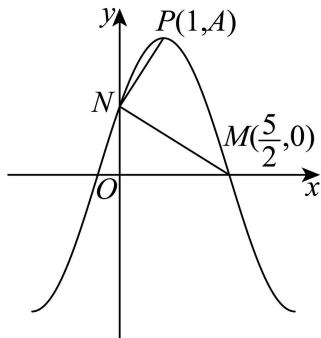


河南省济洛平许 2024 届高三第三次质量检测数学试题

学校: _____ 姓名: _____ 班级: _____ 考号: _____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$, $B = \{x \mid \log_2(x^2 - 4x + 5) < 1\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
 - A. $\{x \mid 1 < x < 2\}$
 - B. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
 - C. $\{x \mid -2 < x < 1\}$
 - D. $\{x \mid -2 < x < 3\}$
2. 已知中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 (\quad)
 - A. $y = \pm\sqrt{2}x$
 - B. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$
 - C. $y = \pm 2x$
 - D. $y = \pm\frac{1}{2}x$
3. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 a_5 = 2a_3$, 且 a_4 与 a_6 的等差中项为 $\frac{5}{4}$, 则 $S_5 = (\quad)$
 - A. 29
 - B. 31
 - C. 33
 - D. 36
4. 有 5 名志愿者去定点帮扶 3 位困难老人, 若要求每名志愿者都要帮扶且只帮扶一位老人, 每位老人至多安排 2 名志愿者帮扶, 则不同的安排方法共有 (\quad)
 - A. 180 种
 - B. 150 种
 - C. 90 种
 - D. 60 种
5. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 图象与 x 轴的交点为 $M(\frac{5}{2}, 0)$, 与 y 轴的交点为 N , 最高点 $P(1, A)$, 且满足 $NM \perp NP$. 则下列说法正确的是 (\quad)



- A. $f(\pi) > f(5)$
 - B. 函数 $f(x)$ 在 $(4, 7)$ 上单调递减
 - C. 若 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{\sqrt{30}}{2}$ ($x_1 \neq x_2$), 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是 1
 - D. 把 $y = A \sin \omega x$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 得到 $y = f(x)$ 的图象
6. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 作斜率为 k 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 点 M 的坐标

为 $(-1,1)$ ，若 $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ ，则 $k = ()$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 我们称 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为“二阶行列式”，规定其运算为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. 已知函数 $f(x)$ 的定

义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，且 $f(x) \neq 0$ ，若对定义域内的任意 x, y 都有 $\begin{vmatrix} x & f(y) \\ y & f(x) \end{vmatrix} = 0$ ，则

()

- A. $f(1) = 1$ B. $f(x)$ 是偶函数 C. $f(x)$ 是周期函数 D. $f(x)$ 没有极值点

8. 直线 $l_1: mx - y - 5m + 1 = 0$ 与 $l_2: x + my - 5m - 1 = 0$ 交于点 P ，圆 $C: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$

上有两动点 A, B ，且 $|AB| = 2\sqrt{2}$ ，则 $|\overline{PA} + \overline{PB}|$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $10\sqrt{2}$

二、多选题

9. 下列结论正确的是 ()

- A. 数据 36, 28, 22, 24, 22, 78, 32, 26, 20, 22 的第 80 百分位数为 34
B. 用简单随机抽样的方法从 51 个个体中抽取 2 个个体，则每个个体被抽到的概率都是 $\frac{1}{51}$
C. 已知随机变量 $\xi \sim B\left(8, \frac{3}{4}\right)$ ，若 $\eta = 2\xi + 1$ ，则 $D(\eta) = 3$
D. 随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(x > 1) = 0.68$ ，则 $P(2 \leq x < 3) = 0.18$

10. 已知函数 $f(x) = \ln x - 1 - \frac{2}{x-1}$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 在定义域上是增函数
B. $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R}
C. $f(\log_{2023} 2024) + f(\log_{2024} 2023) = 1$
D. 若 $f(a) = \frac{e^b + 1}{e^b - 1} - b$ ， $a \in (0, 1)$ ， $b \in (0, +\infty)$ ，则 $ae^b = 1$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， $\overline{A_1M} = \lambda \overline{A_1D}$ ， $\overline{D_1N} = \mu \overline{D_1C}$ ， $\lambda, \mu \in (0, 1)$.

点 P 是棱 A_1D_1 上的一个动点，则 ()

- A. 当且仅当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $BD_1 \perp$ 平面 DMN
- B. 当 $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$ 时, $MN //$ 平面 ACC_1A_1
- C. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $|PM| + |PN|$ 的最小值为 $1 + \sqrt{2}$
- D. 当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时, 过 B, M, N 三点的截面是五边形

三、填空题

12. 已知 $(1+i)z = 2i$ (i 为虚数单位), z 为实系数方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根, 则 $p \cdot q =$ _____.

13. 若 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos x + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin x$, 则不等式 $f(\sin x) + f(\cos x) > 0$ 的解集是 _____.

14. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 2, 底面 $ABCD$ 为菱形, $AB = AC = \sqrt{3}$, E, F 分别为 PA, PC 的中点, 则四面体 $EFBD$ 的体积为 _____; 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积的最小值为 _____.

四、解答题

15. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2}$, 且 $a \neq c$.

(1) 求证: $B = 2C$;

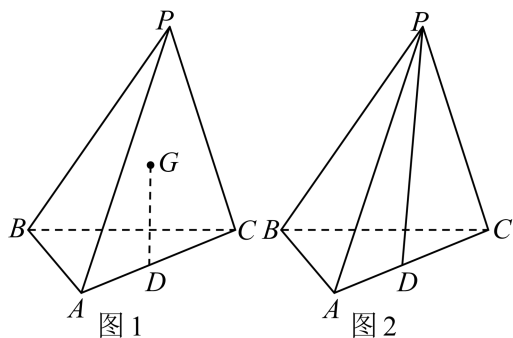
(2) 若 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于 D , 且 $a = 12$, 求线段 BD 的长度的取值范围.

16. 某学校安排甲、乙、丙三个班级同时到学校礼堂参加联欢晚会, 已知甲班艺术生占比 8%, 乙班艺术生占比 6%, 丙班艺术生占比 5%. 学生自由选择座位, 先到者先选. 甲、乙、丙三个班人数分别占总人数的 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$. 若主持人随机从场下学生中选一人参与互动.

(1) 求选到的学生是艺术生的概率;

(2) 如果选到的学生是艺术生, 判断其来自哪个班的可能性最大.

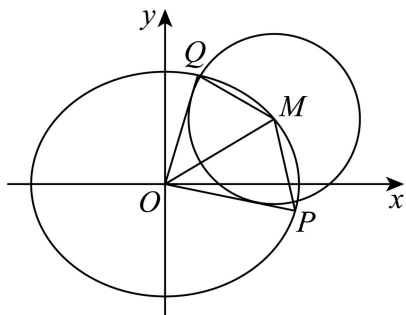
17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB = PC = 3, BC = 2, AB = AC = \sqrt{3}, \overline{AD} = \lambda \overline{AC}, \lambda \in (0, 1)$.



(1)如图 1, G 为 $\triangle PBC$ 的重心, 若 $DG \parallel$ 平面 PAB , 求 λ 的值;

(2)如图 2, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$, 且二面角 $P-BC-A$ 的余弦值为 $-\frac{1}{4}$ 时, 求直线 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值.

18. 已知 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 过原点 O 向圆 $M: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ 引两条切线, 分别与椭圆 C 交于 P, Q 两点 (如图所示), 记直线 OP, OQ 的斜率依次为 k_1, k_2 , 且 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$.



(1)求圆 M 的半径 r ;

(2)求证: $|OP|^2 + |OQ|^2$ 为定值;

(3)求四边形 $OPMQ$ 的面积的最大值.

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 2$, e 为自然对数的底数.

(1)若此函数的图象与直线 $x = \frac{1}{e}$ 交于点 P , 求该曲线在点 P 处的切线方程;

(2)判断不等式 $f(x) > 0$ 的整数解的个数;

(3)当 $\frac{e^x}{x} < e^2$ 时, $(1 + axe^{2-x} - a)f(x) \leq xe^{2-x} - 1$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案:

1. D

【分析】

分别求解绝对值不等式 $|x| < 2$ 和对数型不等式 $\log_2(x^2 - 4x + 5) < 1$ 得到集合 A, B ,再求并集即得.

【详解】由 $|x| < 2$ 得: $-2 < x < 2$, 即 $A = \{x | -2 < x < 2\}$;

由 $\log_2(x^2 - 4x + 5) < 1$ 可得: $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ x^2 - 4x + 5 < 2 \end{cases}$, 解得: $1 < x < 3$, 即 $B = \{x | 1 < x < 3\}$;

则 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$.

故选: D.

2. A

【分析】根据离心率求出 $\frac{b}{a}$ 的值,再根据渐近线方程求解即可.

【详解】因为双曲线焦点在 x 轴上,所以渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

又因为双曲线离心率为 $\sqrt{3}$,且 $a^2 + b^2 = c^2$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$,

解得 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, 即渐近线方程为: $y = \pm\sqrt{2}x$.

故选: A.

3. B

【分析】

设公比为 q ,将两个条件中的量分别用 a_1, q 表示,解方程组即得 a_1, q 的值,代入等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式计算即得.

【详解】不妨设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $a_2 a_5 = 2a_3$ 可得: $a_1^2 q^5 = 2a_1 q^2$,因 $a_n > 0, q > 0$,

则 $a_1 q^3 = 2$ ①

又由 a_4 与 a_6 的等差中项为 $\frac{5}{4}$ 可得: $a_4 + a_6 = \frac{5}{2}$, 即 $a_1 q^3(1 + q^2) = \frac{5}{2}$ ②

将①代入②,可得: $q = \frac{1}{2}$,回代入①,解得: $a_1 = 16$,于是 $S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{16(1 - \frac{1}{32})}{\frac{1}{2}} = 31$.

故选：B.

4. C

【分析】

根据题意，结合排列组合的知识，先分组再分配，即可得到结果.

【详解】由题意得，先将5名志愿者分成3组，只有2,2,1一种情况，

$$\text{即 } \frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2} = 15 \text{ 种分组方法,}$$

再将3组志愿者分配给3为位老人，则共有 $15A_3^3 = 90$ 种安排方法.

故选：C

5. C

【分析】

根据给定条件，结合图象求出 $f(x)$ 的解析式，再借助正弦函数的图象性质逐项判断得解.

【详解】函数 $f(x)$ 的周期 $T = 4(\frac{5}{2} - 1) = 6$ ，即 $\frac{2\pi}{\omega} = 6$ ，解得 $\omega = \frac{\pi}{3}$ ，

由 $f(1) = A$ ，得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则 $k = 0, \varphi = \frac{\pi}{6}$ ， $f(x) = A \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$ ，

则点 $N(0, \frac{1}{2}A)$ ，由 $NM \perp NP$ ，得 $NP^2 + MN^2 = MP^2$ ，即 $1 + \frac{1}{4}A^2 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}A^2 = \frac{9}{4} + A^2$ ，

解得 $A = \sqrt{10}$ ，因此 $f(x) = \sqrt{10} \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$ ，

对于 A，由 $f(4) = -\sqrt{10}$ ，得函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 4$ 对称，则 $f(5) = f(2)$ ，

由图象知，函数 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递减，则 $f(2) > f(\pi)$ ，因此 $f(\pi) < f(5)$ ，A 错误；

对于 B，由于函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 4$ 对称，且在 $[1, 4]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(4, 7)$ 上单调递增，B 错误；

对于 C，由 $f(x) = \frac{\sqrt{30}}{2}$ ，得 $\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}$ ，

$\frac{\pi}{3}x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}$ ，两式相减得 $\frac{\pi}{3}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} + 2(k_2 - k_1)\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ，

即 $x_2 - x_1 = 1 + 6(k_2 - k_1), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ，所以 $|x_2 - x_1|_{\min} = 1$ ，C 正确；

对于 D，把 $y = \sqrt{10} \sin \frac{\pi}{3}x$ 图象向左平移 1 个单位长度，得

$y = \sqrt{10} \sin \frac{\pi}{3}(x+1) = \sqrt{10} \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}) \neq f(x)$ ，D 错误.

故选：C

6. B

【分析】

设出直线方程，联立直线和抛物线方程消元后利用韦达定理得到坐标之间的关系式，结合条件 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ，解出即可。

【详解】由题知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1,0)$ ，

则直线方程为 $y = k(x-1)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-1) \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得 } ky^2 - 4y - 4k = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$ ， $y_1 y_2 = -4$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{y_1 + y_2}{k} + 2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} = 1,$$

又因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ，

$$\text{所以 } (x_1 + 1, y_1 - 1) \cdot (x_2 + 1, y_2 - 1)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } 1 + \frac{2k^2 + 4}{k^2} + 1 - 4 - \frac{4}{k} + 1 = 0,$$

解得 $k = 2$ ，

故选：B.

7. D

【分析】

经行列式运算后，得到关系式 $xf(x) - yf(y) = 0$ ，将 y 替换为 1 代入，进而得到函数 $f(x)$ 的解析式，逐项判断即可。

$$\text{【详解】 由于 } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ 则 } \begin{vmatrix} x & f(y) \\ y & f(x) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{即为: } xf(x) - yf(y) = 0 \quad (*),$$

将 y 替换为 1 代入 (*) 式，得 $xf(x) - f(1) = 0$ ，且 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

$$\text{得: } f(x) = \frac{f(1)}{x},$$

对于 A, 取 $f(x) = -\frac{1}{x}$, 显然满足 (*) 式, 此时 $f(1) = -1$, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

则 $f(-x) = \frac{f(1)}{-x} = -\frac{f(1)}{x} = -f(x)$ 成立,

所以 $f(x)$ 是奇函数, 故 B 错误;

对于 C, 假设非零常数 T 为函数 $f(x)$ 的周期, 即 $f(x+T) = f(x)$,

则 $f(x+T) = \frac{f(1)}{x+T} = \frac{f(1)}{x} = f(x)$, 其中 $f(1) \neq 0$,

即得 $x+T = x$, $T = 0$, 这与假设 T 为非零常数矛盾,

所以 $f(x)$ 不是周期函数, 故 C 错误;

对于 D, 由于 $f(x) = \frac{f(1)}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{f(1)}{x^2}$, 显然 $f'(x) = 0$ 没有实数解,

所以 $f(x)$ 没有极值点, 故 D 正确;

故选: D.

8. B

【分析】根据条件可知点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆, 其方程为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$, 作 $CD \perp AB$, 则 D 为 AB 的中点, 求得 $|\overline{PD}|$ 最小值即可.

【详解】因为直线 $l_1: mx - y - 5m + 1 = 0$, $l_2: x + my - 5m - 1 = 0$,

则 $l_1 \perp l_2$,

又 l_1 的方程可化为 $m(x-5) - y + 1 = 0$, 所以过定点 $M(5, 1)$,

l_2 的方程可化为 $m(y-5) + x - 1 = 0$, 所以过定点 $N(1, 5)$,

所以点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆,

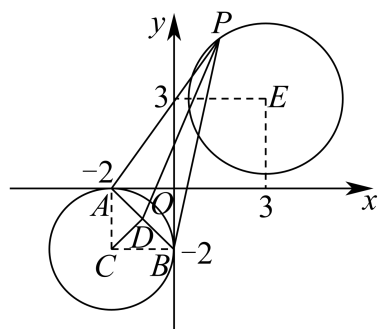
其方程为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$,

其圆心 $E(3, 3)$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$,

作 $CD \perp AB$, 则 D 为 AB 的中点,

根据勾股定理易求得 $|CD| = \sqrt{2}$,

如图所示, 当 C, E, P 在同一条直线上时 $|\overline{PD}|$ 最小,



$$\text{又 } |\overline{PA} + \overline{PB}| = 2|\overline{PD}|,$$

$$|\overline{PD}|_{\min} = |CE| - |CD| - r = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

故 $|\overline{PA} + \overline{PB}| = 2|\overline{PD}|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$,

故选: B.

9. AD

【分析】

由百分数的计算公式即可判断 A, 由古典概型的概率计算公式即可判断 B, 由二项分布的方差计算公式以及方差的性质即可判断 C, 由正态曲线的性质即可判断 D

【详解】对于 A, 将数据按照从小到大的顺序排列为 20, 22, 22, 22, 24, 26, 28, 32, 36, 78,

且 $10 \times 80\% = 8$, 所以第 80 百分位数为 $\frac{32+36}{2} = 34$, 故 A 正确;

对于 B, 用简单随机抽样的方法从 51 个个体中抽取 2 个个体, 则每个个体被抽到的概率都是 $\frac{2}{51}$, 故 B 错误;

对于 C, 因为随机变量 $\xi \sim B\left(8, \frac{3}{4}\right)$, 则 $D(\xi) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$,

又 $\eta = 2\xi + 1$, 则 $D(\eta) = 4D(\xi) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$, 故 C 错误;

对于 D, 因为随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 所以正态曲线的对称轴为 $X = 2$,

又 $P(x > 1) = 0.68$, 则 $P(X > 3) = P(X < 1) = 1 - 0.68 = 0.32$,

所以 $P(2 \leq x < 3) = 0.5 - 0.32 = 0.18$, 故 D 正确;

故选: AD

10. BD

【分析】

确定函数定义域，结合导数判断其单调性，可判断 A；作出函数图象，数形结合，判断 B；结合函数解析式可得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ，即可判断 C；将 $f(a)=\frac{e^b+1}{e^b-1}-b$ 化简变形得到 $f(a)=f\left(\frac{1}{e^b}\right)$ ，结合函数单调性推出 $a=\frac{1}{e^b}$ ，即可判断 D。

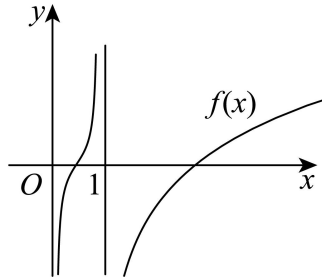
【详解】

对于 A，函数 $f(x)=\ln x-1-\frac{2}{x-1}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ，

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$ ，则 $f(x)$ 在 $(0,1),(1,+\infty)$ 上均单调递增，

由于函数图象在 $x=1$ 处不连续，故不能说 $f(x)$ 在定义域上是增函数，A 错误；

对于 B，结合函数的单调性，作出函数 $f(x)=\ln x-1-\frac{2}{x-1}$ 的大致图象，



结合图象可知 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} ，B 正确；

对于 C，由于 $f(x)=\ln x-1-\frac{2}{x-1}$ ，故 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}-1-\frac{2}{\frac{1}{x}-1}=-\ln x-1+\frac{2x}{x-1}$ ，

故 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=-2-\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x-1}=-2+\frac{2(x-1)}{x-1}=0$ ，

故 $f(\log_{2023}2024)+f(\log_{2024}2023)=f(\log_{2023}2024)+f\left(\frac{1}{\log_{2023}2024}\right)=0$ ，C 错误；

对于 D，由题意知 $f(a)=\ln a-1-\frac{2}{a-1}$ ，

又 $f(a)=\frac{e^b+1}{e^b-1}-b=1+\frac{2}{e^b-1}-\ln e^b=\ln\frac{1}{e^b}-1-\frac{2}{\frac{1}{e^b}-1}$ ，即 $f(a)=f\left(\frac{1}{e^b}\right)$

而 $a\in(0,1)$ ， $b\in(0,+\infty)$ ，故 $\frac{1}{e^b}\in(0,1)$ ，结合 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

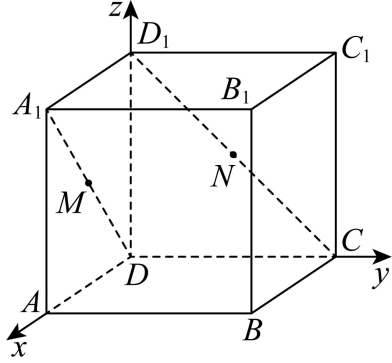
可得 $a=\frac{1}{e^b}$ ， $\therefore ae^b=1$ ，D 正确，

故选：BD

11. ABC

【分析】建立空间直角坐标系利用坐标法可判断 AB；转化为平面中距离最短问题判断 C；利用平面性质作出截面判断 D.

【详解】以 D 为坐标原点，以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), D(0, 0, 0), A_1(2, 0, 2), B_1(2, 2, 2), C_1(0, 2, 2), D_1(0, 0, 2)$,

因为 $\overline{A_1M} = \lambda \overline{A_1D}$, $\overline{D_1N} = \mu \overline{D_1C}$, $\lambda, \mu \in (0, 1)$, 所以 $M(2-2\lambda, 0, 2-2\lambda), N(0, 2\mu, 2-2\mu)$,

对于 A, $\overline{DM} = (2-2\lambda, 0, 2-2\lambda), \overline{DN} = (0, 2\mu, 2-2\mu)$, $\overline{BD_1} = (-2, -2, 2)$,

若 $BD_1 \perp$ 平面 DMN , 则 $BD_1 \perp DM, BD_1 \perp DN$,

所以 $\overline{DM} \cdot \overline{BD_1} = (2-2\lambda) \times (-2) + 0 \times (-2) + (2-2\lambda) \times 2 = 0$ 恒成立,

$\overline{DN} \cdot \overline{BD_1} = 0 \times (-2) + 2\mu \times (-2) + (2-2\mu) \times 2 = 0$, 解得 $\mu = \frac{1}{2}$,

故当且仅当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $BD_1 \perp$ 平面 DMN , 正确;

对于 B, 当 $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$ 时, $M\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right), N\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overline{MN} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$,

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AA_1 \perp BD$,

又 $BD \perp AC$, $AA_1 \cap AC = A$, $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $DB \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $\overline{DB} = (2, 2, 0)$ 为平面 ACC_1A_1 的一个法向量,

因为 $\overline{MN} \cdot \overline{DB} = \left(-\frac{4}{3}\right) \times 2 + \frac{4}{3} \times 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 0$, 所以 $\overline{MN} \perp \overline{DB}$,

又 $MN \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_1 , 正确;

对于 C, 将平面 ADD_1A_1 和平面 BCD_1A_1 展开成一个平面, 连接 A_1N , 如图,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/955332013212011130>