专题 24.1　圆【七大题型】

【人教版】

题型先知

举一反三

【知识点 1　圆的概念】

定义①：在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆．

固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径．以 O 点为圆心的圆，记作"⊙O"，读作"圆 O"．

定义②：圆可以看做是所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合．

【题型 1　圆的概念】

【例 1】（2022•金沙县一模）下列说法中，不正确的是（　　）

A．圆既是轴对称图形又是中心对称图形

B．圆有无数条对称轴

C．圆的每一条直径都是它的对称轴

D．圆的对称中心是它的圆心

【分析】利用圆的对称性质逐一求解可得．

【解答】解：*A*．圆既是轴对称图形又是中心对称图形，正确；

B．圆有无数条对称轴，正确；

C．圆的每一条直径所在直线都是它的对称轴，此选项错误；

D．圆的对称中心是它的圆心，正确；

故选：*C*．

【变式 1-1】（2022•武昌区校级期末）由所有到已知点 O 的距离大于或等于 2，并且小于或等于 3 的点组成的图形的面积为（　　）

A．4π　　B．9π　　C．5π　　D．13π

【分析】根据题意、利用圆的面积公式计算即可．

【解答】解：由所有到已知点 O 的距离大于或等于 2，并且小于或等于 3 的点组成的图形的面积为以 3 为半径的圆与以 2 为半径的圆组成的圆环的面积，

即 $\pi\times3^2-\pi\times2^2=5\pi$，

故选：C．

【变式 1-2】（2022•杭州模拟）现有两个圆，$\odot O_1$ 的半径等于篮球的半径，$\odot O_2$ 的半径等于一个乒乓球的半径，现将两个圆的周长都增加 1 米，则面积增加较多的圆是（　　）

A．$\odot O_1$

B．$\odot O_2$

C．两圆增加的面积是相同的

D．无法确定

【分析】先由 $L=2\pi R$ 计算出两个圆半径的伸长量，然后再计算两个圆增加的面积，然后进行比较大小即可．

【解答】解：设 $\odot O_1$ 的半径等于 R，变大后的半径等于 R'；$\odot O_2$ 的半径等于 r，变大后的半径等于 r'，其中 $R>r$．

由题意得，$2\pi R+1=2\pi R'$，$2\pi r+1=2\pi r'$，

解得 $R'=R+\frac{1}{2\pi}$，$r'=r+\frac{1}{2\pi}$；

所以 $R'-R=\frac{1}{2\pi}$，$r'-r=\frac{1}{2\pi}$，

所以，两圆的半径伸长是相同的，且两圆的半径都伸长$\frac{1}{2\pi}$．

$\therefore\odot O_1$ 的面积 $=\pi R^2$，变大后的面积 $=\pi(R+\frac{1}{2\pi})^2$，面积增加了 $\pi(R+\frac{1}{2\pi})^2-\pi R^2=R+\frac{1}{4\pi}$，

$\odot O_2$ 的面积 $=\pi r^2$，变大后的面积 $=\pi(r+\frac{1}{2\pi})^2$，面积增加了 $\pi(r+\frac{1}{2\pi})^2-\pi r^2=r+\frac{1}{4\pi}$，

$\because R>r$，

$\therefore R+\frac{1}{4\pi}>r+\frac{1}{4\pi}$，

$\therefore\odot O_1$ 的面积增加的多．

故选：A．

【变式1-3】（2022•浙江）如图，AB是$\odot O$的直径，把AB分成几条相等的线段，以每条线段为直径分别画小圆，设$AB=a$，那么$\odot O$的周长$l=\pi a$．

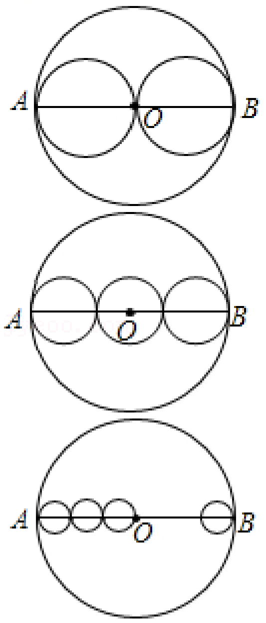
计算：（1）把AB分成两条相等的线段，每个小圆的周长$l_2=\frac{1}{2}\pi a=\frac{1}{2}l$；

（2）把AB分成三条相等的线段，每个小圆的周长$l_3=$__$\frac{1}{3}l$__；

（3）把AB分成四条相等的线段，每个小圆的周长$l_4=$__$\frac{1}{4}l$__；

（4）把AB分成n条相等的线段，每个小圆的周长$l_n=$__$\frac{1}{n}l$__．

结论：把大圆的直径分成n条相等的线段，以每条线段为直径分别画小圆，那么每个小圆周长是大圆周长的__$\frac{1}{n}$__．请仿照上面的探索方法和步骤，计算推导出每个小圆面积与大圆面积的关系．



【分析】把大圆的直径分成n条相等的线段，以每条线段为直径分别画小圆，那么每个小圆周长是$l_n=\pi\left(\frac{1}{n}a\right)=\frac{1}{n}l$，即每个小圆周长是大圆周长的$\frac{1}{n}$；根据圆的面积公式求得每个小圆的面积和大圆的面积后比较．

【解答】解：（2）$\frac{1}{3}l$；

（3）$\frac{1}{4}l$；

（4）$\frac{1}{n}l$；$\frac{1}{n}$；

每个小圆面积$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}a\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi a^2}{n^2}$，而大圆的面积$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^2=\frac{1}{4}\pi a^2$

即每个小圆的面积是大圆的面积的$\frac{1}{n^2}$.

【知识点 2　与圆有关的概念】

连接圆上任意两点的线段叫弦，经过圆心的弦叫直径，圆上任意两点间的部分叫圆弧，简称弧，圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每条弧都叫做半圆，大于半圆的弧叫做优弧，小于半圆的弧叫做劣弧．

【题型 2　圆的有关概念】

【例 2】（2022•远安县期末）下列说法：①弦是直线；②圆的直径被该圆的圆心平分；③过圆内一点 P 的直径仅有一条；④弧是圆的一部分．其中正确的有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【分析】根据弦，直径，弧的定义一一判断即可．

【解答】解：①弦是直线，错误，弦是线段．

②圆的直径被该圆的圆心平分，正确．

③过圆内一点 P 的直径仅有一条，错误，点 P 是圆心时，直径有无数条．

④弧是圆的一部分，正确．

故选：B．

【变式 2-1】（2022 图木舒克月考）有一个圆的半径为 5，则该圆的弦长不可能是（　　）

A．1　　B．4　　C．10　　D．11

【分析】根据直径是圆中最长的弦，判断即可．

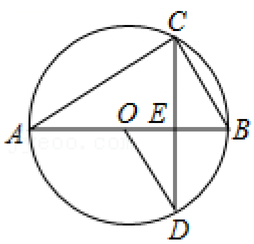
【解答】解：∵一个圆的半径为 5，

∴圆中最长的弦是 10，

∴弦长不可能为 11，

故选：D．

【变式 2-2】（2022•嘉鱼县期末）如右图中有__1__条直径，有__4__条弦，以点 A 为端点的优弧有__2__条，有劣弧__2__条．

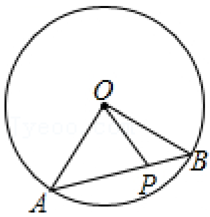


【分析】根据直径、弦、优弧及劣弧的概念解答即可得．

【解答】解：图中直径只有 AB 这 1 条，弦有 AC、AB、CD、BC 这 4 条，以点 A 为端点的优弧有$\overset{\frown}{ACD}$、$\overset{\frown}{ADC}$这 2 条，劣弧有$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AD}$这 2 条，

故答案为：1、4、2、2．

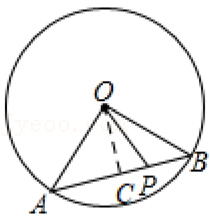
【变式 2-3】（2022 仪征市期末）如图，⊙O 的半径为 6，△OAB 的面积为 18，点 P 为弦 AB 上一动点，当 OP 长为整数时，P 点有__4__个．



【分析】解法一：过点 P 最长的弦是 12，根据已知条件，△OAB 的面积为 18，可以求出 AB＜12，根据三角形面积可得 $OC=3\sqrt{2}$，从而可知 OP 的长有两个整数：5，6，且 $OP=6$ 是 P 在 A 或 B 点时，每一个值都有两个点 P，所以一共有 4 个．

解法二：根据面积可知，OA 上的高为 6，也就是说 OA 与 OB 互相垂直，然后算出 OC 长度即可．

【解答】解：解法一：过 O 作 $OC\perp AB$ 于 C，则 $AC=BC$，



设 $OC=x$，$AC=y$，

∵AB 是⊙O 的一条弦，⊙O 的半径为 6，

∴$AB\leqslant 12$，

∵△OAB 的面积为 18，

∴$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ \frac{1}{2}\cdot 2y\cdot x=18 \end{cases}$，

则 $y=\frac{18}{x}$，

∴$x^2+(\frac{18}{x})^2=36$，

解得 $x=3\sqrt{2}$或 $-3\sqrt{2}$（舍），

∴$OC=3\sqrt{2}>4$，

∴$4<OP\leqslant 6$，

∵点 P 为弦 AB 上一动点，当 OP 长为整数时，$OP=5$ 或 6，P 点有 4 个．

解法二：设△AOB 中 OA 边上的高为 h，

则$\frac{1}{2}\times OAh=18$，即$\frac{1}{2}\times 6h=18$，

∴$h=6$，

∵$OB=6$，

∴$OA\perp OB$，即$\angle AOB=90°$，

∴$AB=6\sqrt{2}$，图中 $OC=3\sqrt{2}$，

同理得：点 P 为弦 AB 上一动点，当 OP 长为整数时，$OP=5$ 或 6，P 点有 4 个．

故答案为：4．

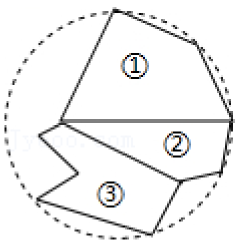
【知识点 3　确定圆的条件】

不在同一直线上的三点确定一个圆．

注意：这里的“三个点”不是任意的三点，而是不在同一条直线上的三个点，而在同一直线上的三个点不能画一个圆．“确定”一词应理解为“有且只有”，即过不在同一条直线上的三个点有且只有一个圆，过一点可画无数个圆，过两点也能画无数个圆，过不在同一条直线上的三点能画且只能画一个圆．

【题型 3　确定圆的条件】

【例 3】（2022•绥中县一模）小明不慎把家里的圆形镜子打碎了，其中三块碎片如图所示，三块碎片中最有可能配到与原来一样大小的圆形镜子的碎片是（　　）



A．①　　B．②　　C．③　　D．均不可能

【分析】要确定圆的大小需知道其半径．根据垂径定理知第①块可确定半径的大小．

【解答】解：第①块出现两条完整的弦，作出这两条弦的垂直平分线，两条垂直平分线的交点就是圆心，进而可得到半径的长．

故选：A．

【变式 3-1】（2022 春•射阳县校级期末）平面直角坐标系内的三个点 A（1，0）、B（0，﹣3）、C（2，﹣3）__能__确定一个圆（填“能”或“不能”）．

【分析】根据三个点的坐标特征得到它们不共线，于是根据确定圆的条件可判断它们能确定一个圆．

【解答】解：∵B（0，﹣3）、C（2，﹣3），

∴BC∥x轴，

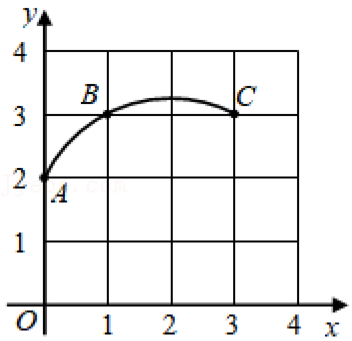
而点A（1，0）在x轴上，

∴点A、B、C不共线，

∴三个点A（1，0）、B（0，﹣3）、C（2，﹣3）能确定一个圆．

故答案为：能．

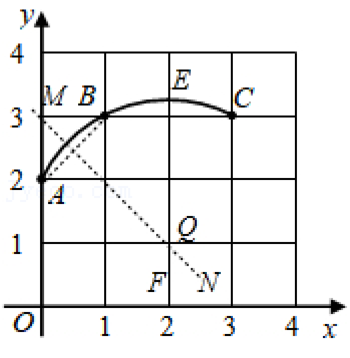
【变式3-2】（2022•西城区期末）如图，在平面直角坐标系xOy中，点A，B，C的横、纵坐标都为整数，过这三个点作一条圆弧，则此圆弧的圆心坐标为 <u>（2，1）</u>．



【分析】根据图形得出A、B、C的坐标，再连接AB，作线段AB和线段BC的垂直平分线MN、EF，两线交于Q，则Q是圆弧的圆心，最后求出点Q的坐标即可．

【解答】解：从图形可知：A点的坐标是（0，2），B点的坐标是（1，3），C点的坐标是（3，3），

连接AB，作线段AB和线段BC的垂直平分线MN、EF，两线交于Q，则Q是圆弧的圆心，如图，



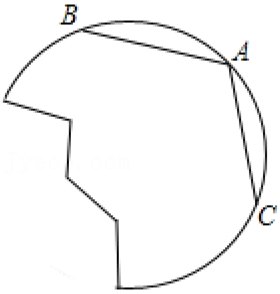
∴Q点的坐标是（2，1），

故答案为：（2，1）．

【变式3-3】（2022•任城区校级月考）将图中的破轮子复原，已知弧上三点A，B，C．

（1）画出该轮的圆心；

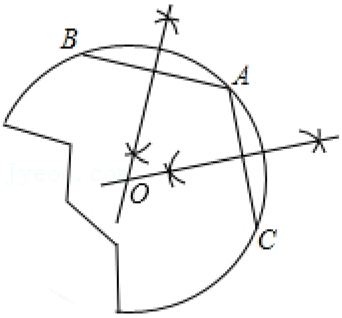
（2）若△ABC是等腰三角形，底边BC＝16cm，腰AB＝10cm，求圆片的半径R．



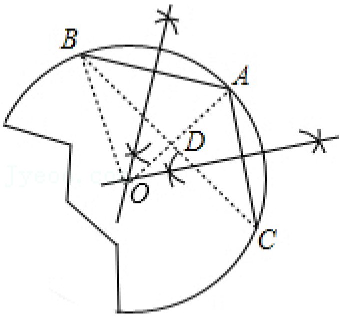
【分析】（1）根据垂径定理，分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线交点即为所求；

（2）连接 AO，OB，利用垂径定理和勾股定理可求出圆片的半径 R.

【解答】解：（1）如图所示：分别作弦 AB 和 AC 的垂直平分线交点 O 即为所求的圆心；



（2）连接 AO，OB，BC，BC 交 OA 于 D.



∵$BC=16cm$，

∴$BD=8cm$，

∵$AB=10cm$，

∴$AD=6cm$，

设圆片的半径为 R，在 Rt△BOD 中，$OD=$（$\mathbf{R}-6$）cm，

∴$R^2=8^2+(\mathbf{R}-6)^2$，

解得：$R=\frac{25}{3}cm$，

∴圆片的半径 R 为$\frac{25}{3}cm$.

【知识点 4　点与圆的位置关系】

设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离为 OP=d，则有：

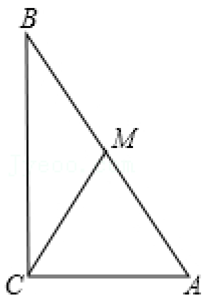
点 P 在圆外⇔d＞r；

点 P 在圆上⇔d=r；

点 P 在圆内⇔d＜r.

【题型 4　点与圆的位置关系】

【例 4】（2022 秋•宜州区期末）如已知：如图，△ABC 中，∠C＝90°，AC＝2cm，BC＝4cm，CM 是中线，以 C 为圆心，以$\sqrt{5}cm$ 长为半径画圆，则点 A、B、M 与⊙C 的关系如何？



【分析】点与圆的位置关系由三种情况：设点到圆心的距离为 d，则当 d＝R 时，点在圆上；当 d＞R 时，点在圆外；当 d＜R 时，点在圆内．

【解答】解：根据勾股定理，有 $AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$（$cm$）；

∵CA＝2cm＜$\sqrt{5}cm$，

∴点 A 在⊙O 内，

∵BC＝4cm＞$\sqrt{5}cm$，

∴点 B 在⊙C 外；

由中线定理得：$CM=\sqrt{5}cm$

∴M 点在⊙C 上．

【变式 4-1】（2022 春•龙湖区校级月考）⊙O 的面积为 25πcm^2，⊙O 所在的平面内有一点 P，当 PO___＝5cm__时，点 P 在⊙O 上；当 PO___＜5cm__时，点 P 在⊙O 内；当 PO___＞5cm__时，点 P 在⊙O 外．

【分析】根据圆的面积求出圆的半径，然后确定圆上点，圆内点以及圆外的到圆心的距离．

【解答】解：因为圆的面积为 25πcm^2，所以圆的半径为 5cm．

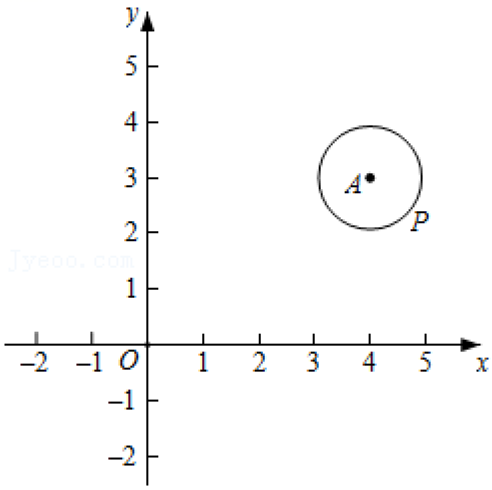
当点 P 到圆心的距离等于 5cm 时，点 P 在⊙O 上，此时 OP＝5cm．

当点 P 到圆心的距离小于 5cm 时，点 P 在⊙O 内，此时 OP＜5cm．

当点 P 到圆心的距离大于 5cm 时，点 P 在⊙O 外，此时 OP＞5cm．

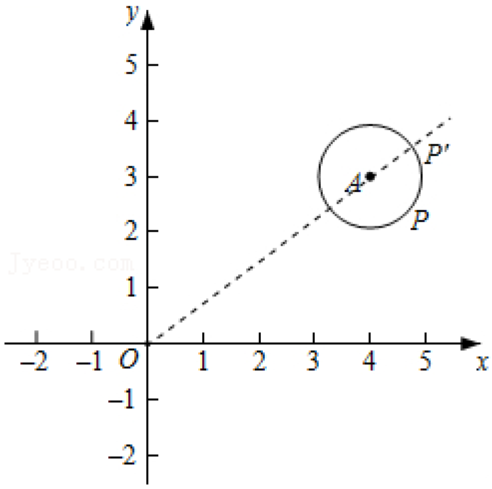
故答案分别是：$PO=5cm$，$PO<5cm$，$PO>5cm$．

【变式 4-2】（2022•广东模拟）如图，已知⊙A 的半径为 1，圆心的坐标为（4，3）．点 P（m，n）是⊙A 上的一个动点，则 m^2+n^2 的最大值为 __36__．



【分析】由于圆心 A 的坐标为（4，3），点 P 的坐标为（m，n），利用勾股定理可计算出 $OA=5$，$OP=\sqrt{m^2+n^2}$，这样把 m^2+n^2 理解为点 P 与原点的距离的平方，利用图形可得到当点 P 运动到射线 OA 上时，点 P 离圆点最远，即 m^2+n^2 有最大值，然后求出此时的 PO 长即可．

【解答】解：作射线 OA 交⊙O 于 P' 点，如图，



∵圆心 A 的坐标为（4，3），点 P 的坐标为（m，n），

∴$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$OP=\sqrt{m^2+n^2}$，

∴m^2+n^2 是点 P 点圆点的距离的平方，

∴当点 P 运动到 P' 处，点 P 离圆点最远，即 m^2+n^2 有最大值，

此时 $OP=OA+AP'=5+1=6$，则 $m^2+n^2=36$．

故答案为：36．