变力做功的计算

公式 $W=Fs\cos\theta$ 适用于恒力功的计算，对于变力做功的计算，一般有以下几种方法

一、微元法

对于变力做功，不能直接用公式进行计算，但是我们可以把运动过程分成很多小段，每一小段内可认为F是恒力，用公式求出每一小段内力F所做的功，然后累加起来就得到整个过程中变力所做的功。这种处理问题的方法称为微元法，这种方法具有普遍的使用性。但在高中阶段主要用于解决大小不变，方向总与运动方向相同或相反的变力的做功问题，

例1、用水平拉力，拉着滑块沿半径为R的水平圆轨道运动一周，如图1所示，物体的质量为m，物体与轨道间的动摩擦因数为μ。求此过程中的摩擦力所做的功。

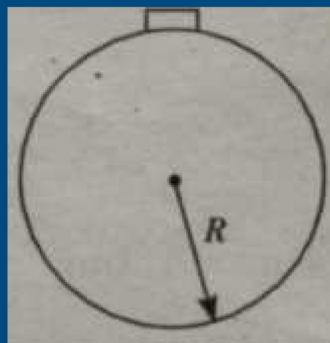


图1

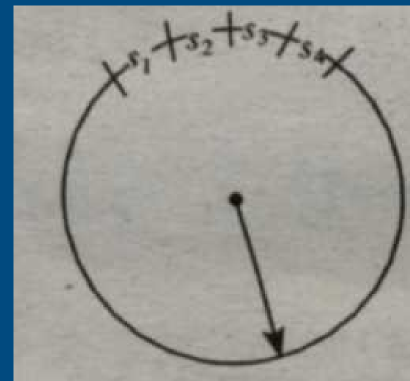


图2

分析解答：把圆轨道分成无穷多个微元段S1, S2, S3, Sn ． 摩擦力在每一段上可认为是恒力，那么每一段是摩擦力的功分别

$$W_1=-\mu mgs_1, W_2=-\mu mgs_2, W_3=-\mu mgs_3, \ldots W_n=-\mu mgs_n$$

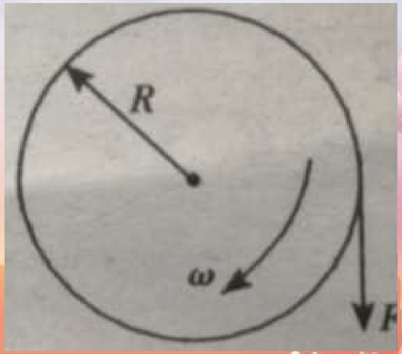
摩擦力在一周内所做的功。

$$W=W_1+W_2+W_3+\ldots+W_N=-\mu mg(s_1+s_2+s_3+\ldots+s_n)=-2\pi\mu mgR$$

小结点评：对于变力做功，一般不能用功的公式直接进行计算，但有时可以根据变力的特点变通使用功的公式，如力的大小不变而方向总与运动方向相同或相反时，可用公式计算该力的功，但式子中的s不是物体运动的位移，而是物体运动的路程。

发散演习１：如图3所示，某个力F=10N作用与半径R=1m的转盘的边缘上，力F的大小保持不变，但方向任何时刻与作用点的切线方向保持一致。那么转动半圆，这个力F做功多少？

答案：31.4J



二、图象法

在直角坐标系中，用纵坐标表示作用在物体上的力F，横坐标表示物体在力的方向上的位移s，如果作用在物体上的力是恒力，那么其F-s图象如图4所示。经过一端时间物体发生的位移为S，那么图线与坐标轴所围成的面积〔阴影面积〕在数值上等于对物体做的功

W＝Ｆ ｓ，s轴上方的面积表示对物体做的正功，S轴下方[illegible]图4〔b〕所示〕。

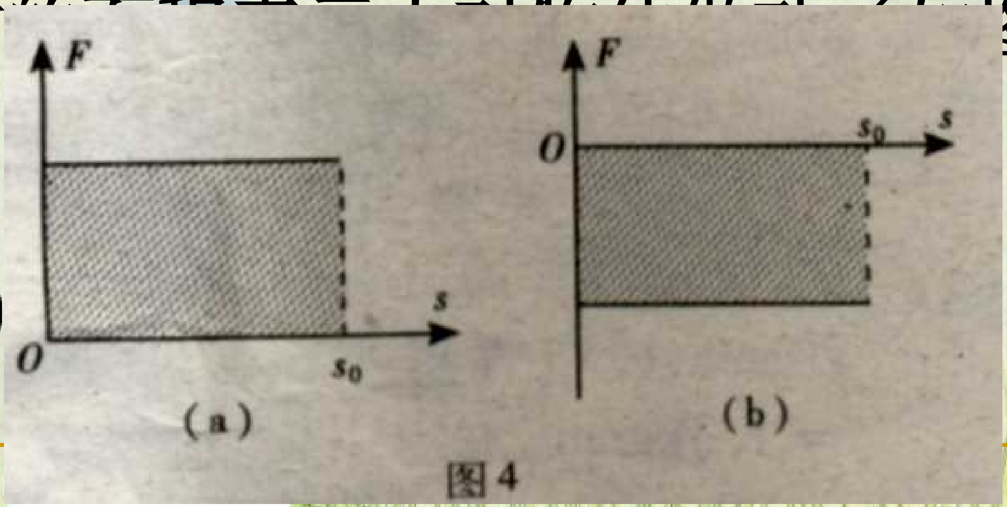


图4

如果F-s图象是一条曲线〔如图5所示〕，表示力的大小随位移不断变化，在曲线下方作阶梯形折线，那么折线下放每个小矩形面积分别表示相应恒力所做的功。当阶梯折线越分越密时，这些小矩形的总面积越趋进于曲线下方的总面积，可见曲线与坐标所围成的面积在数值上等于变力所做的功。由于F-s图象可以计算功，因此F-s图象又称为示功图。

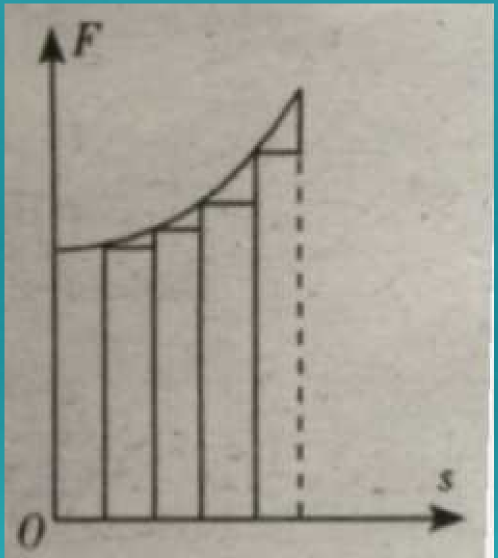


图5

例2、子弹以速度v0射入墙壁，如射深度为h，假设子弹在墙壁中受到的阻力与深度成正比，欲使子弹的入射深度为2h，求子弹的速度应增大到多少？

思路点拨：阻力随深度的变化图象如图6所示，由图象求出子弹克服阻力所做的功，在由动量定理进行求解。

正确解答：解法一：设射入深度为h 时，子弹克服阻力做功w_1；射入深度为2h时，子弹克服阻力做功W_2 。由图6可知$W_2=4W_1$

根据动能定理，子弹减少的动能用于克服阻力做功，有

$$W_1=\frac{1}{2}mv_0^2-0\qquad W_2=\frac{1}{2}mv^2-0$$

联立求解得：$v=2V_0$

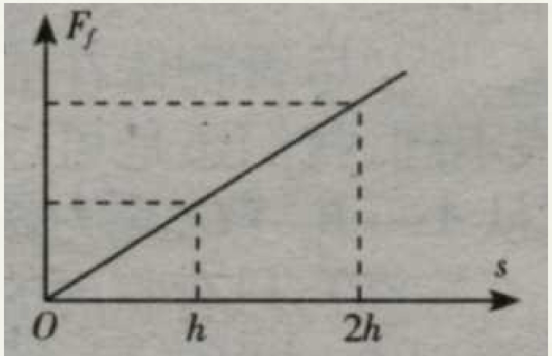


图6

解法二：设阻力与深度间的比例系为K，F_f=ks 由于F_f随位移是线性变化的所以的平均值为

$$\overline{F}_f=\frac{1}{2}(0+ks)$$

根据动能定理，有

$$-\frac{1}{2}(0+kh)h=0-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{2}(0+k\cdot 2h)=0-\frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

$$v=2v_0$$

小结点评：假设力随位移按一次方函数关系变化时，求功时可用平均作用力来代替这个变力，用恒力功的公式求功，也可用图象求功；假设力随位移的变化不是一次函数关系，那么可用 **F--s** 图象求功， 而不能用平均值求功。

发散演习1：如图7所示，有一劲度系数k =500N/m的轻弹簧，左端固定在墙壁上，右端紧靠一质量m=2kg的物块，物块与水平面间的动摩擦因数0.4,弹簧处于自然状态。现缓慢推动物块使弹簧从B到A 处压缩10cm，然后由静止释放物块，

求:〔1〕弹簧恢复原长时，物块的动能多大?

〔2〕在弹簧恢复原长的过程中，物块的大动能为多大?

答 案：〔1〕1.7J：〔2〕1.764J.

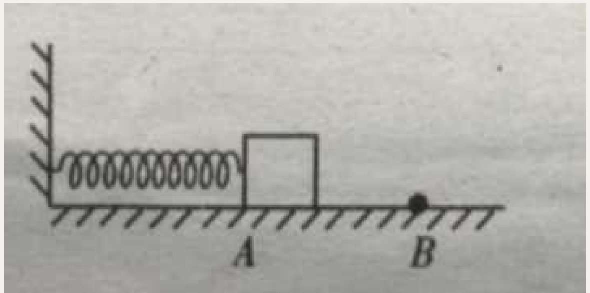


图7

提示：〔1〕从A到B的过程中，对物体应用动能定理得：

$$W_{KB} = W_{弹} - W_{摩} \qquad 其中 W_{摩} = \mu mgx_1$$

W弹可利用示功图求出，画出弹簧力随位移变化的图〔如图8所示〕，F1=kx1

弹簧做功的值等于△OAB 的面积, 即 $W_{弹}=\frac{1}{2}kx_1x_2$

$$E_{kB}=\frac{1}{2}\times500\times0.1^2J-0.4\times2\times10\times0.1J=1.7J$$

〔2〕放开物体后，物体做的是加速度越来越小的加速运动，当弹簧的弹力等于摩擦力时，物体有最大的动能，设此时弹簧的压缩量为x2

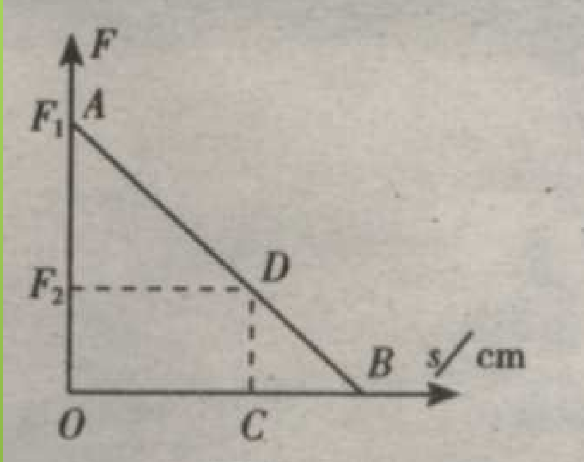


图 8

$$kx_2=\mu mg$$

$$x_2=\frac{\mu mg}{k}=\frac{0.4\times2\times10}{500}m=0.016m$$

物体的位移：

$$S_2 = x_1 - x_2 = 0.1m - 0.016m = 0.084m$$

在这一过程中弹力的功在数值上等于图8中梯形OADC 的面积，即

$$W_{弹}{}' = \frac{(kx_1 + kx_2) \times \overline{OC}}{2}$$

所以物体的最大动能为

$$E_{km} = W_{弹}{}' - W_{摩}{}' = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)s_2 - \mu mgs_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 500 \times (0.1 + 0.016) \times 0.084J - 0.4 \times 2 \times 10 \times 0.084J = 1.764J$$

发散练习2： 用质量为5kg的均匀铁索从10m深的井中吊起一质量为20kg的物体，在这个过程中至少要做多少功？〔g取10 m / S2 〕

答案：2250J

提示：作用在物体和铁索上的力至少应等于物体和铁索的重力，但在拉起来的过程中，铁索长度逐渐缩短，因此拉力也逐渐减小，即拉力是一个随距离长度变化的变力，从物体在井底开始算起，拉力随深度h的变化关系是

$$F = Mg + \frac{mg}{10}(10 - h) = 250 - 5h(0 \le h \le 10)$$

作出 图线如图9所示，利用示功图求解拉力的功〔可用图中梯形面积〕，得出

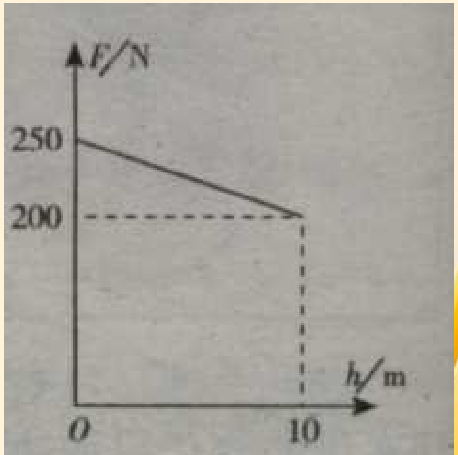


图 9

$$W = \frac{250 + 200}{2} \times 10J = 2250J$$