



# 第三章 工业机器人运动学-2



# 主要内容

- ◆ 数学基础——齐次坐标变换
- ◆ 机器人运动学方程的建立（正运动学）
- ◆ 机器人逆运动学分析



## 二、运动学方程的建立（运动学正问题）

- 2.1 引言
- 2.2 姿态描述
- 2.3 欧拉角
- 2.4 摇摆、俯仰和偏转
- 2.5 位置的确定
- 2.6 圆柱坐标
- 2.7 球坐标
- 2.8  $T_6$ 的说明
- 2.9 各种A矩阵的说明
- 2.10 根据A矩阵来确定 $T_6$
- 2.11 斯坦福机械手的运动方程
- 2.12 肘机械手的运动方程
- 2.13 小结

## 2.1 引言( Introduction )

本章，我们采用齐次变换来描述在各种坐标系中机械手的位置与方向。首先介绍各种正交坐标系的齐次变换。然后介绍在非正交关节坐标系中描述机械手末端的齐次变换。  
注意，对任何数目关节的各种机械手均可以这样进行。

描述一个连杆与下一个连杆之间关系的齐次变换称A矩阵。A矩阵是描述连杆坐标系之间的相对平移和旋转的齐次变换。

连续变换的若干A矩阵的积称为T矩阵，对于一个六连杆（六自由度）机械手有

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (2.1)$$

六连杆的机械手有六个自由度，其中三个自由度用来确定位置，三个自由度用来确定方向。 $T_6$ 表示机械手在基坐标中的位置与方向。则变换矩阵 $T_6$ 有下列元素

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

如图2.1所示，机器人的末端执行器（手爪）的姿态（方向）由  $n$ 、 $o$ 、 $a$  三个旋转矢量描述，其坐标位置由平移矢量  $p$  描述，这就构成了式（2.2）中的变换矩阵  $T$ 。

由于  $n$ 、 $o$ 、 $a$  三个旋转矢量是正交矢量，所以有

$$n = o \times a$$

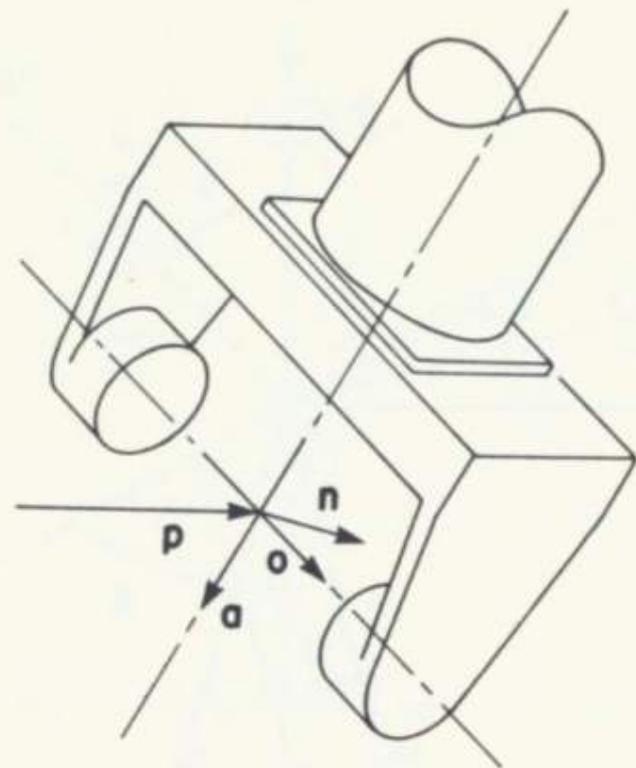


Figure 21.  $o$ ,  $a$ , and  $p$  Vectors

图2.1 末端执行器的描述

## 2.2 姿态描述( Specification of Orientation )

对式(2.2)中16个元素一一赋值就可确定 $T_6$ 。假定机械手可以到达要求的位置，而单位旋转矢量 $o$ 和 $a$ 正交，即

$$o \cdot o = 1 \quad (2.3)$$

$$a \cdot a = 1 \quad (2.4)$$

$$o \cdot a = 0 \quad (2.5)$$

$a$ 形成单位向量

$$a \leftarrow \frac{a}{|a|} \quad (2.6)$$

构成与 $o$ 和 $a$ 正交的 $n$

$$n \leftarrow o \times a \quad (2.7)$$

在 $o$ 和 $a$ 形成的平面上旋转 $o$ ，使得 $o$ 与 $n$ 和 $a$ 正交

$$o \leftarrow a \times n \quad (2.8)$$

单位向量 $o$ 是

$$o \leftarrow \frac{o}{|o|} \quad (2.9)$$

根据数学基础给出的一般性的旋转矩阵  $Rot(k, \theta)$ ，它把机械手末端的姿态规定为绕 $k$ 轴旋转 $\theta$ 角。



## 2.3 欧拉角( Euler Angles )

姿态变更常用绕x,y或z轴的一系列旋转来确定。欧拉角描述方法是：先绕z轴旋转 $\phi$ ，然后绕新的y(即 $y'$ )轴旋转 $\theta$ ，最后绕更新的z( $z''$ )轴旋转 $\psi$ （见图2.2）欧拉变换Euler( $\phi, \theta, \psi$ )可以通过连乘三个旋转矩阵来求得

$$\text{Euler}(\phi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \psi) \quad (2.10)$$

在一系列旋转中，旋转的次序是重要的。应注意，旋转序列如果按相反的顺序进行，则是绕基坐标中的轴旋转：绕z轴旋转 $\psi$ ，接着绕y轴旋转 $\theta$ ，最后再一次绕z轴旋转 $\phi$ ，结果如图2.3与图2.2是一致的。

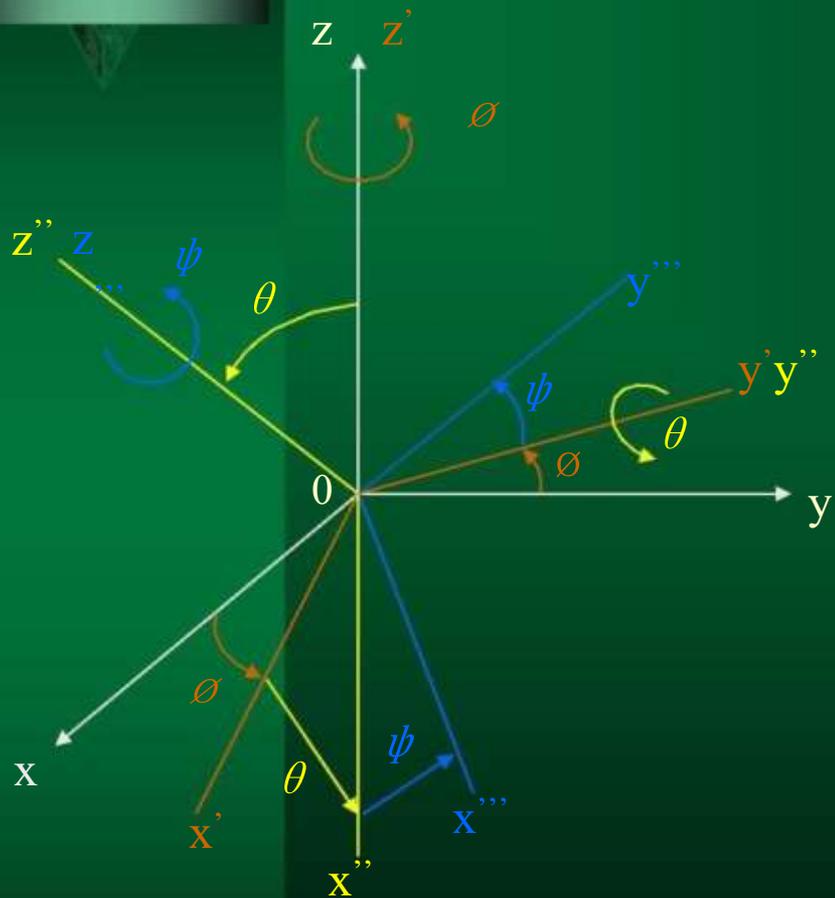


图2.2 欧拉角

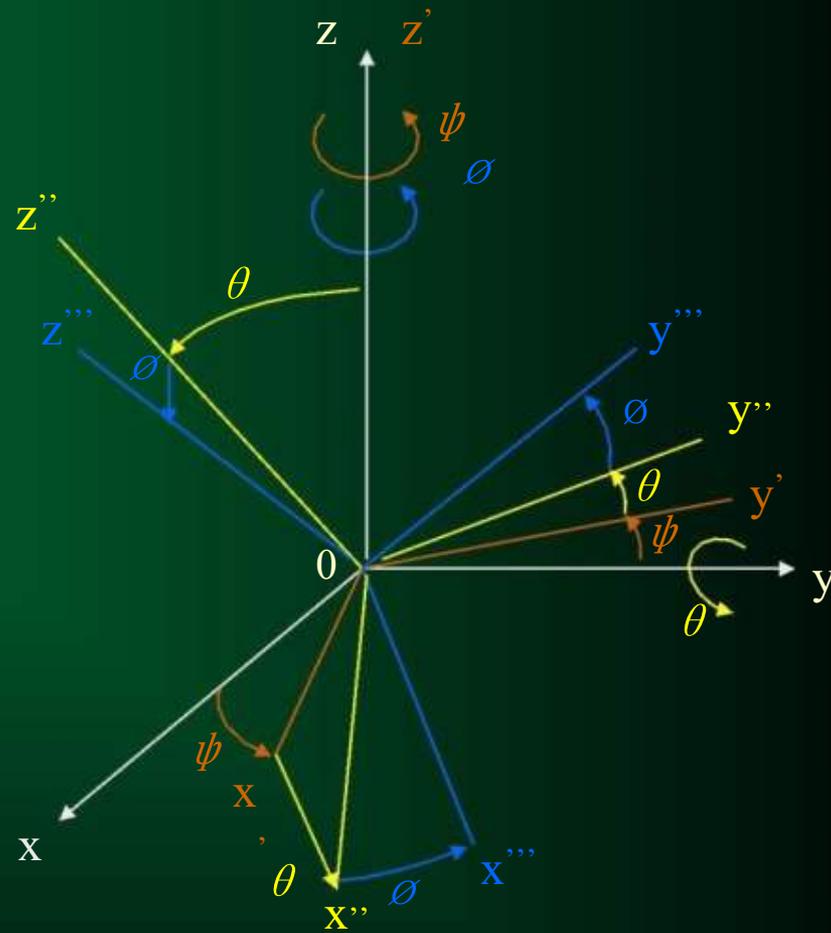


图2.3 基于基坐标的欧拉角

## 2.4 摇摆、俯仰和偏转( Roll, Pitch and Yaw )

摇摆、俯仰和偏转为另一种旋转。如图2.4所示，就像水中航行的一条小船一样，绕着它前进的方向（z轴）旋转  $\varphi$  称为摇摆，绕着它的横向中轴（y轴）旋转  $\theta$  称为俯仰，绕着它甲板的垂直向上的方向（x轴）旋转  $\psi$  称为偏转。借助于这种旋转来描述机械手的末端执行器如图3.5所示。规定旋转的次序为

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \varphi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi) \quad (2.12)$$

即，绕x轴旋转 $\psi$ ，接着绕y轴旋转 $\theta$ ，最后绕z轴旋转 $\varphi$ ，这个变换如下

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \varphi) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$



图2.4 摇摆、俯仰和偏转角

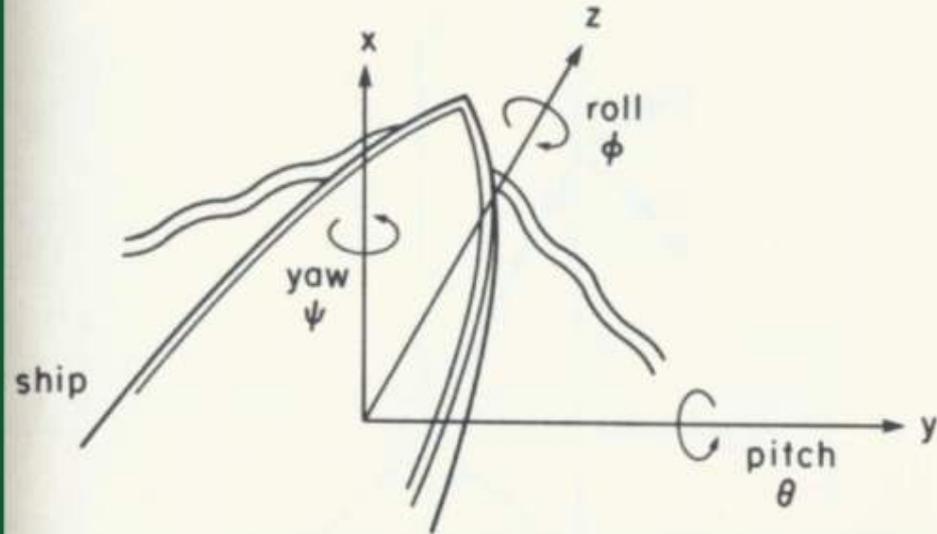


Figure 2.4. Roll, Pitch, and Yaw Angles

图2.5 机械手的末端执行器的摇摆、俯仰和偏转

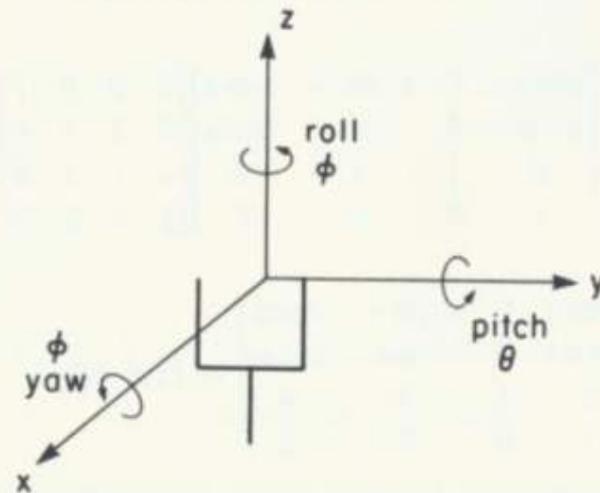


Figure 2.5. Roll, Pitch, and Yaw Coordinates for a Manipulator



$\text{RPY}(\varphi, \theta, \psi) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi & 0 \\ \sin\varphi \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\psi & \cos\theta \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$



## 2.5 位置的确定( Specification of Position )

一旦方向被确定之后，用一个相应的 $p$ 向量的位移变换可得到机器人末端执行器在基坐标中的位置：

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{旋转} \\ \text{变换} \\ \text{矩阵} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

## 2.6 圆柱坐标( Cylindrical Coordinates )

如图2.6所示，在圆柱坐标中确定机械手的位置是沿x轴平移r，接着绕z轴旋转 $\alpha$ ，最后沿着z轴平移z。

$$\text{Cyl}(z, \alpha, r) = \text{Trans}(0,0,z)\text{Rot}(z, \alpha) \text{Trans}(r,0,0)$$

$$\text{Cyl}(z, \alpha, r) = \text{Trans}(0,0,z) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\text{Cyl}(z, \alpha, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & r\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

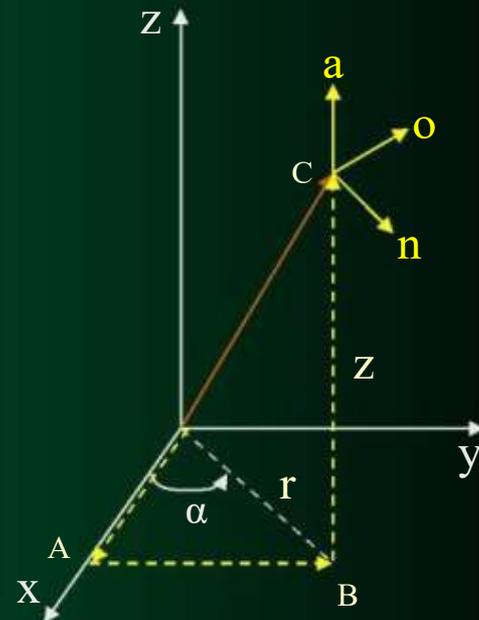


图2.6 圆柱坐标

注意：圆柱坐标只能绕z轴旋转



$$\text{Cyl}(z,\alpha,r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & r\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

如用一个绕z轴旋转 $-\alpha$ 的变换矩阵右乘式(2.19),结果如下

$$\text{Cyl}(z,\alpha,r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & r\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$\text{Cyl}(z,\alpha,r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & r\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\text{Cyl}(z,\alpha,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 & r\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

上式表明平移矢量未变,旋转矩阵为单位阵,此时末端坐标的姿态未变,而只是改变了它的空间位置。

## 2.7 球坐标( Spherical Coordinates )

如图2.7所示，用球坐标来确定位置向量的方法是：  
沿着z轴平移  $\gamma$ ，然后绕y轴旋转  $\beta$ ，最后绕z轴旋转  $\alpha$ 。

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Trans}(0, 0, \gamma) \quad (2.23)$$

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z, \alpha) \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

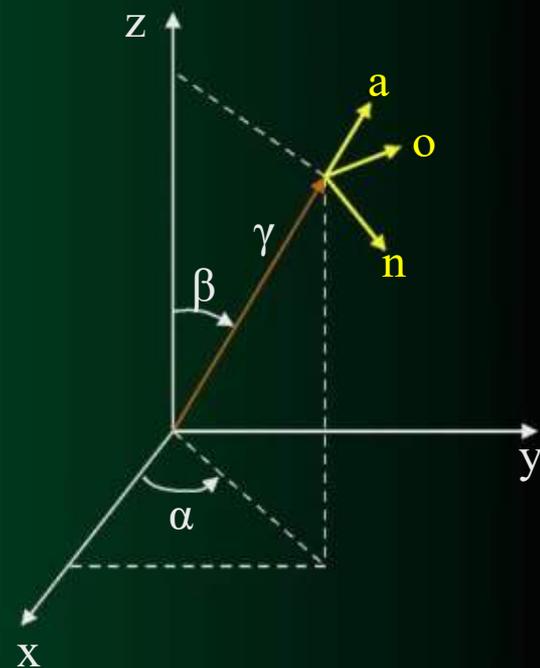


图2.7 球坐标



$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & r\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & r\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta & \gamma\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta & \gamma\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & \gamma\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

同样，如果不希望改变末端坐标的姿态，而只是改变其空间位置，我们可以用 $\text{Rot}(y, -\beta)$ 和 $\text{Rot}(z, -\alpha)$ 右乘式 (2.26)

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z, \alpha)\text{Rot}(y, \beta)\text{Trans}(0, 0, \gamma) \text{Rot}(y, -\beta) \text{Rot}(z, -\alpha) \quad (2.27)$$

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 & \gamma\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

## 2.7 $T_6$ 的确定 ( Specification of $T_6$ )

$T_6$  可以用旋转和平移的方法来确定。

$$T_6 = [\text{平移}][\text{旋转}] \quad (2.29)$$

表2.1 各种平移与旋转的表达式

[Translation]	Eqn	[Rotation]	Eqn
$p_x, p_y, p_z$		$o_x \ o_y \ o_z \ a_x \ a_y \ a_z$	
		Rot(k, $\theta$ )	2.32
Cyl( z, $\alpha$ , r )	2.22	Euler( $\phi, \theta, \psi$ )	2.11
Sph( $\alpha, \beta, \gamma$ )	2.26	RPY( $\phi, \theta, \psi$ )	2.12

我们已经研究过的各种平移与旋转的式子，总结在表2.1中。如果我们使用Cyl和Sph的非旋转的形式，那么矩阵积（2.29）仅仅是一个平移变换。

## 2.9 各种A矩阵的确定( Specification of matrices A )

现在考虑方程(2.1)右边各A矩阵的确定。串联杆型机械手是由一系列通过连杆与其活动关节连接在一起所组成。

如图2.8所示，任何一个连杆都可以用两个量来描述：一个是公共垂线距离 $a_n$ ，另一个是与 $a_n$ 垂直的平面上两个轴的夹角 $\alpha_n$ ，习惯上称 $a_n$ 为连杆长度， $\alpha_n$ 称为连杆的扭转角。

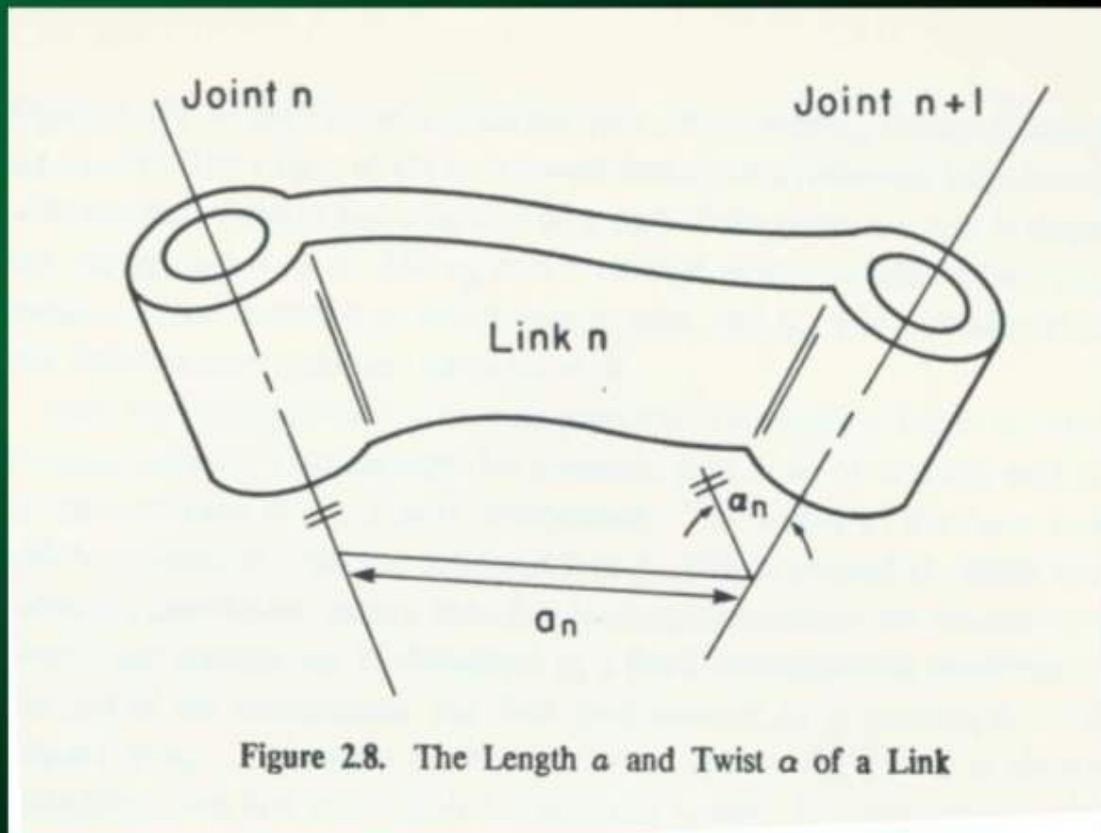


图2.8 连杆的长度与扭转角

如图2.9所示，在每个关节轴上有两个连杆与之相连，即关节轴有两个公垂线与之垂直，每一个连杆一个。两个相连的连杆的相对位置用 $d_n$ 和 $\theta_n$ 确定， $d_n$ 是沿着 $n$ 关节轴两个垂线的距离， $\theta_n$ 是在垂直这个关节轴的平面上两个被测垂线之间的夹角， $d_n$ 和 $\theta_n$ 分别称作连杆之间的距离及夹角。

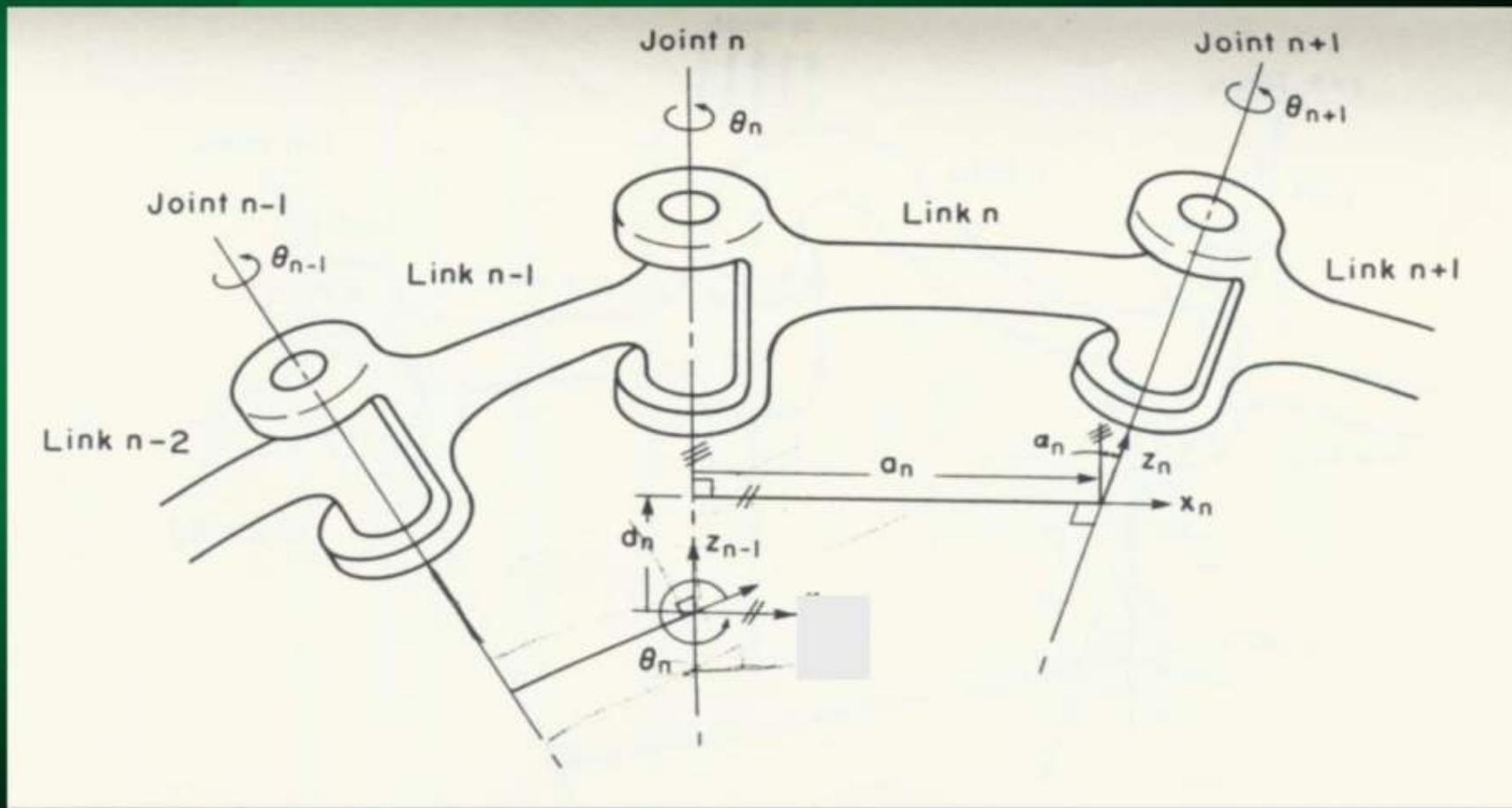


图2.9 连杆参数

表2.2 连杆参数

连杆本身的参数	连杆长度	$a_n$	连杆两个轴的公垂线距离 (x方向)
	连杆扭转角	$\alpha_n$	连杆两个轴的夹角 (x轴的扭转角)
连杆之间的参数	连杆之间的距离	$d_n$	相连两连杆公垂线距离 (z方向平移距)
	连杆之间的夹角	$\theta_n$	相连两连杆公垂线的夹角 (z轴旋转角)

为了描述连杆之间的关系，我们对每个连杆赋一个坐标系。

**转动关节：** 关节变量为 $\theta_n$ 。连杆n的坐标原点设在关节n和关节n+1轴之间的公共垂线与关节n+1轴的交点上。在关节轴相交的情况下（无公垂线），这个原点就在两个关节轴的相交点上（ $a_n=0$ ）。如果两个关节轴平行（有无数条公垂线），则原点的选择要使下一个连杆的关节距离为0（ $d_n=0$ ），连杆n的z轴与n+1关节轴在一条直线上。x轴与任何存在的公共垂线成一条直线，并且沿着这条垂线从n关节指向n+1关节。在相交关节的情况下，x轴的方向平行或者逆平行 $z_{n-1} \times z_n$ 的向量叉积，应该注意，这个条件对于沿着关节n和n+1之间垂线的x轴同样满足。当 $x_{n-1}$ 和 $x_n$ 平行，且有相同的指向时，则对于第n个转动关节 $\theta_n=0$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/956153234113010201>