江西省南昌市第十九中学2024届高三下学期第四次模拟考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$M=\left\{x\left|\frac{1}{x+1}\leq 0\right.\right\}$，则$\complement_{\mathrm{R}}M=$（　）

A．$\{x|x<-1\}$　　B．$\{x|x\leq -1\}$　　C．$\{x|x>-1\}$　　D．$\{x|x\geq -1\}$

2．设a，$b\in\mathbf{R}$，则“$ab<0$”是“$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．$(1-x)^5(1+2x)^4$的展开式中x^2的系数为（　）

A．-14　　B．-6　　C．34　　D．74

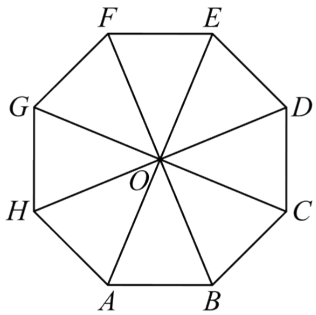
4．人工智能领域让贝叶斯公式：$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$站在了世界中心位置，AI换脸是一项深度伪造技术，某视频网站利用该技术掺入了一些“AI”视频，“AI”视频占有率为0.001．某团队决定用AI对抗AI，研究了深度鉴伪技术来甄别视频的真假．该鉴伪技术的准确率是0.98，即在该视频是伪造的情况下，它有98%的可能鉴定为“AI”；它的误报率是0.04，即在该视频是真实的情况下，它有4%的可能鉴定为“AI”．已知某个视频被鉴定为“AI”，则该视频是“AI”合成的可能性为（　）

A．0.1%　　B．0.4%　　C．2.4%　　D．4%

5．若$\frac{1}{\sin 2\beta}=\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}$，则$\sin(\alpha-2\beta)=$（　）

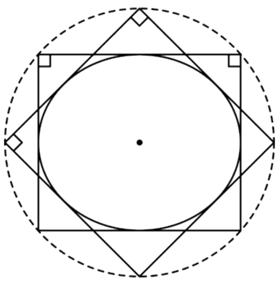
A．$-\frac{1}{2}$　　B．0　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

6．《易经》是中华民族智慧的结晶，易有太极，太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，易经包含了深邃的哲理.如图所示是八卦模型图以及根据八卦图抽象得到的正八边形$ABCDEFGH$，其中$AB=1,O$为正八边形的中心，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=$（　）

A．$\sqrt{2}-1$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$1+\sqrt{2}$

7．加斯帕尔·蒙日是18～19世纪法国著名的几何学家，他在研究时发现：椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，其圆心是椭圆的中心，这个圆被称为“蒙日圆”（如图）．已知椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$，$P$是直线$l$：$4x-3y+20=0$上一点，过$P$作$C$的两条切线，切点分别为$M$、$N$，连接$OP$（$O$是坐标原点），当$\angle MPN$为直角时，直线$OP$的斜率$k_{OP}=$（　）



A．$\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{4}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{3}{4}$

8．已知$\log_6 a=\frac{1}{4}$，$\log_4 b=\frac{1}{3}$，$c=(1+\mathrm{e})^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$

C．$b<a<c$　　D．$a<c<b$

二、多选题

9．已知$f(x)=\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，下列判断正确的是（　）

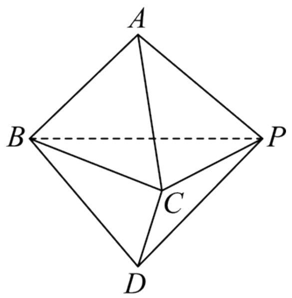
A．若$f(x_1)=f(x_2)=0$，且$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则$\omega=2$

B．$\omega=1$时，直线$x=\frac{\pi}{6}$为$f(x)$图象的一条对称轴

C．$\omega=1$时，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的图象关于原点对称

D．若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上恰有 9 个零点，则 ω 的取值范围为 $\left[\frac{53}{24},\frac{59}{24}\right)$

10．如图，已知正三棱锥 $A-PBC$ 和正三棱锥 $D-PBC$ 的侧棱长均为 $\sqrt{2},BC=2$．若将正三棱锥 $A-PBC$ 绕 BC 旋转，使得点 A,P 分别旋转至点 A',P' 处，且 A',B,C,D 四点共面，点 A',D 分别位于 BC 两侧，则下列说法中正确的是（　）



A．多面体 $ABDPC$ 存在外接球　　B．$PP'\perp BC$

C．$PP'//$ 平面 $A'BDC$　　D．点 P 运动所形成的最短轨迹长大于 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

11．已知 $f\left(x\right)=x^2+x\ln x+2$，$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\mathrm{e}x$，则（　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上的最大值为 3　　B．$\forall x>0$，$f\left(x\right)>2$

C．函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(3,4\right)$ 上没有零点　　D．函数 $g\left(x\right)$ 的极值点有 2 个

三、填空题

12．若向量 $\vec{a}=\left(3,-4\right)$ 在向量 $\vec{b}=\left(-2,1\right)$ 上的投影向量为 $\lambda\vec{b}$，则 λ 等于_____.

13．某单位有男职工 30 人，女职工 70 人，其中男职工平均年龄为 40 岁，方差为 4，女职工平均年龄为 35 岁，方差是 6，则该单位全体职工的方差为_____.

14．已知首项为 $\frac{1}{2}$ 的正项数列满足 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n^{n+1}=a_{n+1}^n$，若存在 $n\in\mathrm{N}^*$，使得不等式 $\left(m-(-1)^n a_n\right)\left(m+(-1)^n a_{n+3}\right)<0$ 成立，则 m 的取值范围为______.

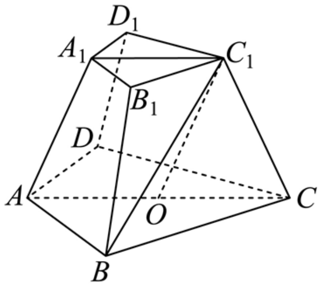
四、解答题

15．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $4a\cos B-b\cos C=c\cos B$.

(1)求 $\cos B$ 的值；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{15}}{2},b=3\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16．如图，在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，O为AC的中点，$AA_1=A_1C_1=C_1C=\frac{1}{2}AC=2$.



(1)证明：$OC_1//$平面AA_1D_1D；

(2)若平面$ABCD\perp$平面ACC_1A_1，$AB\perp BC$，当四棱锥$B-AA_1C_1C$的体积最大时，求CC_1与平面AA_1B_1B夹角的正弦值.

17．已知函数$f\left(x\right)=x\left(\mathrm{e}^x-kx\right),k\in\mathbf{R}$.

(1)当$k=0$时，求函数$f\left(x\right)$的极值；

(2)若函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上仅有两个零点，求实数k的取值范围.

18．已知椭圆$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2\sqrt{2})$，右顶点为$E$，上、下顶点分别为$B_1,B_2,G$是$EB_1$的中点，且$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{GB_2}=1$.

(1)求椭圆C的方程；

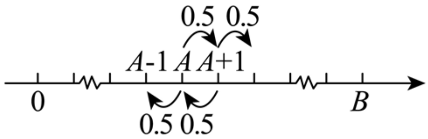
(2)设过点$D\left(-4,0\right)$的直线l交椭圆C于点M,N，点$A\left(-2,-1\right)$，直线MA,NA分别交直线$x=-4$于点P,Q，求证：线段PQ的中点为定点.

19．马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，也是机器学习和人工智能的基石，在强化学习、自然语言处理、金融领域、天气预测等方面都有着极其广泛的应用．其数学定义为：假设我们的序列状态是……$X_{t-2},X_{t-1},X_t,X_{t+1}$，…，那么$X_{t+1}$时刻的状态的条件概率仅依赖前一状态$X_t$，即$P\left(X_{t+1}\middle|\cdots,X_{t-2},X_{t-1},X_t\right)=P\left(X_{t+1}\middle|X_t\right)$.

现实生活中也存在着许多马尔科夫链，例如著名的赌徒模型．

假如一名赌徒进入赌场参与一个赌博游戏，每一局赌徒赌赢的概率为50%，且每局赌赢可以赢得1元，每一局赌徒赌输的概率为50%，且赌输就要输掉1元．赌徒会一直玩下去，直到遇到如下两种情况才会结束赌博游戏：记赌徒的本金为$A\left(A\in\mathrm{N}^*,A<B\right)$一种是赌金达到预期的$B$元，赌徒停止赌博；另一种是赌徒输光本金后，赌徒可以向赌场借钱，最多借A

元，再次输光后赌场不再借钱给赌徒．赌博过程如图的数轴所示．



当赌徒手中有 n 元 $\left(-A \leq n \leq B, n \in Z\right)$ 时，最终欠债 A 元（可以记为该赌徒手中有 $-A$ 元）概率为 $P(n)$，请回答下列问题：

(1)请直接写出 $P(-A)$ 与 $P(B)$ 的数值．

(2)证明 $\{P(n)\}$ 是一个等差数列，并写出公差 d．

(3)当 $A=100$ 时，分别计算 $B=300, B=1500$ 时，$P(A)$ 的数值，论述当 B 持续增大时，$P(A)$ 的统计含义．

参考答案：

1．D

【分析】先解不等式再利用补集运算即可求解.

【详解】由 $\frac{1}{x+1}\le 0$ 得 $x+1<0$，即 $x<-1$，所以 $M=\left\{x\,|\,x<-1\right\}$，

于是 $\complement_{R}M=\left\{x|x\ge -1\right\}$.

故选：D.

2．C

【分析】根据充要条件的概念即可求解.

【详解】当 $ab<0$ 时，$\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$，则 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$，即充分性成立；

当 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$ 时，$\frac{|b|}{|a|}=-\frac{b}{a}>0$，则 $ab<0$，即必要性成立；

综上可知，“$ab<0$”是“$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=0$”的充要条件.

故选：C.

3．B

【分析】直接利用二项式的展开式以及组合数的应用求出结果.

【详解】$(1-x)^5$ 的展开式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^r(r=0$，$1$，$2$，$3$，$4$，$5)$，

$(1+2x)^4$ 的展开式 $T_{k+1}=C_4^k\cdot 2^k\cdot x^k(k=0$，$1$，$2$，$3$，$4)$，

当 $r=0$，$k=2$ 时，x^2 的系数为 $C_4^2\cdot 2^2=24$；

当 $r=1$，$k=1$ 时，x^2 的系数为 $-5\times 4\times 2=-40$；

当 $r=2$，$k=0$ 时，x^2 的系数为 $C_5^2=10$，

故 x^2 的系数为 $24+10-40=-6$.

故选：B.

4．C

【分析】根据题意，由贝叶斯公式代入计算，即可得到结果.

【详解】记“视频是 AI 合成”为事件 A，记“鉴定结果为 AI”为事件 B，

则 $P(A)=0.001,P(\overline{A})=0.999,P(B|\ A)=0.98,P(B|\overline{A})=0.04$，

由贝叶斯公式得：$P\left(A|B\right)=\dfrac{P\left(A\right)P\left(B|A\right)}{P\left(A\right)P\left(B|A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B|\overline{A}\right)}=\dfrac{0.001\times 0.98}{0.001\times 0.98+0.999\times 0.04}=0.024$，

故选：C．

5．B

【分析】根据同角三角函数关系、二倍角公式先化简已知式子，再利用两角和差的正弦公式进行运算即可得答案.

【详解】因为$\dfrac{1}{\sin 2\beta}=\dfrac{1}{\tan\beta}-\dfrac{1}{\tan\alpha}$，所以

$\dfrac{1}{2\sin\beta\cos\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\beta\sin\alpha}=\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\beta\sin\alpha}$，

即$\dfrac{1}{2\cos\beta}=\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\alpha}$，则$2\sin\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta=\sin\alpha$

所以$2\sin\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta=\sin\left[\left(\alpha-\beta\right)+\beta\right]=\sin\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta+\cos\left(\alpha-\beta\right)\sin\beta$

则$\sin\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha-\beta\right)\sin\beta=0$，即$\sin\left[\left(\alpha-\beta\right)-\beta\right]=\sin\left(\alpha-2\beta\right)=0$.

故选：B.

6．D

【分析】根据给定条件，利用正八边形的结构特征，结合数量积的定义计算即得.

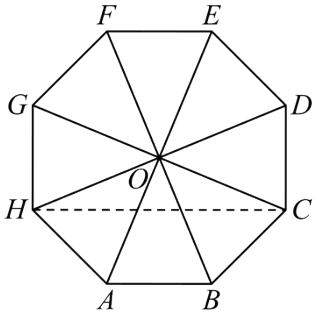
【详解】在正八边形$ABCDEFGH$中，连接HC，则$HC//AB$，

而$\angle ABC=135^\circ$，即$\angle BCH=45^\circ$，于是$\angle HCD=90^\circ$，

在等腰梯形$ABCH$中，$CH=1+2\times 1\times\cos 45^\circ=1+\sqrt{2}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=1\times|\overrightarrow{HD}|\cos\angle CHD=|\overrightarrow{HC}|=1+\sqrt{2}$.

故选：D



7．D

【分析】利用特殊的长方形（即边长与椭圆的轴平行）求得蒙日圆方程，进而可求得直线l：$4x-3y+20=0$为圆的切线，由$k_l\cdot k_{OP}=-1$，即可得出结果.

【详解】由椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$可知：$a=3,b=\sqrt{7}$，

当如图长方形的边与椭圆的轴平行时，长方形的边长分别为6和$2\sqrt{7}$，

其对角线长为$\sqrt{36+28}$=8，因此蒙日圆半径为4，圆方程为$x^2+y^2=16$，

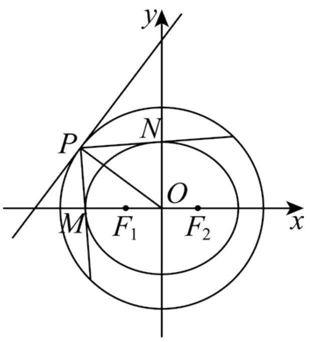
当$\angle MPN$为直角时，可知点当P在圆$x^2+y^2=16$，

因为O到直线$4x-3y+20=0$的距离为$d=\frac{20}{\sqrt{16+9}}=4$，

所以直线l：$4x-3y+20=0$为圆的切线，

因为直线$k_l=\frac{4}{3}$，$k_l\cdot k_{OP}=-1$，所以$k_{OP}=-\frac{3}{4}$.

故选：D.



8．A

【分析】由条件得到$a=6^{\frac{1}{4}}$，$b=4^{\frac{1}{3}}$，从而得到$a^{12}=216$，$b^{12}=256$，即可得出$b>a$，构造函数$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$，利用函数的单调性，即可判断出$c>b$，从而得出结果.

【详解】由$\log_6 a=\frac{1}{4}$，得到$a=6^{\frac{1}{4}}$，又$\log_4 b=\frac{1}{3}$，所以$b=4^{\frac{1}{3}}$，

所以$a^{12}=(6^{\frac{1}{4}})^{12}=216$，$b^{12}=(4^{\frac{1}{3}})^{12}=256$，又$256>216$，

所以$b^{12}>a^{12}$，又$a>0,b>0$，得到$b>a$，

令$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>1)$，则$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$，所以$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}$，

得到$y'=[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}](1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}[x-(1+x)\ln(1+x)]$，

令$h(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$，则$h'(x)=1-\ln(1+x)-1=-\ln(1+x)<0$在区间$(1,+\infty)$上恒成立，

所以$h(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，

又$h(1)=1-(1+1)\ln(1+1)=1-2\ln 2=1-\ln 4<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+x)}>0$，