

2023-2024 学年湖南省长沙市高二上学期期末考试数学模拟试题

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，满分 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

1. 设复数 z 满足 $|z-i|=1$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则

A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$

2. 直线 $2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $mx + 3y - 2 = 0$ 平行，则 $m =$

A. 2 B. 2 或 -3 C. -3 D. -2 或 -3

3. 已知角 α 的终边与单位圆的交于点 $P\left(-\frac{1}{2}, y\right)$ ，则 $\sin \alpha \cdot \tan \alpha =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\pm\frac{3}{2}$

4. 随着新一轮科技革命和产业变革持续推进，以数字化、网络化、智能化以及融合化为主要特征的新型基础设施建设越来越受到关注。5G 基站建设就是“新基建”的众多工程之一，截至 2020 年底，我国已累计开通 5G 基站超 70 万个，未来将进一步完善基础网络体系，稳步推进 5G 网络建设，实现主要城区及部分重点乡镇 5G 网络覆盖。2021 年 1 月计划新建设 5 万个 5G 基站，以后每个月比上一个月多建设 1 万个，预计我国累计开通 500 万个 5G 基站时要到 ()

A. 2022 年 12 月 B. 2023 年 2 月 C. 2023 年 4 月 D. 2023 年 6 月

5. 已知 $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，则 $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_5| =$ ()

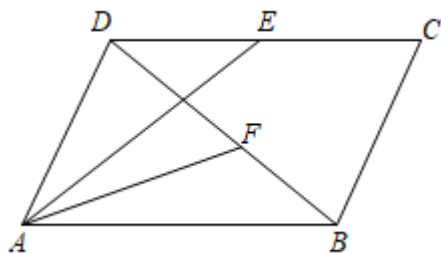
A. 1 B. 243 C. 121 D. 122

6. 设椭圆 E 的两焦点分别为 F_1, F_2 ，以 F_1 为圆心， $|F_1F_2|$ 为半径的圆与 E 交于 P, Q 两点，若 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，则 E 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}+1$

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，点 F 为线段 BD 上的一动点，若

$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AE} + y\overrightarrow{DC}$ ($x > 0, y > 0$)，则 $\frac{2-3x}{4y^2+1}$ 的最大值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. 2

8. 已知当 $x \geq e$ 时, 不等式 $x^a + \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}} \geq a \ln x$ 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. e D. $\frac{1}{e^2}$

二、多选题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 满分 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 4 个班分别从 3 个景点选择一处游览, 不同的选法的种数是 3^4 ;
 B. 从 1, 2, 3, 4, 5 选择 2 个数 (可重复) 组成两位偶数一共有 10 个;
 C. 两个口袋分别装有 2 个和 3 个小球, 从两个口袋分别各取 1 个球, 一共有 5 种取法;
 D. 从 1, 3, 5, 7, 10 选择 2 个不相同的数作为分子分母组成分数, 一共可以组成 10 个分数;

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 并且满足条件 $a_1 > 1$,

$$a_7 \cdot a_8 > 1, \frac{a_7 - 1}{a_8 - 1} < 0, \text{ 则下列结论正确的是 ()}$$

- A. $0 < q < 1$ B. $a_7 \cdot a_9 > 1$
 C. S_n 的最大值为 S_9 D. T_n 的最大值为 T_7

11. 已知函数 $f(x) = x + \sin x - x \cos x$ 的定义域为 $[-2\pi, 2\pi)$, 则 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数
 B. $f(x)$ 在 $[0, \rho)$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 有且仅有 4 个极值点
 D. $f(x)$ 恰有 4 个极大值点

12. 下列有关正方体的说法, 正确的有 ()

- A. 正方体的内切球、棱切球、外接球的半径之比为 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$
- B. 若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, Q 为正方体侧面 BCC_1B_1 上的一个动点, E, F 为线段 AC_1 的两个三等分点, 则 $|QE|+|QF|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{11}}{3}$
- C. 若正方体 8 个顶点到某个平面的距离为公差为 1 的等差数列, 则正方体的棱长为 $2\sqrt{5}$
- D. 若正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 3, 点 P 在棱 CC' 上, 且 $PC=2PC'$, 则三棱锥 $B'-D'AP$ 的外接球表面积为 $\frac{99}{4}\pi$

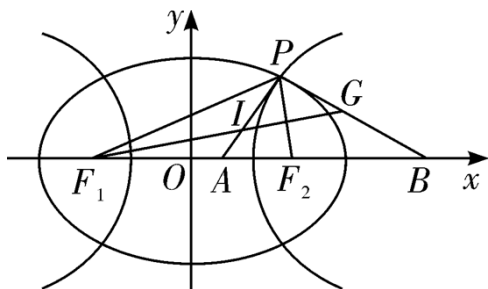
三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax^2 + 2$, 若 $f'(e) = 0$, 则 $a =$ _____.

14. 若直线 $x + ay - a - 1 = 0$ 与圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 当 $|AB|$ 最小时, 劣弧 \widehat{AB} 的长为 _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $(a - 2c \cos B) \sin A = \sqrt{2} a \cos A$, $a = \sqrt{2}$, 且 $\cos B = -\sin C$, 则 $bc =$ _____.

16. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 有公共焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$, 椭圆的离心率为 e_1 , 双曲线的离心率为 e_2 , 点 P 为两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, I 为 $\triangle F_1PF_2$ 的内心, F_1, I, G 三点共线, 且 $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{IP} = 0$, x 轴上点 A, B 满足 $\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{IP}, \overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{GP}$, 则 $e_1 e_2$ 的最小值为 _____; $\lambda^2 + \mu^2$ 的最小值为 _____.



四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

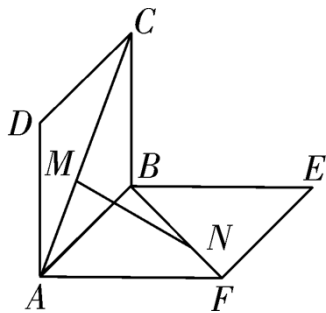
17. 已知函数 $f(x) = (2\sqrt{3}\sin x - \cos x) \cos x + \sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间和最小正周期;

(2)若当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, 不等式 $f(x) \geq m$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

18. 用总长为 $\frac{52}{3}m$ 的钢条制作一个长方体容器的框架, 如果所制容器底面一边比另一边的长多 $1m$, 那么高为多少时容器的容积最大? 最大容积是多少?

19. 在如图所示的试验装置中, 两个正方形框架 $ABCD, ABEF$ 的边长都是 1, 且它们所在的平面互相垂直. 活动弹子 M, N 分别在正方形对角线 AC 和 BF 上移动, 且 CM 和 BN 的长度保持相等, 记 $CM = BN = t (0 < t < \sqrt{2})$.



(1)求 MN 长的最小值;

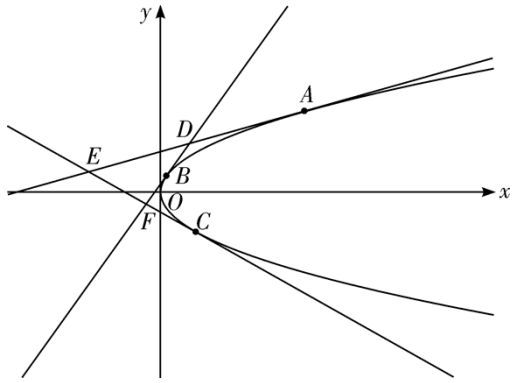
(2)当 MN 的长最小时, 求二面角 $A-MN-B$ 的正弦值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且满足
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3, & n \text{ 为奇数,} \\ 4a_n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

(1)记 $b_n = a_{2n}$, 证明: $\{b_n + 1\}$ 为等比数列;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 $2n-1$ 项和 S_{2n-1} .

21. 阅读材料并解决如下问题: Bézier 曲线是计算机图形学及其相关领域中重要的参数曲线之一. 法国数学家 DeCasteljau 对 Bézier 曲线进行了图形化应用的测试, 提出了 DeCasteljau 算法: 已知三个定点, 根据对应的一定比例, 使用递推画法, 可以画出抛物线. 反之, 已知抛物线上三点的切线, 也有相应边成比例的结论. 已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的动点到焦点距离的最小值为 $\frac{1}{2}$.



(1)求 Γ 的方程及其焦点坐标和准线方程;

(2)如图, A, B, C 是 Γ 上的三点, 过三点的三条切线分别两两交于点 D, E, F , 若 $AC \parallel DF$, 求

$\frac{|BD|}{|BF|}$ 的值.

22. 设 $f(x) = e^x(e^x - 2ax - 1)$ 且 $f(x) \geq 0$ 恒成立.

(1)求实数 a 的值;

(2)证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$.

1. C

【分析】本题考点为复数的运算，为基础题目，难度偏易。此题可采用几何法，根据点 (x, y) 和点 $(0, 1)$ 之间的距离为 1，可选正确答案 C。

【详解】 $z = x + yi, z - i = x + (y - 1)i, |z - i| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1$, 则 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 。故选 C。

【点睛】本题考查复数的几何意义和模的运算，渗透了直观想象和数学运算素养。采取公式法或几何法，利用方程思想解题。

2. B

【分析】两直线平行，斜率相等；按 $m + 1 = 0$ ， $m = 0$ 和 $m + 1 \neq 0, m \neq 0$ 三类求解。

【详解】当 $m + 1 = 0$ 即 $m = -1$ 时，

两直线为 $2x + 4 = 0$ ， $-x + 3y - 2 = 0$ ，

两直线不平行，不符合题意；

当 $m = 0$ 时，

两直线为 $2x + y + 4 = 0$ ， $3y - 2 = 0$

两直线不平行，不符合题意；

当 $m + 1 \neq 0, m \neq 0$ 即 $m \neq -1, m \neq 0$ 时，

直线 $2x + (m + 1)y + 4 = 0$ 的斜率为 $-\frac{2}{m + 1}$ ，

直线 $mx + 3y - 2 = 0$ 的斜率为 $-\frac{m}{3}$ ，

因为两直线平行，所以 $-\frac{2}{m + 1} = -\frac{m}{3}$ ，

解得 $m = 2$ 或 -3 ，

故选 B。

【点睛】本题考查直线平行的斜率关系，注意斜率不存在和斜率为零的情况。

3. C

【详解】分析：首先求出点 P 的坐标，再利用三角函数的定义得出 $\cos \alpha, \sin \alpha$ 的值，进而由同角三角函数基本关系式求出结果即可。

详解：∵点 $P\left(-\frac{1}{2}, y\right)$ 在单位圆上， $\therefore y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则由三角函数的定义可得

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } \sin \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

点睛：此题考查了三角函数的定义以及同角三角函数基本关系式的应用，求出 y 的值是解题的关键。

4. B

【分析】每个月开通5G基站个数是以5为首项，1为公差的等差数列，设预计我国累计开通500万个5G基站需要 n 个月，结合等差数列的前 n 项和公式列得关于 n 的方程，解之即可。

【详解】每个月开通5G基站个数是以5为首项，1为公差的等差数列，设预计我国累计开通500万个5G基站需要 n 个月，则

$$70 + 5n + \frac{n(n-1)}{2} \times 1 = 500,$$

化简整理得， $n^2 + 9n - 860 = 0$,

解得 $n \approx 25.17$ 或 -34.17 （舍负），

所以预计我国累计开通500万个5G基站需要25个月，也就是到2023年2月。

故选：B.

5. B

【分析】运用赋值法建立方程组，解之可得选项.

【详解】令 $x=1$ ，得 $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$ ①，

令 $x=-1$ ，得 $-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243$ ②，

①+②，得 $2(a_4+a_2+a_0)=-242$ ，即 $a_4+a_2+a_0=-121$ ，

①-②，得 $2(a_5+a_3+a_1)=244$ ，即 $a_5+a_3+a_1=122$ 。

所以 $|a_0|+|a_1|+\dots+|a_5|=122+121=243$ 。

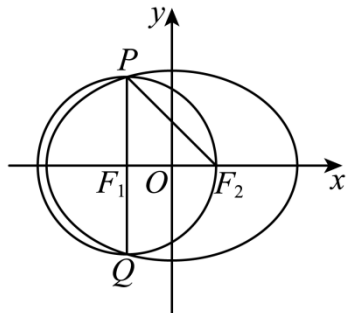
故选：B.

【点睛】方法点睛：对形如 $(ax+b)^n$ ($a, b \in R$)的式子求其展开式的各项系数之和，常用赋值法，只需令 $x=1$ 即可；对形如 $(ax+by)^n$ ($a, b \in R$)的式子求其展开式中各项系数之和，只需令 $x=y=1$ 即可。

6. B

【分析】由 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，得 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ ，可得 $|PF_1| = 2c, |PF_2| = 2\sqrt{2}c$ ，利用椭圆的定义和离心率的概念，即可求解。

【详解】如图所示，因为 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，所以 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ ，所以 $|PF_1| = 2c, |PF_2| = 2\sqrt{2}c$ ，则 $2c + 2\sqrt{2}c = 2a$ ，解得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} - 1$ ，故选 B



【点睛】本题主要考查了椭圆的标准方程及其简单的几何性质的应用，其中解答中合理利用椭圆的定义和离心率的概念求解是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题。

7. A

【分析】设 BD, AE 交于 O ，根据题意可得 $\triangle AOB \sim EOD$ ，所以 $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{AO}$ ，进而可得 $\overline{AF} = \frac{3}{2}x\overline{AO} + y\overline{AB}$ ，根据 O, F, B 三点共线，可得 x, y 的关系，代入所求，即可基本不等式，即可得答案。

【详解】设 BD, AE 交于 O ，因为 $DE \parallel AB$ ，

所以 $\triangle AOB \sim EOD$ ，所以 $\frac{AO}{OE} = \frac{AB}{DE} = 2$ ，

所以 $AO = 2OE$ ，则 $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{AO}$ ，

所以 $\overline{AF} = x\overline{AE} + y\overline{DC} = \frac{3}{2}x\overline{AO} + y\overline{AB}$ ，

因为 O, F, B 三点共线，

所以 $\frac{3}{2}x + y = 1$ ，即 $2 - 3x = 2y$ ，

所以 $\frac{2-3x}{4y^2+1} = \frac{2y}{4y^2+1} = \frac{2}{4y+\frac{1}{y}}$ ，

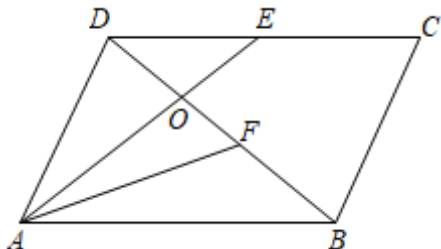
因为 $x > 0, y > 0$ ，所以 $4y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{4y \cdot \frac{1}{y}} = 4$ ，

当且仅当 $4y = \frac{1}{y}$ ，即 $y = \frac{1}{2}$ 时等号成立，此时 $x = \frac{1}{3}$ ，

$$\frac{2-3x}{4y^2+1} = \frac{2}{4y+\frac{1}{y}} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

所以

故选：A



8. B

【分析】原不等式可变形为 $e^{\frac{1}{x}} - \ln e^{\frac{1}{x}} \leq x^a - \ln x^a$ ，令 $f(x) = x - \ln x$ 则 $f\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \leq f(x^a)$ 对于 $x \geq e$ 恒成立，利用导数判断 $f(x) = x - \ln x$ 的单调性可得 $e^{\frac{1}{x}} \leq x^a$ ，转化为 $a \geq \frac{1}{x \ln x}$ ，令

$h(x) = x \ln x (x \in [e, +\infty))$ ，利用导数求 $h(x)$ 最小值可得 $\frac{1}{x \ln x}$ 的最大值即可求解。

【详解】由题意，原不等式可变形为 $e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \leq x^a - a \ln x$ ，即 $e^{\frac{1}{x}} - \ln e^{\frac{1}{x}} \leq x^a - \ln x^a$ ，

设 $f(x) = x - \ln x$ ，则当 $x \geq e$ 时， $f\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \leq f(x^a)$ 恒成立，

因为 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

因为 $x \geq e$ ， $a > 0$ 所以 $e^{\frac{1}{x}} > 1$ ， $x^a > 1$ ，

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，所以要使 $f\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \leq f(x^a)$ ，只需 $e^{\frac{1}{x}} \leq x^a$ ，

两边取对数，得 $\frac{1}{x} \leq a \ln x$ ，因为 $x \geq e$ ，所以 $a \geq \frac{1}{x \ln x}$ ；

令 $h(x) = x \ln x (x \in [e, +\infty))$ ，因为 $h'(x) = \ln x + 1 > 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min} = h(e) = e$ ，

所以 $0 < \frac{1}{x \ln x} \leq \frac{1}{e}$ ，则 $a \geq \frac{1}{e}$ ，故正实数 a 的最小值为 $\frac{1}{e}$ ，

故选：B.

9. AB

【分析】计算4个班分别从3个景点选择一处游览，共有几种选法，判断A；计算出从1, 2, 3, 4, 5选择2个数（可重复）组成两位偶数一共有几个，判断B；根据分步乘法原理计算两个口袋分别装有2个和3个小球，从两个口袋分别各取1个球，有几种取法，判断C；考虑1作分子情况和不选1时的情况，计算出分数的个数，判断D.

【详解】A, 4个班分别从3个景点选择一处游览，每一个班都有3种选择，分4步完成，故有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ 种选法，A正确；

B, 从1, 2, 3, 4, 5选择2个数（可重复）组成两位偶数，先确定个位数字有2种可能，再确定十位数字有5种可能，故共有 $2 \times 5 = 10$ 个偶数，B正确；

C, 两个口袋分别装有2个和3个小球，从两个口袋分别各取1个球，共有 $2 \times 3 = 6$ 种取法，C错误；

D, 从1, 3, 5, 7, 10选择2个不相同的数作为分子分母组成分数，若选1作分子，则分母有4种可能，此时有4个分数，

不选1时，共有 $A_4^2 = 12$ 个分数，

故共有 $4 + 12 = 16$ 个分数，故D错误，

故选：AB

10. AD

【分析】根据题意 $a_7 > 1$, $a_8 < 1$ ，再利用等比数列的定义以及性质逐一判断即可.

【详解】因为 $a_1 > 1$, $a_7 \cdot a_8 > 1$, $\frac{a_7 - 1}{a_8 - 1} < 0$,

所以 $a_7 > 1$, $a_8 < 1$ ，所以 $0 < q < 1$ ，故A正确.

$a_7 \cdot a_9 = a_8^2 < 1$ ，故B错误；

因为 $a_1 > 1$, $0 < q < 1$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 S_n 无最大值，故C错误；

又 $a_7 > 1$, $a_8 < 1$ ，所以 T_n 的最大值为 T_7 ，故D正确.

故选：AD

【点睛】本题考查了等比数列的性质、定义，考查了基本知识的掌握情况，属于基础题.

11. BC

【分析】由函数的定义域不关于原点对称，可知函数是非奇非偶函数，求出函数的导数，利用导数分析函数的单调性与极值.

【详解】因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2\pi, 2\pi)$ ，定义域不关于原点对称，

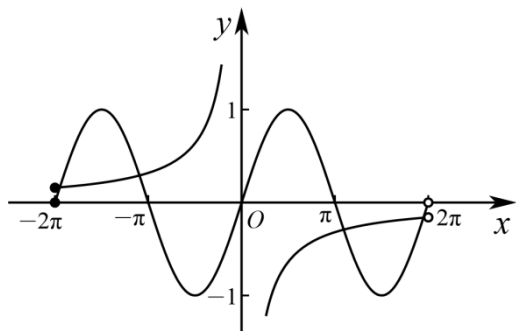
所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数，

$$又 f'(x) = 1 - \cos x - (\cos x - x \sin x) = 1 + x \sin x,$$

当 $x \in [0, \rho)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[0, \rho)$ 上单调递增，

显然 $f'(0) \neq 0$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $\sin x = -\frac{1}{x}$ ，

分别作出 $y = \sin x$ ， $y = -\frac{1}{x}$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi)$ 上的图象，



由图可知，这两个函数的图象在区间 $[-2\pi, 2\pi)$ 上共有 4 个公共点，且两图象在这些公共点上都不相切，

故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi)$ 上的极值点的个数为 4，且 $f(x)$ 只有 2 个极大值点，

故选：BC.

12. ABD

【分析】设正方体棱长为 a ，分别求出正方体的内切球、棱切球、外接球的半径判断 A；利用补体法，把 $|QE| + |QF|$ 转为 $|QE| + |QF_1|$ ，当 E, Q, F_1 共线的时候 $|QE| + |QF| = |EF_1|$ 最小，利用余弦定理求出 $|EF_1|$ 判断 B；利用已知条件确定棱长与 8 个顶点到某个平面的距离的关系，利用等体积法求出棱长判断 C；利用坐标法求出球心坐标，进而求出球的半径，从而求出外接球表面积判断 D.

【详解】对于选项 A，设正方体边长为 a ，则其内切球、棱切球、外接球半径分别为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/948141065120006037>