

江西省南昌第二中学 2024 年高三下学期第一次模拟试数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知盒中有 3 个红球，3 个黄球，3 个白球，且每种颜色的三个球均按 A, B, C 编号，现从中摸出 3 个球（除颜色与编号外球没有区别），则恰好不同时包含字母 A, B, C 的概率为（ ）

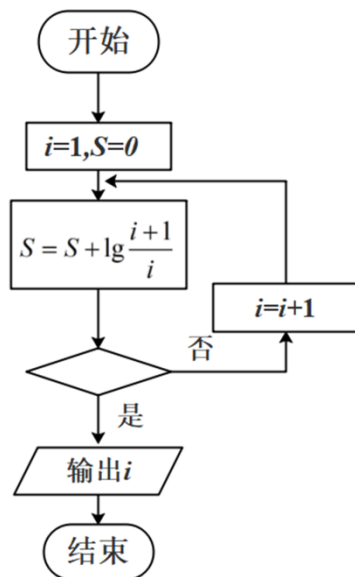
- A. $\frac{17}{21}$ B. $\frac{19}{28}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{28}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$ ， $\sin B = \cos A \sin C$ ， $S_{\triangle ABC} = 6$ ， P 为线段 AB 上的一点，且

$\overrightarrow{CP} = x \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + y \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为（ ）

- A. $\frac{7}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

3. 运行如图所示的程序框图，若输出的 i 的值为 99，则判断框中可以填（ ）



- A. $S \geq 1$ B. $S > 2$ C. $S > \lg 99$ D. $S \geq \lg 98$

4. 某市政府决定派遣 8 名干部（5 男 3 女）分成两个小组，到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作，若要求每组至少 3 人，且女干部不能单独成组，则不同的派遣方案共有（ ）种

- A. 240 B. 320 C. 180 D. 120

5. 已知点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = a\sqrt{x} + bx^2$ 的函数图像上的任意两点，且 $y = f(x)$ 在点

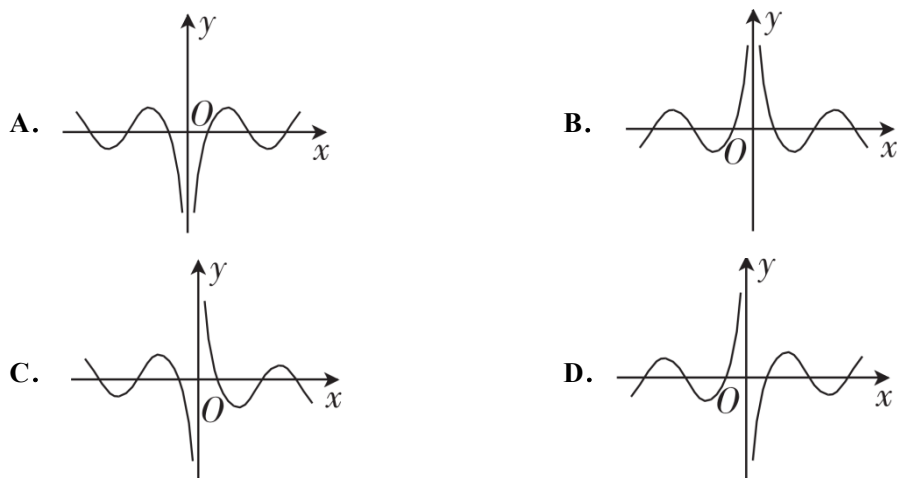
$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行, 则()

- A. $a=0$, b 为任意非零实数 B. $b=0$, a 为任意非零实数
C. a 、 b 均为任意实数 D. 不存在满足条件的实数 a , b

6. 设直线 l 的方程为 $x-2y+m=0(m \in \mathbf{R})$, 圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=25$, 若直线 l 被圆所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$, 则实数 m 的取值为

- A. -9 或 11 B. -7 或 11 C. -7 D. -9

7. 函数 $f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1}$ 的图象大致是()



8. 若函数 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$, 则它的一条对称轴方程可能是()

- A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = \frac{\pi}{3}$ C. $x = \frac{\pi}{12}$ D. $x = \frac{5\pi}{12}$

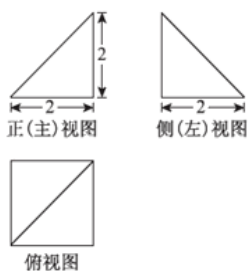
9. 若 i 为虚数单位, 则复数 $z = \frac{1+i}{1+2i}$ 在复平面上对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. 自 2019 年 12 月以来, 在湖北省武汉市发现多起病毒性肺炎病例, 研究表明, 该新型冠状病毒具有很强的传染性. 各级政府反应迅速, 采取了有效的防控阻击措施, 把疫情控制在最低范围之内. 某社区按上级要求做好在鄂返乡人员体格检查登记, 有 3 个不同的住户属在鄂返乡住户, 负责该小区体格检查的社区诊所共有 4 名医生, 现要求这 4 名医生都要分配出去, 且每个住户家里都要有医生去检查登记, 则不同的分配方案共有()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 72 种

11. 某四棱锥的三视图如图所示, 记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合, 则().



- A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$
 C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

12. 设 $(1+i) \cdot z = 1-i$, 则复数 z 的模等于()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $f(x) = \frac{1}{3}kx^3 + (k-2)x^2 - 5k + 7$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减，则 k 的取值范围是_____

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 是双曲线 C 过第一、三象限的渐近线，记直线 l 的倾斜角为 α , 直线 $l': y = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot x$, $F_2 M \perp l'$, 垂足为 M , 若 M 在双曲线 C 上，则双曲线 C 的离心率为_____

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点为 F , 点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方，若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心， $|OF|$ 为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < m \\ x^2 + 4x, & x \geq m \end{cases}$, 且 $\forall p < m, \exists q > m$, 使得 $f(p) + f(q) = 0$, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某百货商店今年春节期间举行促销活动，规定消费达到一定标准的顾客可进行一次抽奖活动，随着抽奖活动的有效开展，参与抽奖活动的人数越来越多，该商店经理对春节前 7 天参加抽奖活动的人数进行统计， y 表示第 x 天参加抽奖活动的人数，得到统计表格如下：

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	8	8	10	14	15	17

(1) 经过进一步统计分析，发现 y 与 x 具有线性相关关系。请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出 y 关于 x

的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2) 该商店规定：若抽中“一等奖”，可领取 600 元购物券；抽中“二等奖”可领取 300 元购物券；抽中“谢谢惠顾”，则没有购物券。已知一次抽奖活动获得“一等奖”的概率为 $\frac{1}{6}$ ，获得“二等奖”的概率为 $\frac{1}{3}$ 。现有张、王两位先生参与了本次活动，且他们是否中奖相互独立，求此二人所获购物券总金额 X 的分布列及数学期望。

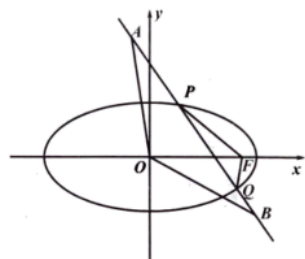
参考公式： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ ， $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 364$ ， $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$ 。

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ， $a_1 = 25$ ，且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列。

- (1) 求使不等式 $a_n \geq 0$ 成立的最大自然数 n ；
- (2) 记数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $-\frac{13}{25} \leq T_n \leq \frac{12}{25}$ 。

19. (12 分) 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ， F 为其右焦点，直线 $l: y = kx + m$ ($km < 0$) 与椭圆交于

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点，点 A, B 在 l 上，且满足 $|AP| = |PQ|, |BQ| = |PQ|, |AQ| = |PQ|$ 。(点 A, P, Q, B 从上到下依次排列)



- (I) 试用 k, m 表示 $|PQ|$ ；
- (II) 证明：原点 O 到直线 l 的距离为定值。

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ ，

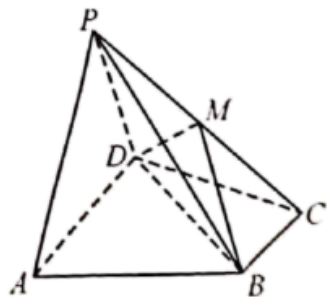
- (1) 证明： $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减；
- (2) 证明：对任意的 $x \in (0, 1)$ 有 $e^{\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x}$ 。

21. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，已知 $a \cos B = (4c - b) \cos A$ 。

- (1) 求 $\cos A$ 的值；

(2) 若 $b=4$ ，点 M 是线段 BC 的中点， $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{10}$ ，求 V_{ABC} 的面积.

22. (10 分) 如图，平面四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = AD = 2BC = 2$ ，将 $\triangle ABD$ 绕着 AD 翻折到 $\triangle PAD$ 。



(1) M 为 PC 上一点，且 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MC}$ ，当 $PA \parallel$ 平面 DMB 时，求实数 λ 的值；

(2) 当平面 PAD 与平面 PBC 所成的锐二面角大小为 30° 时，求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

首先求出基本事件总数，则事件“恰好不同时包含字母 A ， B ， C ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母 A ， B ， C ”，记事件“恰好不同时包含字母 A ， B ， C ”为 E ，利用对立事件的概率公式计算可得；

【详解】

解：从 9 个球中摸出 3 个球，则基本事件总数为 $C_9^3 = 84$ (个)，

则事件“恰好不同时包含字母 A ， B ， C ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母 A ， B ， C ”

记事件“恰好不同时包含字母 A ， B ， C ”为 E ，则 $P(E) = 1 - \frac{3^3}{C_9^3} = \frac{19}{28}$.

故选：B

【点睛】

本题考查了古典概型及其概率计算公式，考查了排列组合的知识，解答的关键在于正确理解题意，属于基础题.

2、A

【解析】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，结合三角形的内角和及和角的正弦公式化简可求 $\cos C=0$ ，可得 $C=\frac{\pi}{2}$ ，再由已知条件求得 $a=4$ ， $b=3$ ， $c=5$ ，考虑建立以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建立直角坐标系，根据已知条件结合向量的坐标运算求得 $4x+3y=12$ ，然后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值。

【详解】

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB=c$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ，

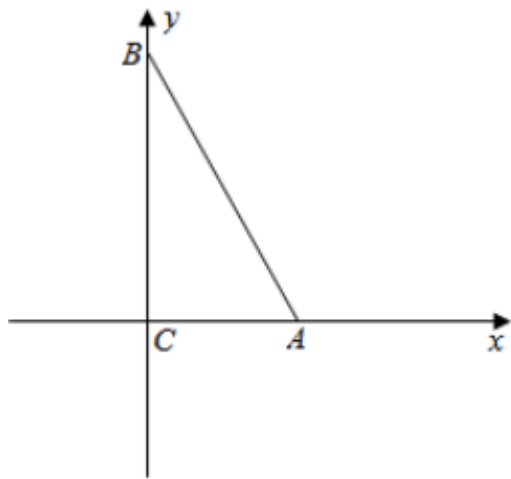
$\because \sin B = \cos A \sin C$ ，即 $\sin(A+C) = \cos A \sin C$ ，即 $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \cos A \sin C$ ， $\therefore \sin A \cos C = 0$ ，

$\because 0 < A < \pi$ ， $\therefore \sin A > 0$ ， $\therefore \cos C = 0$ ， $\because 0 < C < \pi$ ， $\therefore C = \frac{\pi}{2}$ ，

$\because \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$ ，即 $cb \cos A = 9$ ，又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6$ ， $\therefore \tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b}$ ，

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 6$ ，则 $ab = 12$ ，所以， $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ ab = 12 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$ ， $\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ 。

以 AC 所在的直线为 x 轴，以 BC 所在的直线为 y 轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



则 $C(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$ ，

P 为线段 AB 上的一点，则存在实数 λ 使得 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} = \lambda(-3, 4) = (-3\lambda, 4\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$ ，

$\therefore \vec{CP} = \vec{CA} + \vec{CB} = (3-3\lambda, 4\lambda)$ ，

设 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}$ ， $\vec{e}_2 = \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$ ，则 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ ， $\therefore \vec{e}_1 = (1, 0)$ ， $\vec{e}_2 = (0, 1)$ ，

$$\vec{CP} = x \cdot \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} + y \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|} = xe_1 + ye_2 = (x, y), \therefore \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}, \text{消去 } \lambda \text{ 得 } 4x + 3y = 12, \therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$$

$$\text{所以, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right) = \frac{x}{3y} + \frac{y}{4x} + \frac{7}{12} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{4x}} + \frac{7}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12},$$

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ 时, 等号成立,

因此, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{12}$.

故选: A.

【点睛】

本题是一道构思非常巧妙的试题, 综合考查了三角形的内角和定理、两角和的正弦公式及基本不等式求解最值问题,

解题的关键是理解 $\frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|}$ 是一个单位向量, 从而可用 x 、 y 表示 $\vec{CP}$, 建立 x 、 y 与参数的关系, 解决本题的第二个关

键点在于由 $x = 3 - 3\lambda$, $y = 4\lambda$ 发现 $4x + 3y = 12$ 为定值, 从而考虑利用基本不等式求解最小值, 考查计算能力, 属于难题.

3、C

【解析】

模拟执行程序框图, 即可容易求得结果.

【详解】

运行该程序:

第一次, $i = 1$, $S = \lg 2$;

第二次, $i = 2$, $S = \lg 2 + \lg \frac{3}{2} = \lg 3$;

第三次, $i = 3$, $S = \lg 3 + \lg \frac{4}{3} = \lg 4$,

...;

第九十八次, $i = 98$, $S = \lg 98 + \lg \frac{99}{98} = \lg 99$;

第九十九次, $i = 99$, $S = \lg 99 + \lg \frac{100}{99} = \lg 100 = 2$,

此时要输出 i 的值为 99.

此时 $S = 2 > \lg 99$.

故选: C.

【点睛】

本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及化归转化思想，涉及判断条件的选择，属基础题.

4、C

【解析】

在所有两组至少都是3人的分组中减去3名女干部单独成一组的情况，再将这两组分配，利用分步乘法计数原理可得出结果.

【详解】

两组至少都是3人，则分组中两组的人数分别为3、5或4、4，

又因为3名女干部不能单独成一组，则不同的派遣方案种数为 $\left(C_8^3 + \frac{C_8^4}{A_2^2} - 1\right)A_2^2 = 180$.

故选：C.

【点睛】

本题考查排列组合的综合问题，涉及分组分配问题，考查计算能力，属于中等题.

5、A

【解析】

求得 $f(x)$ 的导函数，结合两点斜率公式和两直线平行的条件：斜率相等，化简可得 $a=0$ ， b 为任意非零实数.

【详解】

依题意 $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 2bx$ ， $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行，即有

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}} + b(x_1+x_2)}{\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{a\sqrt{x_2} + bx_2^2 - a\sqrt{x_1} - bx_1^2}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{a(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{x_2 - x_1} + b(x_1+x_2), \text{ 所以 } \frac{a}{\sqrt{2(x_1+x_2)}} = \frac{a}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \text{ 由于对任意 } x_1, x_2 \text{ 上式都成立, 可得 } a=0, b \text{ 为非}$$

零实数.

故选：A

【点睛】

本题考查导数的运用，求切线的斜率，考查两点的斜率公式，以及化简运算能力，属于中档题.

6、A

【解析】

圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 的圆心坐标为 $(1, 1)$ ，该圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|m-1|}{\sqrt{5}}$ ，结合弦长公式得

$$2\sqrt{25 - \left(\frac{|m-1|}{\sqrt{5}}\right)^2} = 2\sqrt{5}, \text{ 解得 } m = -9 \text{ 或 } m = 11, \text{ 故选 A.}$$

7、C

【解析】

根据函数奇偶性可排除 AB 选项；结合特殊值，即可排除 D 选项.

【详解】

$$\because f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x,$$

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \times \cos(-2x) = -\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x = -f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore$ 排除选项 A, B;

$$\text{又} \because \text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 时, } f(x) > 0,$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了依据函数解析式选择函数图象，注意奇偶性及特殊值的用法，属于基础题.

8、B

【解析】

把已知点坐标代入求出 φ ，然后验证各选项.

【详解】

$$\text{由题意 } 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1, \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}, \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z,$$

$$\text{不妨取 } \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ 或 } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

若 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，则函数为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ ，四个选项都不合题意，

若 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，则函数为 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，只有 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 是对称轴.

故选: B.

【点睛】

本题考查正弦型复合函数的对称轴，掌握正弦函数的性质是解题关键。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/955114144321012000>