

28.2.1 解直角三角形

基础篇

一、单选题：

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，下列四个选项，正确的是（ ）

- A. $\tan B = \frac{4}{3}$ B. $\tan A = \frac{3}{4}$ C. $\sin B = \frac{3}{5}$ D. $\cos A = \frac{4}{5}$

【答案】C

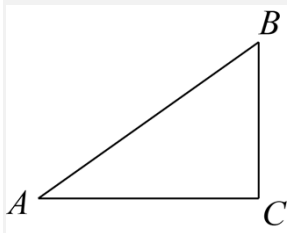
【分析】利用勾股定理求出 BC 的长，根据锐角三角函数的定义判断即可.

【详解】解：如图，根据勾股定理得： $BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$ C 正确，A、B、D 错误，

故选：C.



【点睛】本题考查了勾股定理，锐角三角函数的定义，掌握正弦、余弦、正切的定义是解题的关键.

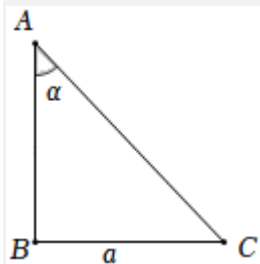
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，如果 $\angle A = \alpha$ ， $BC = a$ ，那么 AC 的长是（ ）

- A. $a \cdot \tan \alpha$ B. $a \cdot \cot \alpha$ C. $\frac{a}{\cos \alpha}$ D. $\frac{a}{\sin \alpha}$

【答案】D

【分析】画出图形，根据锐角三角函数的定义求出即可.

【详解】如图：

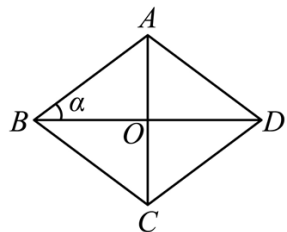


在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = \frac{BC}{\sin A} = \frac{a}{\sin \alpha}$.

故选：D.

【点睛】本题考查解直角三角形，解题的关键是熟练掌握直角三角形边角之间的关系.

3. 如图，菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=12$ ， $BD=16$ ， $\angle ABD=\alpha$ ．下列结论正确的是（ ）

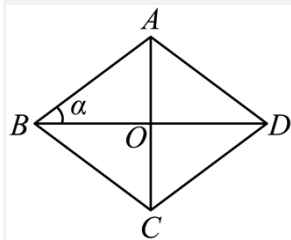


- A. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ B. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ C. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ D. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

【答案】D

【分析】由菱形的性质得出 $AC \perp BD$ ， $OA=OC=6$ ， $BO=DO=8$ ，由勾股定理求出 $AB=10$ ，根据锐角三角函数的定义可得出答案.

【详解】解：如图， AC 与 BD 交于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC=12$ ， $BD=16$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ， $OA=OC=6$ ， $BO=DO=8$ ，

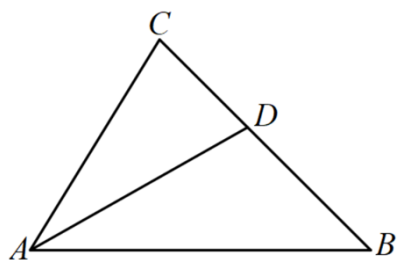
$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

$\therefore \sin \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ， $\tan \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了菱形的性质，锐角三角函数，勾股定理等知识，掌握菱形的性质是本题的关键.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $BC=6\sqrt{6}$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，则线段 AD 的长为（ ）



A. $6\sqrt{6}$

B. 12

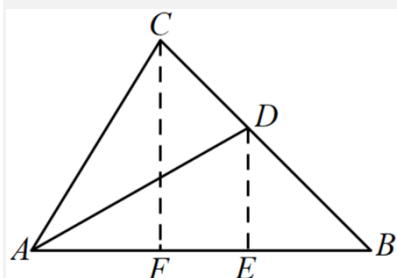
C. $6\sqrt{3}$

D. 6

【答案】B

【分析】过点 C, D 作 AB 的垂线，垂足分别为 F, E ，在 $\text{Rt}\triangle CFB$ ， $\text{Rt}\triangle ACF$ 中，求得 CF, AC 的长，进而证明 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，即可求解.

【详解】解：如图，过点 C, D 作 AB 的垂线，垂足分别为 F, E ，



在 $\text{Rt}\triangle CFB$ 中， $BF = BC \times \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{6} = 6\sqrt{3}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中， $AC = \frac{CF}{\sin \angle CAB} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$ ，

$\because \triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = 75^\circ$ ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle DAB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle DAB + \angle B = 75^\circ$ ，

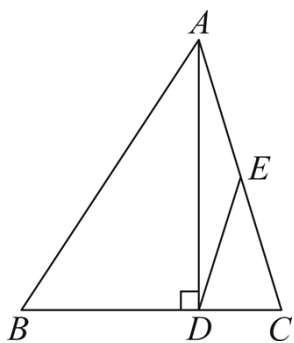
$\therefore \angle ADC = \angle ACD$ ，

$\therefore AC = AD = 12$.

故选:B.

【点睛】本题考查了解直角三角形，等腰三角形的性质与判定，解决问题的关键是将作辅助线，将斜三角形划分为直角三角形.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于 D ，如果 $BD = 9$ ， $DC = 5$ ， $\cos B = \frac{3}{5}$ ， E 为 AC 的中点，那么 $\sin \angle EDC$ 的值为（ ）



A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{12}{13}$

D. $\frac{5}{12}$

【答案】C

【分析】由 $\cos B = \frac{3}{5}$ ， $BD = 9$ 求出 AB 长度，再由勾股定理求出 AD ，再由勾股定理求出 AC ，由直角三角形斜边上的中线等于斜边一半可得 $EC = ED$ ，即 $\sin \angle EDC = \sin C$ 。

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5}$ ， $BD = 9$ ，

$$\therefore AB = \frac{5}{3}BD = 15,$$

$$\text{由勾股定理得 } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADC \text{ 中，由勾股定理得 } AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$\because E$ 为 AC 中点，

$$\therefore ED = EC,$$

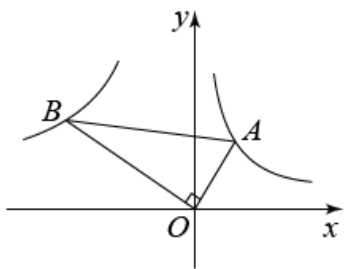
$$\therefore \angle EDC = \angle C,$$

$$\therefore \sin \angle EDC = \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{12}{13}.$$

故选 C.

【点睛】本题考查解直角三角形，解题关键是熟练掌握解直角三角形的方法，掌握直角三角形斜边上的中线长度等于斜边的一半。

6. 如图，已知第一象限内的点 A 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，第二象限的点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，且 $OA \perp OB$ ， $\tan A = 2$ ，则 k 的值为（ ）



A. -4

B. -6

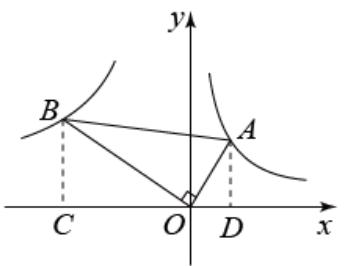
C. -8

D. -9

【答案】C

【分析】作 $BC \perp x$ 轴于 C ， $AD \perp x$ 轴于 D ，如图，利用反比例函数系数的几何意义得到 $S_{\triangle AOD} = 1$ ，再根据正切的定义得到 $\tan A = \frac{OB}{OA} = 2$ ，接着证明 $\text{Rt}\triangle AOD \sim \text{Rt}\triangle OBC$ ，利用相似三角形的性质得 $S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle AOD} = 4$ ，所以 $\frac{1}{2} \cdot |k| = 4$ ，然后根据反比例函数的性质确定 k 的值．

【详解】解：作 $BC \perp x$ 轴于 C ， $AD \perp x$ 轴于 D ，如图，



则 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\tan A = \frac{OB}{OA} = 2$ ，

$\because \angle AOD + \angle BOC = 90^\circ$ ， $\angle AOD + \angle OAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = \angle OAD$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AOD \sim \text{Rt}\triangle OBC$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle AOD}} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = 4$ ，

$\therefore S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle AOD} = 4$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \cdot |k| = 4$ ，

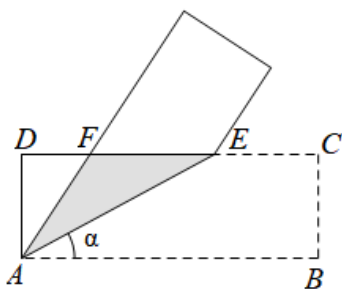
而 $k < 0$ ，

$\therefore k = -8$ ．

故选：C．

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象是双曲线, 图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k , 即 $xy = k$. 也考查了相似三角形的判定与性质.

7. 将矩形纸片 $ABCD$, 按如图所示的方式向上折叠, 当折痕 AE 与 AB 边的夹角为 α , $AD = 2$ 时, 图中阴影部分的面积为 ()



- A. $\frac{1}{\sin \alpha}$ B. $\frac{2}{\sin \alpha}$ C. $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ D. $\frac{2}{\sin 2\alpha}$

【答案】D

【分析】根据矩形对边平行的性质与折叠的性质推出 $\angle FAE = \angle FEA$, 得到 $AF = EF$, 过点 F 作 $FG \perp AB$, 结合矩形 $ABCD$ 角的性质推出四边形 $DAGF$ 是矩形, 得到 $FG = AD = 2$, 根据正弦定义推出

$$AF = \frac{2}{\sin 2\alpha} = EF, \text{ 根据三角形面积公式求出阴影部分面积 } S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} EF \cdot AD = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

【详解】 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAE = \angle AED = \alpha,$$

$$\text{由折叠知, } \angle BAE = \angle FAE = \frac{1}{2} \angle BAF = \alpha,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FEA,$$

$$\therefore AF = EF,$$

过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ,

$$\text{则 } \angle AGF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADF = \angle DAG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DAGF$ 是矩形,

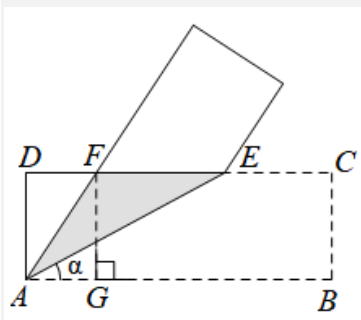
$$\therefore FG = AD = 2,$$

$$\therefore \sin \angle FAG = \frac{FG}{AF},$$

$$\therefore EF = AF = \frac{2}{\sin 2\alpha},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} EF \cdot AD = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sin 2\alpha} \times 2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

故选：D.



【点睛】本题主要考查了矩形折叠，正弦，三角形面积等，解决问题的关键是熟练掌握矩形性质，折叠性质，正弦定义，三角形面积公式.

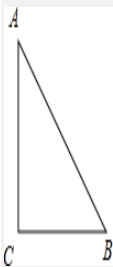
二、填空题：

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 15$ ， $\tan A = \frac{1}{3}$ ，则 $BC =$ _____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

【分析】根据正切的定义得 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ ，则可设 $BC = t$ ， $AC = 3t$ ，利用勾股定理计算出 $AB = \sqrt{10}t$ ，可求出 t ，即可.

【详解】解：如图，



$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{设 } BC = t, AC = 3t,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{10}t,$$

$$\therefore AB = 15,$$

$$\therefore \sqrt{10}t = 15$$

$$\text{解得： } t = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

即 $BC = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

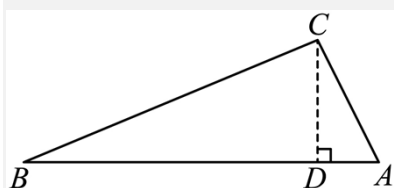
【点睛】本题主要考查了解直角三角形，在直角三角形中，由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形.

9. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 是锐角，且 $\sin B = \frac{5}{13}$ ， $\tan A = \frac{1}{2}$ ， $AB = 44\text{cm}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\underline{\hspace{1cm}}\text{cm}^2$.

【答案】220

【分析】过点 C 作 AB 的垂线，得到两个直角三角形，根据题意求出两直角三角形中 AD ， DB 和 CD 的长，用三角形的面积公式求出三角形的面积.

【详解】解：如图：



过点 C 作 AB 的垂线，垂足为点 D .

$$\because \sin B = \frac{5}{13} = \frac{CD}{BC},$$

设 $CD = 5x$ ， $BC = 13x (x > 0)$ ，

$$\because \tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2},$$

可设 $CD = y$ ， $AD = 2y (y > 0)$ ，

$$\therefore AD = 2y = 2CD = 10x,$$

$$\therefore BD = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 10x + 12x = 22x,$$

由 $22x = 44$ ，得 $x = 2$ ，

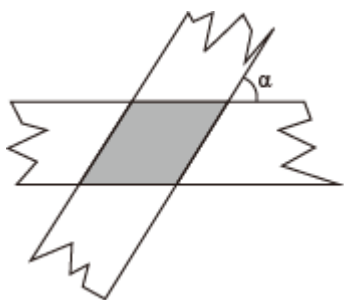
$$\text{则 } CD = 5x = 10$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 44 \times 10 = 220\text{cm}^2.$$

故答案是：220

【点睛】本题主要考查了解直角三角形与勾股定理结合求面积，如何解直角三角形是解题的关键.

10. 如图：两张宽度都为 5cm 的纸条交叉重叠在一起，两张纸条交叉的夹角为 α （见图中的标注），则重叠（阴影）部分的面积表示为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $25\sin\alpha$

【分析】 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E . 由题意即得出四边形 $ABCD$ 为菱形, 从而得出 $\angle ADE = \alpha$, $AD = CD = 5$. 再根据正弦的定义可求出 $AE = 5\sin\alpha$, 最后由菱形的面积公式计算即可.

【详解】 如图, 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E .

由题意可知四边形 $ABCD$ 为菱形,

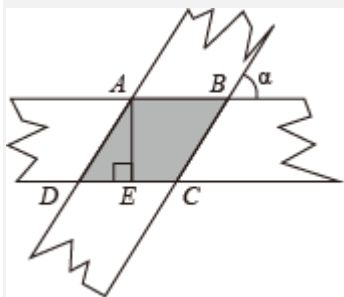
$$\therefore \angle ADE = \alpha, \quad AD = CD = 5.$$

$$\because \sin \angle ADE = \frac{AE}{AD} = \sin \alpha,$$

$$\therefore AE = 5\sin\alpha,$$

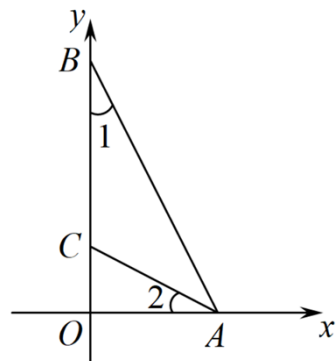
$$\therefore S_{\text{阴}} = CD \cdot AE = 5 \times 5\sin\alpha = 25\sin\alpha.$$

故答案为: $25\sin\alpha$.



【点睛】 本题考查菱形的判定和性质, 解直角三角形. 正确的作出辅助线并利用数形结合的思想是解题关键.

11. 如图, 点 $A(2,0)$, $B(0,4)$, 点 C 是 OB 一点, 若 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】3

【分析】根据点 A 和点 B 的坐标，得到 OA 和 OB 的长度，根据角相等，得到正切值相等，再得到 BC 长度，最后求出 $\triangle ABC$ 的面积。

【详解】解：由题意可知，

$$OB = 4, \quad OA = 2, \quad \tan \angle 1 = \tan \angle 2,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OA},$$

$$\therefore OC = 1,$$

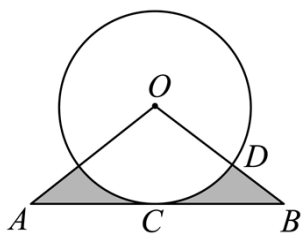
$$\therefore BC = OB - OC = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot OA = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3.$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查坐标与图形性质和三角函数的定义，掌握锐角正切三角函数的定义是关键。

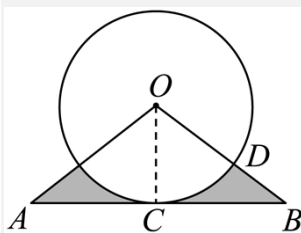
12. 如图，线段 AB 与 $\odot O$ 相切于点 C ，连接 OA 、 OB ， OB 交 $\odot O$ 于点 D ，已知 $OA = OB = 3\text{cm}$ ， $AB = 3\sqrt{3}\text{cm}$ ，则图中阴影部分的面积为 _____ cm^2 。



【答案】 $\left(\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\pi\right)$

【分析】连接 OC 。由切线的定义得 $OC \perp AB$ ，由等腰三角形“三线合一”得 $AC = CB = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{cm}$ ，利用勾股定理求出 OC ，进而求出 $S_{\triangle AOB}$ ；计算出 $\angle AOC$ 的正切值，求出 $\angle AOC$ ，进而求出 $\angle AOB$ ，再求出扇形的面积，则阴影部分的面积等于 $\triangle AOB$ 的面积减去扇形的面积。

【详解】解：如图，连接 OC 。



$\because$ 线段 AB 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp AB$,

$\because OA = OB$, $AB = 3\sqrt{3}\text{cm}$,

$\therefore AC = CB = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{cm}$,

在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $OC^2 + AC^2 = OA^2$,

$\therefore OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\text{cm}$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

$\because \tan \angle AOC = \frac{AC}{OC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle AOC = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$,

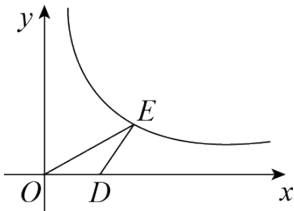
$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{120\pi \cdot OC^2}{360} = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi(\text{cm}^2)$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形}} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\pi(\text{cm}^2)$,

故答案为: $\left(\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\pi\right)$.

【点睛】本题考查扇形的面积公式, 等腰三角形的性质, 切线的定义, 勾股定理, 特殊角的三角函数等, 涉及知识点较多, 难度不大, 解题的关键是得出阴影部分的面积等于 $\triangle AOB$ 的面积减去扇形的面积.

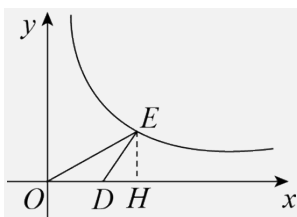
13. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 在第一象限的图象上一点 E , D 在 x 轴上, 点 E 的纵坐标为 1, 若 $\angle ODE = 120^\circ$, $\triangle ODE$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{12}$, 则 k 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】作 $EH \perp x$ 轴于点 H , 则 $EH = 1$, 由 $\triangle ODE$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 可得 OD 长, 再由 $\angle ODE = 120^\circ$ 可得 $\angle EDH = 60^\circ$, 解直角三角形 EDH 即可解得 DH , 从而求出点 E 的坐标, 进而求解.

【详解】解: 作 $EH \perp x$ 轴于点 H , 则 $EH = 1$,



$$\because S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} OD \cdot EH = \frac{1}{2} \times OD \times \frac{\sqrt{3}}{12},$$

$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\because \angle ODE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EDH = 60^\circ,$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{EH}{DH},$$

$$\therefore DH = \frac{EH}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OH = OD + DH = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

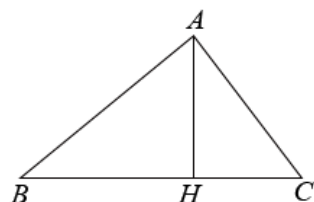
$\because$ 点 E 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上,

$$\therefore k = yx = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】本题考查反比例函数系数 k 的几何意义, 解题关键是熟练掌握反比例函数的性质及解直角三角形的方法.

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AH \perp BC$, 垂足 H 在 BC 边上, 如果 $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, $AB = 5$, 那么 $AC =$ ____ (用含 α 和 β 的式子表示).



【答案】 $\frac{5 \sin \alpha}{\sin \beta}$

【分析】先在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中由 $\sin B = \frac{AH}{AB}$ 求出 AH , 再在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中由 $\sin C = \frac{AH}{AC}$ 求出 AC .

【详解】 $\because AH \perp BC$,

$$\therefore \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\sin B = \frac{AH}{AB}$, $\angle B = \alpha$, $AB = 5$,

$$\therefore AH = AB \cdot \sin \alpha = 5 \sin \alpha,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\sin C = \frac{AH}{AC}$, $\angle C = \beta$,

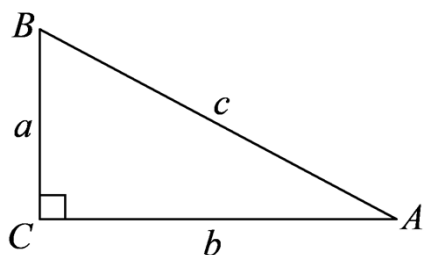
$$\therefore AC = \frac{AH}{\sin \beta} = \frac{5 \sin \alpha}{\sin \beta},$$

故答案为: $\frac{5 \sin \alpha}{\sin \beta}$.

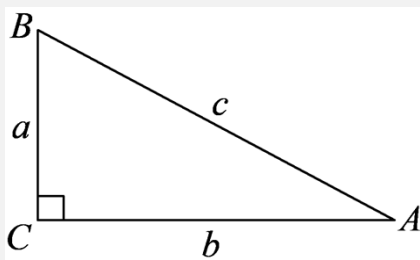
【点睛】本题考查解直角三角形, 准确的选择合适的三角函数是解题的关键.

三、解答题:

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $a = 4$, $c = 8$, 解这个直角三角形.



【答案】 $b = 4\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$



【详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\because a^2 + b^2 = c^2, \quad a = 4, \quad c = 8,$$

$$\therefore b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\because \sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/955002211111011223>