专题06 因式分解法解一元二次方程及根与系数的关系

聚焦考点

考点一 因式分解法解一元二次方程　　考点二 十字相乘法解一元二次方程

考点三 换元法解一元二次方程　　考点四 已知一元二次方程的解求另一个解

考点五 根据一元二次方程的根与系数的关系求参数与代数式的值

考点六 一元二次方程根的判别式与根与系数的综合问题

典型例题

考点一 因式分解法解一元二次方程

例题：（2022·四川成都·九年级期末）解下列一元二次方程．

(1)$x^2-4x=5$；　　(2)$2(x+1)^2=x(x+1)$．

【答案】(1) $x_1=5, x_2=-1$

(2) $x_1=-1, x_2=-2$

【解析】

【分析】

（1）通过移项，分解因式，化为一元一次方程，即可求解；

（2）通过移项，分解因式，化为一元一次方程，即可求解．

(1)

解：$x^2-4x=5$，

移项得：$x^2-4x-5=0$，

分解因式得：$(x-5)(x+1)=0$，

∴$x-5=0$ 或 $x+1=0$，

解得：$x_1=5, x_2=-1$；

(2)

解：$2(x+1)^2=x(x+1)$，

移项得：$2(x+1)^2-x(x+1)=0$，

分解因式得：$(x+1)(2x+2-x)=0$，

∴$x+1=0$ 或 $2x+2-x=0$，

解得：$x_1=-1,x_2=-2$.

【点睛】

本题主要考查解一元二次方程，掌握因式分解法解方程，是解题的关键.

【变式训练】

1.（2022·江苏·苏州草桥中学八年级期中）解方程：

(1) $x^2-9=0$；

(2)（$(2x+1)^2=3(2x+1)$

【答案】(1) $x=3$ 或 $x=-3$；

(2) $x_1=-\frac{1}{2},x_2=1$

【解析】

【分析】

（1）运用公式法解一元二次方程即可；

（2）运用公式法解一元二次方程即可；

(1)

$\because x^2-9=0$

$\therefore (x+3)(x-3)=0$

解得：$x=3$ 或 $x=-3$；

(2)

$(2x+1)^2-3(2x+1)=0$，

$(2x+1)(2x+1-3)=0$，

$2x+1=0$ 或 $2x+1-3=0$，

解得 $x_1=-\frac{1}{2},x_2=1$；

【点睛】

本题主要考查了解一元二次方程，掌握运用公式法解一元二次方程是解答本题的关键.

2.（2022·黑龙江·哈尔滨市第六十九中学校八年级期中）解下列方程：

(1) $3x^2-2=5x$

(2) $4(x-3)^2+x(x-3)=0$

【答案】(1) $x_1=-\frac{1}{3}$， $x_2=2$

(2) $x_1=3$， $x_2=\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】

（1）利用因式分解法解方程；

（2）利用因式分解法解方程．

(1)

解： $3x^2-2=5x$

$3x^2-5x-2=0$

$(3x+1)(x-2)=0$

$\therefore x_1=-\frac{1}{3}$， $x_2=2$

(2)

$4(x-3)^2+x(x-3)=0$

$(x-3)[4(x-3)+x]=0$

$(x-3)(5x-12)=0$

$\therefore x_1=3$， $x_2=\frac{12}{5}$

【点睛】

本题考查了解一元二次方程-因式分解法，因式分解是解本题的关键．

考点二 十字相乘法解一元二次方程

例题：（2022·江苏·苏州草桥中学八年级期中）解方程：

(1) $2x^2-x-3=0$．　　　　(2) $x^2-7x+10=0$

【答案】(1) $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$

(2) $x_1=2,x_2=5$

【解析】

【分析】

（1）运用十字相乘法解一元二次方程.

（2）运用十字相乘法解一元二次方程.

(1)

$\because 2x^2-x-3=0$

$\therefore (2x-3)(x+1)=0$，

解得：$x=\frac{3}{2}$或$x=-1$.

(2)

（x-2）（x-5）=0，

x-2=0 或 x-5=0，

解得 x_1=2，x_2=5.

【点睛】

本题主要考查了解一元二次方程，掌握运用十字相乘法解一元二次方程是解答本题的关键.

【变式训练】

1.（2022·全国·九年级）解一元二次方程：$x^2+2x-3=0$.

【答案】$x_1=1$，$x_2=-3$

【解析】

【分析】

利用十字相乘法因式分解法求解即可.

$x^2+2x-3=0$，

$\therefore (x-1)(x+3)=0$，

$\therefore x-1=0$或$x+3=0$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=-3$.

【点睛】

本题主要考查解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

2.（2021·江苏·扬州市江都区实验初级中学一模）解方程：$x^2+5x-24=0$；

【答案】$x_1=-8$，$x_2=3$

【解析】

【分析】

利用十字相乘法因式分解法求解即可；

【详解】

$(x+8)(x-3)=0$，

$x+8=0$或$x-3=0$，

所以$x_1=-8$，$x_2=3$；

【点睛】

本题考查了解一元二次方程－因式分解法：因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法，这种方法简便易用，是解一元二次方程最常用的方法．

3．（2022·全国·九年级）用因式分解法解方程：x^2-10x+16=0

【答案】x_1=2，x_2=8

【解析】

【分析】

利用因式分解方法求解即可．

【详解】

解：x^2-10x+16=0，

因式分解得，(x-2)(x-8)=0，

由此得：x-2=0，x-8=0，

解得：x_1=2，x_2=8．

【点睛】

本题考查了一元二次方程的解法．解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，解题的关键是根据题目要求选取相应的方法求解．

考点三 换元法解一元二次方程

例题：（2022·江苏南京·二模）若关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的解是$x_1=3$，$x_2=-5$，则关于y的方程

$a(y+1)^2+b(y+1)+c=0$的解是（　　）

A．$y_1=4$，$y_2=-4$　　　　B．$y_1=2$，$y_2=-6$

C．$y_1=4$，$y_2=-6$　　　　D．$y_1=2$，$y_2=-4$

【答案】B

【解析】

【分析】

设 $t=y+1$，则原方程可化为 $at^2+bt+c=0$，根据关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=-5$，得到 $t_1=3$，$t_2=-5$，于是得到结论．

【详解】

解：设 $t=y+1$，

则原方程可化为 $at^2+bt+c=0$，

∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=-5$，

∴$t_1=3$，$t_2=-5$，

∴$y+1=3$ 或 $y+1=-5$，

解得 $y_1=2$，$y_2=-6$．

故选：B．

【点睛】

此题主要考查了换元法解一元二次方程，关键是正确找出两个方程解的关系．

【变式训练】

1．（2022·湖南邵阳·九年级期末）请你先认真阅读下列材料，再参照例子解答问题：

已知$(x+y-3)(x+y+4)=-10$，求$x+y$的值．

解：设$t=x+y$，则原方程变形为$(t-3)(t+4)=-10$，

即$t^2+t-2=0$

$\therefore(t+2)(t-1)=0$

得 $t_1=-2$，$t_2=1$

$\therefore x+y=-2$或$x+y=1$

已知$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+2)=7$，求x^2+y^2的值．

【答案】5

【解析】

【分析】

先换元，再求出 t 的值，最后求出答案即可.

【详解】

解：设 $t=x^2+y^2\geq0$

$\therefore(t-4)(t+2)=7$

即 $t^2-2t-15=0$，

$\therefore(t-5)(t+3)=0$，

解得：$t_1=5$，$t_2=-3$（舍去）

$\therefore x^2+y^2=5$

即 x^2+y^2 的值为 5.

【点睛】

本题考查了解一元二次方程，能够正确换元是解此题的关键.

2.（2022·四川泸州·一模）请阅读下列材料：

解方程：$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$.

解法如下：

将 x^2-1 视为一个整体，然后设 $x^2-1=y$，则 $(x^2-1)^2=y^2$，

原方程可化为 $y^2-5y+4=0$，

解得 $y_1=1$，$y_2=4$.

（1）当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$；

（2）当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$，解得 $x=\pm\sqrt{5}$.

综合（1）（2），可得原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

参照以上解法，方程 $x^4-x^2-6=0$ 的解为 ______.

【答案】$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

仿照范例，可以设 $x^2=y$，则原方程化为一元二次方程：$y^2-y-6=0$，先解出 y 的值，再进一步解出 x 的值.

【详解】

解：设 $x^2=y$，则原方程可化为： $y^2-y-6=0$，

解得：$y_1=3$，$y_2=-2$，

（1）当 $y=3$ 时，$x^2=3$，解得 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$，

（2）当 $y=-2$．时，$x^2=-2$，此方程无实数根，

综合（1）（2），可得原方程的解是：$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$，

故答案为：$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$

【点睛】

本题主要考查换元法在解一元二次方程中的应用．解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化，这叫换元法．换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理．

考点四 已知一元二次方程的解求另一个解

例题：（2022·陕西·西安铁一中分校三模）若关于 x 的方程 $x^2-5x+a=0$ 有一个根是 2，则另一个根是（　　）

A．6　　*B*．3　　*C*．-3　　*D*．-7

【答案】*B*

【解析】

【分析】

由根和系数的关系即可求得方程的另一个根．

【详解】

解：设另一个根为 m，由根和系数的关系有：$2+m=5$

解得 $m=3$

故选：*B*．

【点睛】

本题考查一元二次方程根和系数的关系，熟练掌握相关知识是解题的关键．

【变式训练】

1．（2022·江苏南京·二模）关于 x 的方程 $x^2+bx-2=0$ 有一个根是 1，则方程的另一个根是______．

【答案】-2

【解析】

【分析】

设方程的另一个根为 t，根据根与系数的关系得到 $1\times t=-2$，然后解一次方程即可．

【详解】

解：设方程的另一个根为 t，

根据题意得 $1\times t=-2$，解得 $t=-2$．

故答案为：-2．

【点睛】

本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

2．（2022·四川成都·二模）已知关于 x 的方程 $x^2+3x+m=0$ 的一个根是 1，则此方程的另一个根为 _____．

【答案】-4

【解析】

【分析】

设该方程的两根为 x_1，x_2，根据一元二次方程根与系数的关系，求出两根之和，结合已知关于 x 的方程 $x^2+3x+m=0$ 的一个根是 1″，即可得到答案．

【详解】

设该方程的两根为 x_1，x_2，

则 $x_1+x_2=-3$，

∵该方程的一个根为 1，

∴另一个根为：$-3-1=-4$，

故答案为：-4．

【点睛】

本题考查了根与系数的关系，一元二次方程的解，正确掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键．

考点五 根据一元二次方程的根与系数的关系求参数与代数式的值

例题 1：（2022·江苏南京·模拟预测）已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x-4m=0$ 的两个实数根是 x_1, x_2，且 $x_1+x_2=4$，则 m 的值为__．

【答案】-1

【解析】

【分析】

根据根与系数的关系得出 $x_1+x_2=-2(m-1)=4$，再解方程即可．

【详解】

解：∵关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x-4m=0$ 的两个实数根是 x_1 和 x_2，且 $x_1+x_2=4$，

∴由根与系数的关系得：$x_1+x_2=-2(m-1)=4$，

解得：$m=-1$，

故答案为：-1．

【点睛】

本题考查了一元二次方程根与系数的关系，能熟记根与系数的关系的内容是解此题的关键．

例题 2：（2022·江西南昌·二模）若一元二次方程 $x^2-3x-2=0$ 的两个实数根为 a，b，则 $a-ab+b$ 的值为________．

【答案】5

【解析】

【分析】

先根据根与系数的关系得到 $a+b=3, ab=-2,$ 然后利用整体代入的方法计算．

【详解】

解：根据题意得 $a+b=3, ab=-2,$

$a-ab+b=a+b-ab=3-(-2)=5.$

故答案为：5.

【点睛】

本题考查了根与系数的关系．解题的关键在于熟练掌握根与系数的关系，若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根时，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

【变式训练】

1．（2022·四川泸州·中考真题）已知关于 x 的方程 $x^2-(2m-1)x+m^2=0$ 的两实数根为 x_1，x_2，若 $(x_1+1)(x_2+1)=3$，则 m 的值为（　　）

A．-3　　B．-1　　C．-3 或 3　　D．-1 或 3

【答案】A

【解析】

【分析】

利用根与系数的关系以及$\Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant 0$求解即可.

【详解】

解：由题意可知：$\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\x_1\cdot x_2=m^2\end{cases}$，且$\Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant 0$

$\because (x_1+1)(x_2+1)=x_1\cdot x_2+x_1+x_2+1=3$，

$\therefore m^2+(2m-1)+1=3$，解得：$m=-3$或$m=1$，

$\because \Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant 0$，即$m\leq\frac{1}{4}$，

$\therefore m=-3$，

故选：A

【点睛】

本题考查根与系数的关系以及根据方程根的情况确定参数范围，解题的关键是求出$m\leq\frac{1}{4}$，再利用根与系数的关系求出$m=-3$或$m=1$（舍去）.

2．（2022·贵州六盘水·九年级期末）若a，b是关于x的方程$x^2-2x-2022=0$的两个实数根，则$a^2-3a-b=$____.

【答案】2020

【解析】

【分析】

由a，b是关于x的方程$x^2-2x-2022=0$的两个实数根得，$a^2-2a=2022$，$a+b=2$，再整理代数式即可求得答案.

【详解】

解：Q a，b是$x^2-2x-2022=0$的两个实数根，

$\therefore a^2-2a-2022=0$，$a+b=2$,

即$a^2-2a=2022$，

$\therefore a^2-3a-b=a^2-2a-(a+b)=2022-2=2020$，

故答案为：2020．

【点睛】

本题考查了根与系数的关系及一元二次方程的解，根据一元二次方程的解及根与系数的关系找出$a^2-2a=2022$，$a+b=2$是解题的关键．

3．（2022·四川泸州·二模）已知x_1,x_2是关于x的一元二次方程$x^2-2ax+a^2-2a-3=0$两个实数根，且$x_1^2+x_2^2=22$，则a=______．

【答案】2

【解析】

【分析】

先根据一元二次方程根的判别式可得$a\ge -\frac{3}{2}$，再根据一元二次方程的根与系数的关系可得x_1+x_2,x_1x_2，然后根据$x_1^2+x_2^2=22$建立方程，解方程即可得．

【详解】

解：由题意，此方程根的判别式$\Delta=4a^2-4(a^2-2a-3)\ge 0$，

解得$a\ge -\frac{3}{2}$，

$\because x_1,x_2$是关于x的一元二次方程$x^2-2ax+a^2-2a-3=0$两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{-2a}{1}=2a,x_1x_2=a^2-2a-3$，

$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2a^2+4a+6$，

$\because x_1^2+x_2^2=22$，

$\therefore 2a^2+4a+6=22$，

解得$a=2$或$a=-4<-\frac{3}{2}$（舍去），

故答案为：2．

【点睛】

本题考查了一元二次方程根的判别式、根与系数的关系、解一元二次方程等知识点，熟练掌握一元二次方程的根与系数的关系是解题关键．

考点六 一元二次方程根的判别式与根与系数的综合问题

例题：（2022年四川省南充市中考数学试卷）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+k-2=0$ 有实数根．

(1)求实数 k 的取值范围．

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，若 $(x_1+1)(x_2+1)=-1$，求 k 的值．

【答案】(1) $k\le\frac{17}{4}$；

(2) $k=3$

【解析】

【分析】

根据一元二次方程有实数根得到 $3^2-4(k-2)\ge 0$，解不等式即可；

（2）根据根与系数的关系得到 $x_1+x_2=-3, x_1x_2=k-2$，将等式左侧展开代入计算即可得到 k 值．

(1)

解：∵一元二次方程 $x^2+3x+k-2=0$ 有实数根．

∴$\Delta\ge 0$，即 $3^2-4(k-2)\ge 0$，

解得 $k\le\frac{17}{4}$

(2)

∵方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，

∴$x_1+x_2=-3, x_1x_2=k-2$，

∵$(x_1+1)(x_2+1)=-1$，

∴$x_1x_2+x_1+x_2+1=-1$，

∴$k-2-3+1=-1$，

解得 $k=3$．

【点睛】

此题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程根与系数的关系式，熟练掌握一元二次方程有关知识是解题的关键．

【变式训练】

1．（2022·湖南·双牌县教育研究室模拟预测）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+2m-1=0$ 有 x_1，x_2 两个实数根．

(1)求 m 的取值范围；

(2)若$x_1=1$，求x_2及m的值；

(3)是否存在实数m，满足$m\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)=-9$？若存在，求出实数$m$的值？若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $m\le 5$

(2) $x_2=5$； $m=3$

(3)存在；3或$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

（1）根据方程有两个实数根，得到根的判别式大于等于0，求出m的范围即可；

（2）利用根与系数的关系求出两根之和，把x_1的值代入计算求出x_2，进而求出m的值即可；

（3）利用根与系数的关系表示出两根之和与两根之积，代入已知等式计算，判断即可.

(1)

解：∵关于x的一元二次方程$x^2-6x+2m-1=0$有x_1，x_2两个实数根，

$\therefore \Delta=(-6)^2-4(2m-1)\ge 0$，

解得$m\le 5$；

(2)

解：$\because x_1+x_2=6$，$x_1=1$，$x_1x_2=2m-1$，

$\therefore x_2=5$，

$\therefore 1\times 5=2m-1$，

解得$m=3$；

(3)

解：存在，理由如下：$\because x_1+x_2=6$，$x_1x_2=2m-1$，$m\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)=-9$，

$\therefore m\left[\left(x_1x_2\right)-2\left(x_1+x_2\right)+4\right]=-9$，

$\therefore m\left[(2m-1)-12+4\right]=-9$，

整理得$2m^2-9m+9=0$，

$\because \Delta=(-9)^2-4\times 2\times 9=81-72=9>0$，

$\therefore m=\frac{9\pm 3}{4}$，

解得 $m_1=3$， $m_2=\frac{3}{2}$．

【点睛】

此题考查了根与系数的关系，以及根的判别式，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系及根的判别式意义是解本题的关键．

2．（2022·湖北荆门·一模）已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2-(3a+1)x+2a+1=0$ ．

(1)求证：无论 a 为任何非零实数，此方程总有两个实数根；

(2)若该方程的两个实数根分别为 x_1、 x_2，且 $x_2-x_1=2$，求 a 的值．

【答案】(1)见解析；

(2) $a_1=1$， $a_2=-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】

（1）利用一元二次方程根的判别式判断即可；

（2）利用一元二次方程根与系数的关系，结合完全平方公式的变形求值即可．

(1)

解：∵一元二次方程 $ax^2-(3a+1)x+2a+1=0$，

$\Delta=(3a+1)^2-4a(2a+1)$，

$=a^2+2a+1$

$=(a+1)^2\geqslant 0$

∴无论 a 为任何非零实数，此方程总有两个实数根；

(2)

解：依题意得， $x_1+x_2=\frac{3a+1}{a}$， $x_1x_2=\frac{2a+1}{a}$，

∵ $x_2-x_1=2$，∴ $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$，

∴ $(\frac{3a+1}{a})^2-\frac{4(2a+1)}{a}=4$， 即 $3a^2-2a-1=0$，

（$3a$+1）（a-1）=0，

解得 $a_1=1$， $a_2=-\frac{1}{3}$；

【点睛】