b$，知道 a，n 可以求 b 的值．如果知道 a，b 可以求 n 的值吗？他们为此进行了研究，规定：若 $a^n=b$，那么 f（a，b）$=n$．例如：$3^3=27$，则 f（3，27）＝3．

（1）填空：f（2，4）＝_______，f（4，64）＝_______；

（2）计算：f（－3，81）－f（5，125）；

（3）若 f（a，－32）＝5，f（4，b）＝3，求 f（a，b）的值．

16．如果 $x^n=y$，那么我们规定（x，y]＝n．例如：因为 $4^2=16$，所以（4，16]＝2．

（1）（－2，16]＝_______；若（3，y]＝27，则 y＝__________；

（2）已知（4，12]＝a，（4，5]＝b，（4，y]＝c，若 $a+b=c$，求 y 的值；

17．阅读理解：①根据幂的意义，a^n表示 n 个 a 相乘；则 $a^{m+n}=a^m\bullet a^n$；②$a^n=m$，知道 a 和 n 可以求 m，我们不妨思考：如果知道 a，m，能否求 n 呢？对于 $a^n=m$，规定$[a，m]=n$，例如：因为 $6^2=36$，所以$[6，36]=2$．

（1）$[2，4]=$______，$[-\frac{1}{3}，-\frac{1}{27}]=$______；

（2）分别计算$[2，16]$、$[2，64]$的值，试猜想$[2，4]$、$[2，16]$、$[2，64]$之间的等量关系式；

（3）若记$[3，x]=5m$，$[3，y+1]=5m+1$，请用含 x 的代数式表示 y．

18．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b）：如果 $a^c=b$，那么（a，b）$=c$．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）=3．

（1）根据上述规定，填空：（5，125）=______，（﹣2，﹣32）=______；

（2）若（4，5）$=a$，（4，6）$=b$，（4，30）$=c$，试探究 a，b，c 之间存在的数量关系；

（3）若（m，8）+（m，3）=（m，t），求 t 的值．

19．定义：如果 $2^m=n$（m，n 为正数），那么我们把 m 叫做 n 的 D 数，记作 $m=D$（n）．

（1）根据 D 数的定义，填空：D（2）=______，D（16）=______．

（2）D 数有如下运算性质：D（$s\bullet t$）$=D$（s）$+D$（t），D（$\frac{q}{p}$）$=D$（q）﹣D（p），其中 $q>p$．

根据运算性质，计算：

①若 D（a）＝1，求 D（a^3）；

②若已知 D（3）＝$2a-b$，D（5）＝$a+c$，试求 D（15），D（$\frac{5}{3}$），D（108），D（$\frac{27}{20}$）的值（用 a、b、c 表示）．

20．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b）：如果 $a^c=b$，那么（a，b）＝c．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）＝3．

（1）根据上述规定，填空：（4，64）＝ _______，（ _________， －27）＝3；

（2）若（5，3）＝a，（5，8）＝b，（5，24）＝c，请你尝试运用上述运算证明：$a+b=c$；

（3）进一步探究这种运算时发现一个结论：（x^n，y^n）＝（x，y），

证明：

设（x^n，y^n）＝m，∴（x^n）$^m=y^n$，∴（x^m）$^n=y^n$，

∴$x^m=y$，即（x，y）＝m．

∴（x^n，y^n）＝（x，y）．

结合（2）、（3）探索的结论，计算：$(8，125)+(4，\frac{64}{25})=$ _______．

21．观察下列两个等式：$2-\frac{1}{3}=2\times\frac{1}{3}+1$，$5-\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3}+1$，给出定义如下：我们称使 $a-b=ab+1$ 成立的一对有理数 a，b 为“共生有理数对”，记为（a，b），如数对$(2，\frac{1}{3})$，$(5，\frac{2}{3})$都是“共生有理数对”．

（1）判断数对（－2，1）是否为“共生有理数对”，并说明理由；

（2）若（m，n）是“共生有理数对”，且 $m-n=4$，求（4^m）^{n} 的值；

（3）若（m，n）是“共生有理数对”，且 mn＝3，求（－2）$^{m-n}$的值．

22．定义一种幂的新运算：$x^a \oplus x^b = x^{ab} + x^{a+b}$．如：$3 \oplus 3^2 = 3^{1\times2} + 3^{1+2} = 3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$，请利用这种运算规则解决下列问题：

（1）求 $2^2 \oplus 2^3$ 的值；

（2）2^p＝3，2^q＝5，3^q＝6，求 $2^p \oplus 2^q$ 的值．

23．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b）：如果 $a^c = b$，那么（a，b）＝c．例如：因为 2^3＝8，所以（2，8）＝3．

（1）根据上述规定，填空：（4，16）＝_______，（8，1）＝_______，（_______，$\frac{1}{9}$）＝－2．

（2）小明在研究这种运算时发现一个特征：（3^n，4^n）＝（3，4），

小明给出了如下的证明：

设（3^n，4^n）＝x，则（3^n）^{x}＝4^n，即（3^x）^{n}＝4^n

所以 3^x＝4，即（3，4）＝x，

所以（3^n，4^n）＝（3，4）．

试解决下列问题：

①计算（32，100000）－（8，1000）；

②请尝试运用这种方法证明（2024，15）＝（2024，3）+（2024，5）．

24．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作【a，b】：如果 $a^c=b$，那么【a，b】$=c$．例如：因为 $2^3=8$，所以【2，8】$=3$．

（1）根据上述规定，填空：【4，64】$=$_______，【5，1】$=$_______，【_________，81】$=4$．

（2）小明在研究这种运算时发现一个现象：【3^n，4^n】$=$【3，4】，小明的理由如下：

设【3^n，4^n】$=x$，则（3^n）$^x=4^n$，即（3^x）$^n=4^n$，所以 $3^x=4$，即【3，4】$=x$，所以【3^n，4^n】$=$【3，4】.

请你尝试运用这种方法解决下列问题：

①试说明：【7，5】+【7，9】$=$【7，45】；

②猜想：【（$x+1$）^{n}，（$y-1$）^{n}】+【（$x+1$）^{n}，（$y+2$）^{n}】$=$【__________，___________】（$x>-1$，$y>1$）．

25．对于整数 a，b 定义新运算；$a※b=$（a^b）$^m+$（b^a）^{n}（其中 m，n 为常数），如 $3※2=$（3^2）$^m+$（2^3）^{n}.

（1）当 $m=1$，$n=100$ 时，$2※1$ 的值为 _______；

（2）若 $4^{m-n}=3$，$1※4=7$，求 $2※2$ 的值．

26．定义一种幂的新运算：$x^a \oplus x^b=x^{ab}+x^{a+b}$，请利用这种运算规则解决下列问题：

（1）$2^2 \oplus 2^3=$_________；

（2）$2^p=3$，$2^q=5$，$3^q=6$，求 $2^p \oplus 2^q$ 的值；

27．当前计算机常用的数据形式是二进制，二进制数与十进制数之间的转化问题，二进制数的计算问题十分常见．为了区分二进制与十进制的数，我们一般在二进制数的右下角标注2，例如10110_2．

（1）类比十进制的计数原理：$12035=1\times10^4+2\times10^3+0\times10^2+3\times10^1+5$，把一个二进制数转化为十进制数的方法为：$10110_2=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0=22$．

请你将二进制数10011_2转化为十进制数：则$10011_2=$ ＿＿＿＿＿＿；

（2）二进制的四则运算与十进制的四则运算原理相同，不同的是十进制的数位有十个数码0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，满十进一，而二进制的数位有两个数码0和1，满二进一．

二进制的四则运算口诀如下：

加法：$0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=10_2$．

减法：$0-0=0$，$1-0=1$，$1-1=0$，$10_2-1=1$（同一数位不够减时，向高一位借1当2）．

请根据以上信息和所学的竖式计算相关知识，填空：

①$10110_2+1101_2=$ ＿＿＿＿＿＿$_2$；

②$110101_2-11110_2=$ ＿＿＿＿＿＿2．

28．教材重读：小明在学完第12章《证明》后，对数学推理证明有了进一步的认识，在回顾第8章《幂的运算》过程中，小明又仔细阅读七下教材$P57$如下的一段话：

规定了零指数幂、负整数指数幂的意义后，同底数幂的除法运算性质扩展为：

$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a\neq 0$，m、n 是整数）.

小明注意到当 m、n 是正整数，$m>n$ 时，教材给出根据幂的定义证明 $a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a\neq 0$，m、n 是正整数，$m>n$）成立，但对于幂运算性质适用一切整数指数幂，并未给出相应的解释.

为此，小明进行了如下的探究：

（1）根据幂的定义证明同底数幂的除法法则：$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a\neq 0$，m、n 是正整数，$m>n$）.

（2）当 $m=3$，$n=-2$ 时，根据负整数指数幂的定义，

得 $a^3 \div a^{-2} = a^3 \div$____________________$= a^3 \cdot a^2 = a^5$，

$\because a^{3-(-2)} = a^5$，

$\therefore a^3 \div a^{-2} = a^{3-(-2)}$.

（3）当 m、n 是正整数时，根据负整数指数幂的定义，证明：$a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$（$a\neq 0$）.

29．规定两正数 a，b 之间的一种运算记作 L（a，b），如果 $a^c=b$，那么 L（a，b）$=c$.

例如：因为 $3^2=9$，所以 L（3，9）$=2$.

小明在研究这种运算时发现一个结论：L（a，$\frac{m}{n}$）$=L$（a，m）$-L$（a，n）.

小明给出了如下的证明：

设 L（a，m）$=x$，L（a，n）$=y$，

由规定，得 $a^x=m$，$a^y=n$，

$\therefore \frac{m}{n} = a^x \div a^y = a^{(x-y)}$，

$\therefore L$（a，$\frac{m}{n}$）$=x-y$，

$\therefore L(a,\dfrac{m}{n})=L(a,m)-L(a,n)$.

请你解决下列问题：

（1）填空：L（2，16）＝_______，L（ ____________________，36）＝－2；

（2）证明：L（3，5）+L（3，8）＝L（3，40）；

（3）如果正数 a、m、n，满足 L（a，m）＝$x-2$，L（a，n）＝$3x-6$，L（a，mn）＝$2x+2$，求 x．

30．规定两数 a，b 之间的一种运算，记作（a，b），如果 $a^m=b$，则（a，b）＝m．我们叫（a，b）为“雅对”．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）＝3．我们还可以利用“雅对”定义说明等式（3，3）＋（3，5）＝（3，15）成立．证明如下：

设（3，3）＝m，（3，5）＝n，则 $3^m=3$，$3^n=5$，故 $3^m\cdot 3^n=3^{m+n}=3\times5=15$，则（3，15）＝$m+n$，即（3，3）＋（3，5）＝（3，15）．

（1）根据上述规定，填空：（3，81）＝_______；（ _________， －125）＝3；

（2）求证：（5，4）＋（5，9）＝（5，36）．

参考答案与试题解析

幂的运算与新定义问题强化训练 30 题

一．解答题（共 30 小题）

1．定义：如果 $a^c=b$，那么 c 为（a，b）的“幸福指数”，记为 L（a，b）＝c．例如 $3^2=9$，那么 2 为（3，9）的“幸福指数”，记为 L（3，9）＝2．

（1）填空：L（2，8）＝__3__，L（－4，__16__）＝2；

（2）若（－3，x）的“幸福指数”为 3，（y， －8）的“幸福指数”也为 3，求 $x+y$ 的值．

【分析】（1）根据 $a^c=b$，那么 c 为（a，b）的“幸福指数”，记为 L（a，b）＝c 直接求解即可得到答案

（2）根据 $a^c=b$，那么 c 为（a，b）的“幸福指数”，记为 L（a，b）＝c 直接求解即可得到答案；

【详解】（1）解：$\because 2^3=8$，$(-4)^2=16$，

$\therefore L$（2，8）＝3，L（－4，16）＝2，

故答案为：3，16；

（2）∵（﹣3，x）的“幸福指数”为3，

∴x=（﹣3）^{3}=﹣27，

∵（y，﹣8）的“幸福指数”也为3，

∴y^3=﹣8，

∴y=﹣2，

∴$x+y$=﹣27+（﹣2）=﹣29．

2．如果$x^n=y$，那么我们记为：（x，y）=n．例如3^2=9，则（3，9）=2．

（1）根据上述规定，填空：（2，8）= __3__，（﹣3，9）= __2__；

（2）若（x，64）=2，则x= __±8__；

（3）若（4，a）=2，（b，8）=3，求（b，a）的值．

【分析】（1）据题意，由2^3=8，（﹣3）^{2}=9可求得此题结果；

（2）由（±8）^{2}=64可得（±8，64）=2，从而得到此题结果是±4；

（3）由4^2=16，2^3=8可得，a=16，b=2，又由2^4=16，可求得此题结果为4．

【详解】解：由已知：如果$x^n=y$，那么我们记为：（x，y）=n．例如3^2=9，则（3，9）=2．

（1）∵2^3=8，（﹣3）^{2}=9，

∴（2，8）=3，（﹣3，9）=2，

故答案为：3，2；

（2）∵（±8）^{2}=64，

∴（8，64）=2或（﹣8，64）=2，

∴x=±8，

故答案为：±8；

（3）∵4^2=16，2^3=8，

∴（4，16）=2，（2，8）=3，

∴a＝16，b＝2，

又∵2^4＝16，

∴（b，a）＝（2，16）＝4．

3．【定义新知】

如果 a，b，c 是整数，且 a^c＝b，那么我们规定一种记号（a，b）＝c，例如 4^2＝16，那么记作（4，16）＝2．

【尝试应用】

（1）（2，8）＝ <u>3</u>；

【拓展提升】

（2）若 k、m、n、p 均为整数，且（k，9）＝m，（k，27）＝n，（k，243）＝p，求证：$m+n$＝p．

【分析】（1）根据新定义求解即可；

（2）根据新定义得到 k^m＝9，k^n＝27，k^p＝243，则可证明 $k^m•k^n$＝k^p，再由同底数幂乘法计算法则得到 k^{m+n}＝k^p，即可证明 $m+n$＝p．

【详解】解：（1）∵2^3＝8，

∴（2，8）＝3，

故答案为：3；

（2）∵（k，9）＝m，（k，27）＝n，（k，243）＝p，

∴k^m＝9，k^n＝27，k^p＝243，

∴$k^m•k^n$＝9×27＝243，

∴$k^m•k^n$＝k^p，即 k^{m+n}＝k^p，

∴$m+n$＝p．

4．如果 x^n＝y，那么我们规定（x，y]＝n．例如：因为 3^2＝9，所以（3，9]＝2．

（1）（2，32]＝ <u>5</u>；若（﹣2，k]＝3，则 k＝ <u>﹣8</u>；

（2）已知（4，13]＝a，（2，3]＝b，（2，78]＝c，试求 a，b，c 满足的数量关系．

【分析】（1）4^a＝13，2^b＝3，2^c＝78，根据已知条件中的新定义得到 2^5＝32，（﹣2）^{3}

$=-8$，再求出答案即可；

（2）根据已知条件中的新定义得到 $4^a=13$，$2^b=3$，$2^c=78$，再根据 $78=13\times3\times2$，利用同底数幂相乘法则求出答案即可．

【详解】解：（1）∵$x^n=y$，我们规定（x，y]$=n$，$2^5=32$，

∴（2，32]＝5，$k=(-2)^3=-8$，

故答案为：5，-8；

（2）∵$x^n=y$，我们规定（x，y]$=n$，

∴$4^a=13$，$2^b=3$，$2^c=78$，

∵$78=13\times3\times2$，

∴$4^a\cdot2^b\cdot2=2^c$，

$2^{2a+b+1}=2^c$，

∴$c=2a+b+1$．

5．一般地，n 个相同的因数 a 相乘 $a\cdot a\cdot\cdots\cdot a$，记为 a^n，其中 a 称为底数，n 称为指数；若已知 $2^x=32$，易知 $x=5$，若 $2^x=33$，则该如何表示 x？一般地，如果 $a^x=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$），那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数（log*arithm*），记作 $x=\log_aN$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数．如 $3^4=81$，则 4 叫做以 3 为底 81 的对数，记为 $\log_381=4$；故 $2^x=33$ 中，$x=\log_233$．

（1）熟悉下列表示法，并填空：

∵$2^1=2$，

∴$\log_22=1$，

∵$2^2=4$，

∴$\log_24=2$，

∵$2^3=8$，

∴$\log_28=3$，

∵$2^4=16$，

∴$\log_216=$__4__，计算：$\log_232=$__5__；

（2）观察（1）中各个对数的真数和对数的值，我们可以发现 $\log_2 4+\log_2 8=$ ___$\log_2 32$___；（用对数表示结果）

（3）于是我们猜想：$\log_a M+\log_a N=$ ___$\log_a MN$___（$a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$）．请你请根据幂的运算法则及对数的含义证明你的结论；

（4）根据之前的探究，直接写出 $\log_a M-\log_a N=$ ___$\log_a \frac{M}{N}$___．

【分析】（1）根据指数和对数的定义进行解答即可；

（2）由（1）中结果可得答案；

（3）利用“指数”和“对数”的定义，以及同底数幂的乘法进行计算即可；

（4）利用（3）中的方法以及同底数幂的除法进行计算即可．

【详解】解：（1）$\because 2^4=16$，

$\therefore \log_2 16=4$，

$\because 2^5=32$，

$\therefore \log_2 32=5$，

故答案为：4，5；

（2）由（1）可得，$\log_2 4+\log_2 8=2+3=5=\log_2 32$，

故答案为：$\log_2 32$；

（3）$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$，

证明：设 $x=\log_a M$，$y=\log_a N$，则 $a^x=M$，$a^y=N$，

$\therefore a^x\cdot a^y=MN$，

即 $a^{x+y}=MN$，

$\therefore x+y=\log_a MN$，

$\therefore \log_a M+\log_a N=\log_a MN$；

（4）$\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$，

证明：设 $x=\log_a M$，$y=\log_a N$，则 $a^x=M$，$a^y=N$，

$\therefore a^x \div a^y = \frac{M}{N}$,

即 $a^{x-y} = \frac{M}{N}$,

$\therefore x-y=\log_a\frac{M}{N}$,

$\therefore \log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$.

6．如果 a、b、c 是整数，且 $a^c=b$，那么我们规定一种记号（a，b）$=c$，例如 $4^2=16$，那么记作（4，16）$=2$.

（1）（2，8）＝ __3__.

（2）若 k、m、n、p 均为整数，且（k，9）$=m$，（k，27）$=n$，（k，243）$=p$，探究 m、n、p 之间满足的等量关系，并证明.

（3）小明在研究这种记号时发现一个规律：（a^n，b^n）＝（a，b）（n 是正整数），请你帮他完成证明.

【分析】（1）设（2，8）$=x$，根据这种记号的定义列关于 x 的方程并求解即可；

（2）根据这种记号的定义得到三个等式，再根据同底数幂的乘法运算法则证明即可；

（3）设（a^n，b^n）$=s$，（a，b）$=t$，根据这种记号的定义得到两个等式，再利用幂的乘方运算法则证明 $s=t$ 即可.

【详解】（1）解：设（2，8）$=x$，则 $2^x=8$，

$\because 2^x=8=2^3$，

$\therefore x=3$，

∴（2，8）＝3.

故答案为：3.

（2）$m+n=p$.

证明：∵（k，9）$=m$，（k，27）$=n$，（k，243）$=p$，

$\therefore k^m=9$，$k^n=27$，$k^p=243$，

$\because k^m \cdot k^n=k^{m+n}=9\times27=243$，

$\therefore k^{m+n}=k^p$，

$\therefore m+n=p$.

（3）证明：设（a^n，b^n）$=s$，（a，b）$=t$，

则（a^n）$^s=b^n$，$a^t=b$，

$\therefore$（a^n）$^s=a^{ns}=b^n=$（a^t）$^n=a^{nt}$，

$\therefore ns=nt$，

$\because n$ 是正整数，

$\therefore s=t$，

$\therefore$（a^n，b^n）$=$（a，b）.

7．阅读理解：规定两数 a，b 之间的一种运算，若 $a^c=b$，记作（a，b）$=c$．例如：因为 $2^3=8$，所以（2，8）$=3$．

（1）根据上述规定，填空：

①若（3，x）$=3$，则 $x=$__27__；

②若（y，4）$=2$，则 $y=$__± 2__．

（2）若（2，5）$=a$，（2，3）$=b$，（4，15）$=c$，请推理 a，b，c 三个量的数量关系．

【分析】（1）根据新运算，得到 $x=3^3$，$y^2=4$，进行求解即可；

（2）根据新运算，$2^a=5$，$2^b=3$，$4^c=15$，根据同底数幂的乘法，幂的乘方的逆用进行判断即可．

【详解】解：（1）①$x=3^3=27$；

故答案为：27；

②$\because 2^2=4$，$(-2)^2=4$，

$\therefore y=\pm 2$；

故答案为：± 2；

（2）$\because$（2，5）$=a$，（2，3）$=b$，（4，15）$=c$，

$\therefore 2^a=5$，$2^b=3$，$2^{2c}=15$，

$\therefore 2^a\cdot 2^b=2^{a+b}=2^{2c}$，

$\therefore a+b=2c$．