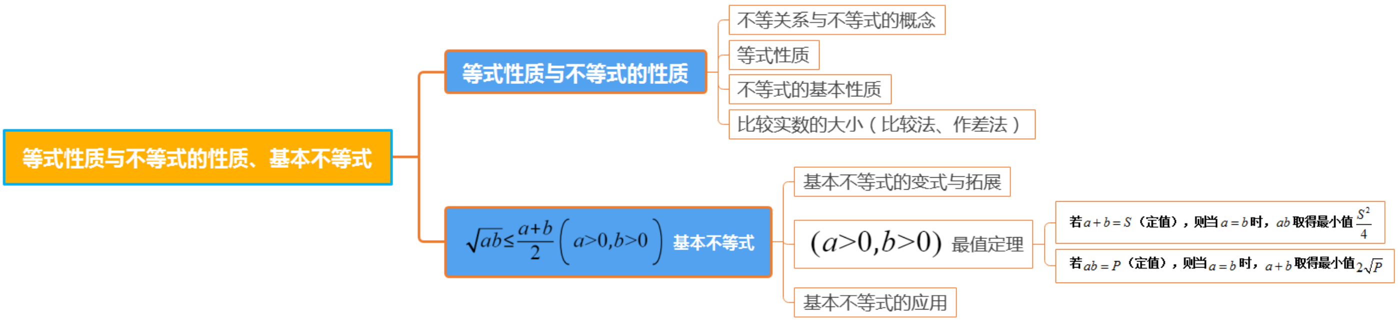
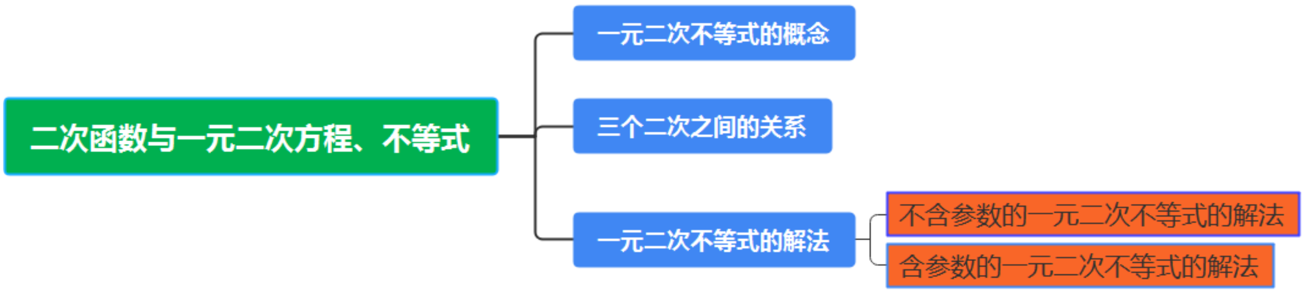
专题 03 一元二次函数、方程和不等式（考点清单）

目录

一、思维导图





二、知识回归

知识回顾 1：重要不等式

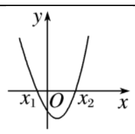
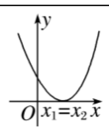
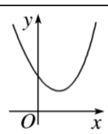
一般地，$\forall a,b\in R$，有 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

知识回顾 2：基本不等式链

$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$（其中 $a>0$，$b>0$ 当且仅当 $a=b$ 时，取“=”号）

（注意：一正，二定，三相等，特别“一正”，“三相等”这两类陷阱）

知识回顾 3：四个二次的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的根	有两个不相等的实数 根 x_1，x_2（$x_1<x_2$）	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$（$a>0$）的解集	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\{x\mid x\ne-\frac{b}{2a}\}$	R

$ax^2+bx+c<0\,(a>0)$的解集	$\{x\,|\,x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

知识回顾 4：一元二次不等式的解法

1：先看二次项系数是否为正，若为负，则将二次项系数化为正数；

2：写出相应的方程$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$，计算判别式Δ：

①$\Delta>0$时，求出两根x_1、x_2，且$x_1<x_2$（注意灵活运用十字相乘法）；

②$\Delta=0$时，求根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

③$\Delta<0$时，方程无解

3：根据不等式，写出解集.

知识回顾 5：分式不等式的解法

①移项化零：将分式不等式右边化为 0：

②$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

③$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

④$\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\le 0\\ g(x)\ne 0\end{cases}$

⑤$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\ge 0\\ g(x)\ne 0\end{cases}$

三、典型例题讲与练

考点清单 01 作差法比大小

【期末热考题型 1】比较两个代数式的大小

【解题方法】作差法

【典例 1】（多选）（2023 上·四川成都·高一树德中学校考期中）下列命题中正确的是（　　）

A．若$-1<a<5,-2<b<3$，则$1<a-b<2$ B．若$a>b$，则$a^2>b^2$

C．若$ac^2>bc^2$，则$a>b$　　D．若$a>b>0,m>0$，则$\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a}$

【答案】CD

【详解】对于 A 项：因为：$-1<a<5$，$-2<b<3$，所以得：$-3<-b<2$，

又因为：$-1<a<5$，所以得：$-4<a-b<7$，故 A 项错误；

对于 B 项：令 $a=1$， $b=-2$，所以得： $a>b$，但 $a^2=1<b^2=4$，故 B 项错误；

对于 C 项：由 $ac^2>bc^2$，得： $c^2>0$，所以得： $a>b$，故 C 项正确；

对于 D 项：由 $a>b>0$， $m>0$，得： $a-b>0$，

所以得： $\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{ab+am-ab-bm}{a(a+m)}=\frac{(a-b)m}{a(a+m)}>0$，故 D 项正确；

故选：CD.

【典例 2】（2022 上·河北衡水·高一校考阶段练习）已知关于 x 的不等式 $kx>22$ 的解集为 $\{x|x<-11\}$.

(1)求 k 的值；

(2)当 $a\geq 0$ 时，比较 $a^2-\sqrt{a+1}$ 与 $2a-\sqrt{a-k}+\frac{1}{2}k$ 的大小.

【答案】(1) -2

(2) $a^2-\sqrt{a+1}>2a-\sqrt{a-k}+\frac{1}{2}k$

【详解】（1）因为 $kx>22$ 的解集为 $\{x\,|\,x<-11\}$，

所以 $-11k=22$，解得 $k=-2$.

故 k 的值为 -2.

（2）由（1）知， $k=-2$，所以 $2a-\sqrt{a-k}+\frac{1}{2}k=2a-\sqrt{a+2}-1$，

因为 $a\geq 0$，所以 $(a-1)^2\geq 0$， $\sqrt{a+2}>\sqrt{a+1}$，

所以 $(a^2-\sqrt{a+1})-(2a-\sqrt{a+2}-1)=(a^2-2a+1)+(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})$

$=(a-1)^2+(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})>0$，

所以 $a^2-\sqrt{a+1}>2a-\sqrt{a+2}-1$，

即： $a^2-\sqrt{a+1}>2a-\sqrt{a-k}+\frac{1}{2}k$.

【专训 1-1】（多选）（2023 上·山东青岛·高一青岛大学附属中学校考阶段练习）在 a 克的糖水中含有 b 克的糖（$a>b>0$），再添加少许的糖 m 克（$m>0$），全部溶解后糖水更甜了，由此得糖水不等式 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，若 $\frac{b+m}{a+m}=x,\frac{b+n}{a+n}=y(n>0)$，则（　）

A．若 $m>n$，则 $x>y$

B．若 $m\leq n$，则 $x\leq y$

C． $\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}$

D．当 $m>n$ 时， $\frac{b+m}{a+m}>\frac{a+n}{b+n}$.

【答案】ABC

【详解】由 $a>b>0,m>0$，则 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，

若 $\frac{b+m}{a+m}=x,\frac{b+n}{a+n}=y(n>0)$，

若 $m>n$，则 $x-y=\frac{b+m}{a+m}-\frac{b+n}{a+n}=\frac{(b+m)(a+n)-(b+n)(a+m)}{(a+m)(a+n)}=\frac{(m-n)(a-b)}{(a+m)(a+n)}>0$，故 $x>y$；

若 $m\le n$，则 $x-y=\frac{b+m}{a+m}-\frac{b+n}{a+n}=\frac{(m-n)(a-b)}{(a+m)(a+n)}\le 0$，故 $x\le y$；

由题设，结合不等式性质显然有 $\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}$；

故选：ABC

【专训 1-2】（2023 上·浙江金华·高一校考阶段练习）（1）已知 $a>0$，试比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小；

（2）已知 a，b 为实数，试比较 $2a^2+\frac{1}{4}b^2+1$ 与 $ab+2a$ 的大小.

【答案】（1）答案见解析（2）$2a^2+\frac{1}{4}b^2+1\ge ab+2a$

【详解】（1）【作差比较法，分类讨论】

$\because a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a}$，

又 $\because a>0$，$a+1>0$，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$\frac{(a-1)(a+1)}{a}>0$，所以 $a>\frac{1}{a}$；

当 $a=1$ 时，$\frac{(a-1)(a+1)}{a}=0$，所以 $a=\frac{1}{a}$；

当 $0<a<1$ 时，$\frac{(a-1)(a+1)}{a}<0$，所以 $a<\frac{1}{a}$.

综上，当 $a>1$ 时，$a>\frac{1}{a}$；当 $a=1$ 时，$a=\frac{1}{a}$；当 $0<a<1$ 时，$a<\frac{1}{a}$.

（2）【作差比较法，配方变形】

$2a^2+\frac{1}{4}b^2+1-ab-2a=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+(a-1)^2\ge 0$，

当且仅当 $a=1$，$b=2$ 取等号.

所以 $2a^2+\frac{1}{4}b^2+1\ge ab+2a$.

考点清单 02 基本不等式的应用

【期末热考题型 1】和定，求积的最值

【解题方法】基本不等式

【典例 1】（2023 上·甘肃酒泉·高一校考期中）若 $0<x<8$，则 $\sqrt{x(8-x)}$ 的最大值是（　）

A． $2\sqrt{2}$　　B． 4　　C． 8　　D． 16

【答案】B

【详解】因为 $0<x<8$，可得 $8-x>0$，则 $\sqrt{x(8-x)}\le\frac{x+(8-x)}{2}=4$，

当且仅当 $x=8-x$ 时，即 $x=4$ 时，等号成立，所以 $\sqrt{x(8-x)}$ 的最大值为 4.

故选：B.

【典例 2】（2023 上·河南省直辖县级单位·高一济源市第四中学校考阶段练习）已知正数 a，b 满足 $a+2b=2$，则 ab 的最大值为_____.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【详解】因为正数 a，b 满足 $a+2b=2$，所以 $2=a+2b\ge2\sqrt{a\times2b}$，平方化简得 $ab\le\frac{1}{2}$，

当且仅当 $a=2b=1$ 时，等号成立，所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

【专训 1-1】（2023·江苏·高一专题练习）若 $0<x<\frac{1}{3}$，则 $y=2x(1-3x)$ 的最大值是_____.

【答案】$\frac{1}{6}$

【详解】由 $0<x<\frac{1}{3}$ 得 $0<3x<1$，$-1<-3x<0$，$0<1-3x<1$，

因为 $0<3x<1$，$0<1-3x<1$，所以利用基本不等式可得 $\frac{3x+(1-3x)}{2}\ge\sqrt{3x(1-3x)}$，

整理得 $3x(1-3x)\le\frac{1}{4}$，即 $3x(1-3x)\le\frac{1}{4}$，即 $x(1-3x)\le\frac{1}{12}$，当且仅当 $3x=1-3x$ 即 $x=\frac{1}{6}$ 时，等号成立，

所以 $2x(1-3x)\le2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$.故当 $x=\frac{1}{6}$ 时，$y=2x(1-3x)$ 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

故答案为 $\frac{1}{6}$.

【期末热考题型 2】积定，求和的最值

【解题方法】基本不等式

【典例 1】（2023 上·广东深圳·高一校考阶段练习）设 $x>0$，则 $y=3-2x-\frac{1}{x}$ 的最大值是（　）

A． 3　　B． $3-2\sqrt{2}$　　C． $3-2\sqrt{3}$　　D． -1

【答案】B

【详解】因为$x>0$，则$2x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$2x=\frac{1}{x}$，即$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，

可得$y=3-2x-\frac{1}{x}=3-\left(2x+\frac{1}{x}\right)\le 3-2\sqrt{2}$，

所以$y=3-2x-\frac{1}{x}$的最大值是$3-2\sqrt{2}$.

故选：B.

【典例 2】（2023 上·上海普陀·高一校考期中）已知：$x>-1$，则$x-1+\frac{4}{x+1}$的最小值是________.

【答案】2

【详解】由$x>-1$，得$x+1>0$，因此$x-1+\frac{4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-2\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-2=2$，

当且仅当$x+1=\frac{4}{x+1}$，即$x=1$时取等号，

所以当$x=1$时，$x-1+\frac{4}{x+1}$取得最小值 2.

故答案为：2

【专训 1-1】（2023 上·上海闵行·高三校考期中）已知$x>2$，则函数$y=x-2+\frac{9}{x-2}$的最小值是________.

【答案】6

【详解】因为$x>2$，所以$x-2>0$，

由基本不等式可得$y=x-2+\frac{9}{x-2}\ge 2\sqrt{(x-2)\times\frac{9}{x-2}}=6$，

当且仅当$x-2=\frac{9}{x-2}$，即$x=5$时等号成立，

故答案为：6

【期末热考题型 3】配凑法

【解题方法】拼凑项，化整体，利用基本不等式

【典例 1】（2024 上·广东·高三校联考阶段练习）若$x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，则$2x+\frac{1}{2x-1}$的最小值为（　）

A．1　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．3

【答案】D

【详解】因为$x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以$2x-1\in(0,1]$，

所以$2x+\frac{1}{2x-1}=\left[(2x-1)+\frac{1}{2x-1}\right]+1\geq 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+1=3$，当且仅当$2x-1=\frac{1}{2x-1}$，即$x=1$时取等号.

故选：D.

【典例2】（2023上·北京顺义·高一校考期中）函数$y=4x+\frac{4}{x-1}(x>1)$的最小值是_____；此时$x=$_____.

【答案】 12 2

【详解】$y=4x+\frac{4}{x-1}=4(x-1)+\frac{4}{x-1}+4$，

因为$x>1$，所以$x-1>0$，$4(x-1)+\frac{4}{x-1}+4\geq 2\sqrt{4(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right)}+4=8+4=12$；

当且仅当$4(x-1)=\frac{4}{x-1}$，即$x=2$时，取到等号，所以y的最小值为12.

故答案为：12，2.

【专训1-1】（2023上·山西朔州·高一怀仁市第一中学校校考阶段练习）已知$x>\frac{1}{3}$，则$3x+\frac{4}{3x-1}$的最小值为（ ）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】A

【详解】$\because 3x+\frac{4}{3x-1}=3x-1+\frac{4}{3x-1}+1\geq 2\sqrt{(3x-1)\cdot\frac{4}{3x-1}}+1=5$，

当且仅当$3x-1=\frac{4}{3x-1}$，即$x=1$时，等号成立.

故选：A.

【专训1-2】（2023上·广东广州·高一广州空港实验中学校考期中）设x,y均为正数，且$x\cdot y=4$，则$x+2y$的最小值是______.

【答案】$4\sqrt{2}$

【详解】因为x,y均为正数，且$x\cdot y=4$，

所以$x+2y\geq 2\sqrt{2xy}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$，

当且仅当$\begin{cases}x=2y\\x\cdot y=4\end{cases}$，即$x=2y=2\sqrt{2}$时取等，

所以$x+2y$的最小值是$4\sqrt{2}$.

【期末热考题型4】"1"的妙用

【解题方法】将已知条件中的等式与目标式相乘

【典例 1】（2023 上·北京·高一北京市十一学校校考期末）已知实数 x，y 满足 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $x+3y$ 的最小值为（　）

A．8　　B．10　　C．12　　D．14

【答案】C

【详解】因为 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$，

所以 $x+3y=(x+3y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{9y}{x}+\frac{x}{y}+6\geq 2\sqrt{\frac{9y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+6=12$，

当且仅当 $\frac{9y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=6,y=2$ 时取等号，

则 $x+3y$ 的最小值为 12.

故选：C.

【典例 2】（2023 上·四川成都·高一成都市锦江区嘉祥外国语高级中学校考期中）若 $0<x<\frac{1}{3}$，则 $y=\frac{3}{2x}+\frac{2}{1-3x}$ 的最小值为（　）

A．12　　B．$6+4\sqrt{3}$　　C．$9+\sqrt{6}$　　D．$\frac{25}{2}$

【答案】D

【详解】因为 $0<x<\frac{1}{3}$，故 $1-3x>0$，则 $(1-3x)+3x=1$，

故 $y=\frac{3}{2x}+\frac{2}{1-3x}=(\frac{9}{2\times 3x}+\frac{2}{1-3x})[(1-3x)+3x]$

$=\frac{13}{2}+\frac{9(1-3x)}{2\times 3x}+\frac{6x}{1-3x}\geq\frac{13}{2}+2\sqrt{\frac{9(1-3x)}{2\times 3x}\cdot\frac{6x}{1-3x}}=\frac{25}{2}$，

当且仅当 $\frac{9(1-3x)}{2\times 3x}=\frac{6x}{1-3x}$，即 $x=\frac{1}{5}$ 时等号成立，

即 $y=\frac{3}{2x}+\frac{2}{1-3x}$ 的最小值为 $\frac{25}{2}$，

故选：D

【专训 1-1】（2023 上·上海黄浦·高一上海市大同中学校考期中）已知 $x>0,y>0$，且 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值为________.

【答案】$4+2\sqrt{3}$

【详解】$x>0,y>0$，且 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $x+y=(\frac{3}{x}+\frac{1}{y})(x+y)=4+\frac{3y}{x}+\frac{x}{y}\geq 4+2\sqrt{\frac{3y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4+2\sqrt{3}$，

当且仅当$\frac{3y}{x}=\frac{x}{y}$，即$x=\sqrt{3}y=3+\sqrt{3}$时取等号，

所以当$x=3+\sqrt{3},y=1+\sqrt{3}$时，$x+y$取得最小值$4+2\sqrt{3}$.

故答案为：$4+2\sqrt{3}$

【专训1-2】（2023上·江西赣州·高一赣州市第三中学校联考期中）设$|t|<4$，则$\frac{1}{4-t}+\frac{4}{4+t}$的最小值为______.

【答案】$\frac{9}{8}$

【详解】因为$|t|<4$，所以$4-t>0$，$4+t>0$，

则$\frac{1}{4-t}+\frac{4}{4+t}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4-t}+\frac{4}{4+t}\right)(4-t+4+t)$

$=\frac{1}{8}\left[1+4+\frac{4+t}{4-t}+\frac{4(4-t)}{4+t}\right]$

$\geq\frac{1}{8}\left[1+4+2\sqrt{\frac{4+t}{4-t}\cdot\frac{4(4-t)}{4+t}}\right]=\frac{9}{8}$，

当且仅当$\frac{4+t}{4-t}=\frac{4(4-t)}{4+t}$，即$t=\frac{4}{3}$时，等号成立.

则$\frac{1}{4-t}+\frac{4}{4+t}$的最小值为$\frac{9}{8}$.

故答案为：$\frac{9}{8}$.

【期末热考题型5】代入消元法

【解题方法】带入消元

【典例1】（2023上·黑龙江·高一校联考期中）已知$a>0$，$b>0$，$2a+b=ab$，则$\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b-2}$的最小值为（　）

A．2　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

【答案】A

【详解】由$a>0$，$b>0$，$2a+b=ab$，得$(a-1)(b-2)=2,\therefore b-2=\frac{2}{a-1},\therefore b=\frac{2a}{a-1}>0$，

故$a-1>0,a=\frac{b}{b-2}>0$，故$b-2>0$；

所以$\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b-2}=\frac{1}{a-1}+(a-1)\geq 2$，

当且仅当$\frac{1}{a-1}=a-1$，结合$2a+b=ab$，即$a=2,b=4$时等号成立.

即$\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{b-2}$的最小值为2，

故选：A

【典例2】（2023上·重庆渝北·高三重庆市渝北中学校校考阶段练习）已知$a>0$，$b>0$，且$2a+b=ab-1$，则$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的最小值为______.

【答案】$5+2\sqrt{6}$ / $2\sqrt{6}+5$

【详解】由$2a+b=ab-1$，可得$a=\dfrac{b+1}{b-2}$，因为$a>0,b>0$，可得$b>2$，

$a+2b=\dfrac{b+1}{b-2}+2b=\dfrac{b-2+3}{b-2}+2(b-2)+4$

$=\dfrac{3}{b-2}+2(b-2)+5\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{b-2}\times 2(b-2)}+5=5+2\sqrt{6}$，

当$\dfrac{3}{b-2}=2(b-2)$时，即$b=2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，等号成立.

所以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的最小值为$5+2\sqrt{6}$.

故答案为：$5+2\sqrt{6}$

【专训1-1】（2023上·江苏无锡·高一辅仁高中校考阶段练习）若$a>0,b>0$，且$ab=a+b+1$，$a+8b$的最小值为（　）

A．15　　B．$8+4\sqrt{2}$　　C．17　　D．$6+4\sqrt{2}$

【答案】C

【详解】$\because ab=a+b+1$，

$\therefore a(b-1)=b+1$，其中$b\neq 1$，

$\therefore a=\dfrac{b+1}{b-1}$，

又$\because a>0,b>0$，$\therefore b-1>0$，

则$a+8b=\dfrac{b+1}{b-1}+8b=\dfrac{2}{b-1}+8b+1$

$=\dfrac{2}{b-1}+8(b-1)+9$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{b-1}\times 8(b-1)}+9=17$，

当且仅当$\dfrac{2}{b-1}=8(b-1)$即$b=\dfrac{3}{2}$时，等号成立.

$\therefore a+8b$的最小值为17.

故选：C

【专训1-2】（2023上·江苏扬州·高三统考阶段练习）已知正实数a,b满足$ab-b+2=0$，则$\dfrac{1}{a}+3b$的最小值是______.

【答案】$2\sqrt{6}+7$

【详解】由题设 $a=\frac{b-2}{b}>0$ 且 $b>0$，则 $b>2$，

所以 $\frac{1}{a}+3b=\frac{b}{b-2}+3b=\frac{2}{b-2}+3(b-2)+7\geq 2\sqrt{\frac{2}{b-2}\times 3(b-2)}+7=2\sqrt{6}+7$，

当且仅当 $\frac{2}{b-2}=3(b-2)\Rightarrow b=2+\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a=\frac{\sqrt{6}-1}{5}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a}+3b$ 的最小值是 $2\sqrt{6}+7$.

故答案为：$2\sqrt{6}+7$

【期末热考题型 6】二次与二次（或一次）商式

【解题方法】分离变量法

【典例 1】（2022 上·四川成都·高一石室中学校考阶段练习）设 $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2},x\in(-1,1)$，则（　）

A．$f(x)_{\min}=1$　　B．$f(x)_{\max}=1$

C．$f(x)_{\min}=-1$　　D．$f(x)_{\max}=-1$

【答案】D

【详解】$x\in(-1,1)$，则 $1-x\in(0,2)$，

$$f(x)=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}=-\left[\frac{1-x}{2}+\frac{1}{2(1-x)}\right]\leq -2\sqrt{\frac{1-x}{2}\times\frac{1}{2(1-x)}}=-1,$$

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，则 $f(x)_{\max}=-1$.

故选：D.

【典例 2】（2021·高一课时练习）当 $x>0$ 时，求 $y=\frac{x^2+3x+6}{x+1}$ 的最小值.

【答案】5.

【详解】$y=\frac{\left(x^2+x\right)+\left(2x+2\right)+4}{x+1}=x+2+\frac{4}{x+1}$，

$$=\left(x+1\right)+\frac{4}{x+1}+1\geq 2\sqrt{\left(x+1\right)\cdot\frac{4}{x+1}}+1=5$$

当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$ 时，等号成立，即 $x=1$.

【专训 1-1】（2022 上·湖南益阳·高一校考阶段练习）已知 $x>-1$，则函数 $y=\frac{x^2+x+4}{x+1}$ 的最小值是______.

【答案】3

【详解】因为$x>-1$，

$$y=\frac{x^2+x+4}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x+1)+4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-1$$

$$\geq 2\sqrt{(x+1)\frac{4}{x+1}}-1=3$$

当且仅当$(x+1)=\frac{4}{x+1}$，即$x=1$时，等号成立.

所以函数$y=\frac{x^2+x+4}{x+1}$的最小值是3

故答案为:3.

【专训 1-2】（2021·天津河西·统考模拟预测）函数$y=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}(x>-1)$的最小值为________.

【答案】9

【详解】因为$x>-1$，则$x+1>0$，

所以$y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}$

$$=(x+1)+\frac{4}{x+1}+5\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+5=9,$$

当且仅当$x+1=\frac{4}{x+1}$即$x=1$时等号成立，

∴已知函数的最小值为 9.

故答案为：9.

考点清单 03 基本不等式在实际中的应用

【期末热考题型 1】在实际问题中判断使用基本不等式求最值

【解题方法】基本不等式

【典例 1】（2023 上·江苏南通·高一统考期中）第十九届亚运会于 2023 年 9 月 23 日在杭州举办，本届亚运会吉祥物是一套名为“江南忆”的三个机器人模型，三个机器人模型分别取名“琮琮”、“莲莲”、“宸宸”.某公益团队联系亚运会组委会计划举办一场吉祥物商品展销会，成套出售“江南忆”，将所获利润全部用于体育设施建设.据市场调查：每套吉祥物纪念品的供货价格分为固定价格和浮动价格两部分，其中固定价格为 60 元，浮动价格$=\frac{5}{\text{销售量}}$（单位：元，其中销售量单位为：万套）.而当每套吉祥物售价定为x元时，销售量可达到$(30-0.2x)$万套.注：利润＝（售价－供货价格）×销售量（不计其他成本）

(1)每套吉祥物纪念品售价为 125 元时，能获得的总利润是多少万元？

(2)每套吉祥物纪念品售价为多少元时，单套吉祥物的利润最大？并求出最大值.

【答案】(1)320

(2)售价为 145 元，利润最大，最大值为 80 元

【详解】（1）每套吉祥物纪念品售价为 125 元时，

销售量为$30-0.2\times125=5$（万套），

供货单价为$60+\frac{5}{5}=61$（元），

总利润为$5\times(125-61)=320$（万元）.

（2）设单套售价为x元，此时销售量为$(30-0.2x)$万套，

供货价格为$\left(60+\frac{5}{30-0.2x}\right)$元，

同时$30-0.2x>0$，所以$0<x<150$.

所以单套利润为$x-60-\frac{25}{150-x}=-\left[(150-x)+\frac{25}{150-x}\right]+90$

$\le-2\sqrt{(150-x)\cdot\frac{25}{150-x}}+90=80$，

当且仅当$150-x=\frac{25}{150-x}$，即$x=145$时取等号.

所以每套吉祥物售价为 145 元时，单套的利润最大，最大值是 80 元.

【典例 2】（2023 上·上海浦东新·高一上海市建平中学校考期中）已知某公司生产某款产品的年固定成本为 30 万元，每万件产品还需另外投入 16 万元，设该公司一年内共生产x万件产品并全部销售完，每万件产品的销售收入为$R(x)$万元，且已知$R(x)=\begin{cases}400-6x,0<x\le40,10000x\in Z\\ \frac{7400}{x}-\frac{40000}{x^2},x>40,10000x\in Z\end{cases}$.

(1)求一年的总利润W（万元）关于年产量x（万件）的函数解析式；

(2)已知某年的年产量超过 40 万件，当年产量为多少万件时，公司在该款产品的生产中所获得的总利润最大？并求出最大总利润.（总利润=总销售收入-固定成本-额外投入）

【答案】(1)$W=\begin{cases}-6x^2+384x-30,0<x\le40,10000x\in Z\\ -16x-\frac{40000}{x}+7370,x>40,10000x\in Z\end{cases}$，

(2)50; 5770 万元

【详解】（1）一年的总利润:

$W=xR(x)-30-16x=\begin{cases}x(400-6x)-30-16x,0<x\le40\\ x\left(\frac{7400}{x}-\frac{40000}{x^2}\right)-30-16x,x>40\end{cases}=\begin{cases}-6x^2+384x-30,0<x\le40,10000x\in Z\\ -16x-\frac{40000}{x}+7370,x>40,10000x\in Z\end{cases}$（2）年产量超过 40 万件，即$x>40$，此时

$W=-16x-\frac{40000}{x}+7370=-16\left(x+\frac{2500}{x}\right)+7370\le -16\times 2\sqrt{2500}+7370=5770$，

当且仅当 $x=\frac{2500}{x}$，即 $x=50$ 时取等号.

故当年产量为 50 万件时，公司在该款产品的生产中所获得的总利润最大，最大总利润为 5770 万元.

【专训 1-1】（2023 上·江苏苏州·高一江苏省黄埭中学校考阶段练习）某单位有员工 1000 名，平均每人每年创造利润 10 万元，为了增加企业竞争力，决定优化产业结构，调整出 $x\left(x\in \mathrm{N}^*\right)$ 名员工从事第三产业，调整出的员工平均每人每年创造利润为 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)$ 万元 $(a>0)$，剩余员工平均每人每年创造的利润可以提高 $0.2x\%$.

(1)若要保证剩余员工创造的年总利润不低于原来 1000 名员工创造的年总利润，则最多调整出多少名员工从事第三产业？

(2)在（1）的条件下，若调整出的员工创造的年总利润始终不高于剩余员工创造的年总利润，则 a 的取值范围是多少？

【答案】(1)500 名

(2) $(0,5]$

【详解】（1）由题意得：$10(1000-x)(1+0.2x\%)\ge 10\times 1000$，

即 $x^2-500x\le 0$，又 $x>0$，所以 $0<x\le 500$.

即最多调整 500 名员工从事第三产业.

（2）从事第三产业的员工创造的年总利润为 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x$ 万元，

从事原来产业的员工的年总利润为 $10(1000-x)\left(1+\frac{1}{500}x\right)$ 万元，

则 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x\le 10(1000-x)(1+0.2x\%)$

所以 $ax-\frac{3x^2}{500}\le 1000+2x-x-\frac{1}{500}x^2$

所以 $ax\le \frac{2x^2}{500}+1000+x$，

即 $a\le \frac{2x}{500}+\frac{1000}{x}+1$ 恒成立，

因为 $\frac{2}{500}x+\frac{1000}{x}\ge 2\sqrt{\frac{2x}{500}\frac{1000}{x}}=4$，

当且仅当 $\frac{2x}{500}=\frac{1000}{x}$，即 $x=500$ 时等号成立.

所以 $a\le 5$，又 $a>0$，所以 $0<a\le 5$，

即 a 的取值范围为 $(0,5]$.

【专训 1-2】（2023 上·福建福州·高一福州高新区第一中学（闽侯县第三中学）校联考期中）某集装箱码头在货物装卸与运输上进行大力改进，改进后单次装箱的成本 C（单位：万元）与货物量 x（单位：吨）满足函数关系式 $C=3+x$，单次装箱收入 S（单位: 万元）与货物量 x 的函数关系式 $S=\begin{cases}3x+\dfrac{k}{x-8}+5,0<x<6\\14,x\geq 6.\end{cases}$ 已知单次装箱的利润 $L=S-C$，且当 $x=2$ 时，$L=3$.

(1)求实数 k 的值；

(2)当单次装箱货物量 x 为多少吨时，单次装箱利润 L 可以达到最大，并求出最大值.

【答案】(1)18

(2)每日产量为 5 吨时，日利润最大 6 万元

【详解】（1）由题意得，每日利润 L 与日产量 x 的函数关系式为:

$$L=\begin{cases}2x+\dfrac{k}{x-8}+2,0<x<6\\11-x,x\geq 6\end{cases},$$

当 $x=2$ 时，$L=3$，即：$3=2\times2+\dfrac{k}{2-8}+2$，

解得 $k=18$.

（2）当 $x\geq 6$ 时，$L=11-x$ 为单调递减函数，

故当 $x=6$ 时，L 的最大值为 $11-6=5$，

当 $0<x<6$ 时，$L=2x+\dfrac{18}{x-8}+2=2(x-8)+\dfrac{18}{x-8}+18\leq 6$，

当且仅当 $2(x-8)=\dfrac{18}{x-8}(0<x<6)$，

即 $x=5$ 时，L 的最大值为 6，

综合上述情况，当每日产量为 5 吨时，日利润最大 6 万元.

考点清单 04 分类讨论法解决一元二次不等式（含参）问题

【期末热考题型 1】二次项系数不含参数

【解题方法】十字相乘法+分类讨论法

【典例 1】（2023 上·贵州六盘水·高一统考期中）解关于 x 的不等式 $x^2-a^2<2x-2a$.

【答案】$a<1$ 时，解集为 $(a,2-a)$；$a=1$ 时，解集为 $\varnothing$；$a>1$ 时，解集为 $(2-a,a)$.

【详解】由题可得 $x^2-2x-a^2+2a<0$，得 $(x-a)[x-(2-a)]<0$，

①当 $2-a>a$ 时，即当 $a<1$ 时，解得 $a<x<2-a$；

②当 $2-a=a$ 时，即当 $a=1$ 时，原不等式无解；