2023年北京市石景山区高考数学一模试卷

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-2,1]$　　C．$[0,1]$　　D．$[0,2]$

2．在复平面内，复数z对应的点的坐标为（－2，－1），则$\frac{z}{i}=$（　　）

A．$-1-2i$　　B．$-2-i$　　C．$-1+2i$　　D．$2-i$

3．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的离心率是2，则$b=$（　　）

A．12　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

4．下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（　　）

A．$f(x)=\sin x$　　B．$f(x)=2^{|x|}$

C．$f(x)=x^3+x$　　D．$f(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$

5．设$x>0$，$y>0$，则“$x+y=2$”是“$xy\leqslant 1$”的（　　）

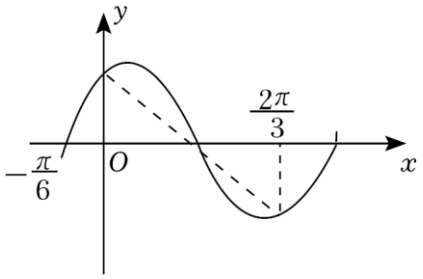
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知数列$\{a_n\}$满足：对任意的m，$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_ma_n=a_{m+n}$，且$a_2=3$，则$a_{10}=$（　　）

A．3^4　　B．3^5　　C．3^6　　D．3^{10}

7．若函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则φ的值是（　　）



A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{12}$

8．在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度v（单位：km/s）与燃料的质量M（单位：kg），火箭（除燃料外）的质量m（单位：kg）的函数关系是$v=2000\ln(1+\frac{M}{m})$．当燃料质量与火箭质量的比值为t_0时，火箭的最大速度可达到v_0km/s．若要使火箭的最大速度达到$2v_0km/s$，则燃料质量与火箭（除燃料外）质量的比值应为（　　）

A．$2t_0^2$　　B．$t_0^2+t_0$　　C．$2t_0$　　D．$t_0^2+2t_0$

9．已知直线 l：$kx-y-2k+2=0$ 被圆 C：$x^2+(y+1)^2=25$ 所截得的弦长为整数，则满足条件的直线 l 有（　　）

A．6 条　　B．7 条　　C．8 条　　D．9 条

10．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点，给出下列三个命题：

①若点 P 总满足 $PD_1\perp DC_1$，则动点 P 的轨迹是一条直线；

②若点 P 到直线 BB_1 与到平面 CDD_1C_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹是抛物线；

③若点 P 到直线 DD_1 的距离与到点 C 的距离之和为 2，则动点 P 的轨迹是椭圆．

其中正确的命题个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．向量$\vec{a}=(2sin\theta，cos\theta)$，$\vec{b}=(1，1)$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $\tan\theta=$_____．

12．抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点坐标为 _____，若抛物线 C 上一点 M 的纵坐标为 2，则点 M 到抛物线焦点的距离为_____．

13．若$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中含有常数项，则正整数 n 的一个取值为_____．

14．设函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x，x\le a\\-2x，x>a\end{cases}$．

①若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为_____；

②若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是_____．

15．项数为 k（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$）的有限数列$\{a_n\}$的各项均不小于 -1 的整数，满足$a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+a_3\cdot 2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot 2+a_k=0$，其中 $a_1\neq 0$．给出下列四个结论：

①若 $k=2$，则 $a_2=2$；

②若 $k=3$，则满足条件的数列$\{a_n\}$有 4 个；

③存在 $a_1=1$ 的数列$\{a_n\}$；

④所有满足条件的数列$\{a_n\}$中，首项相同．

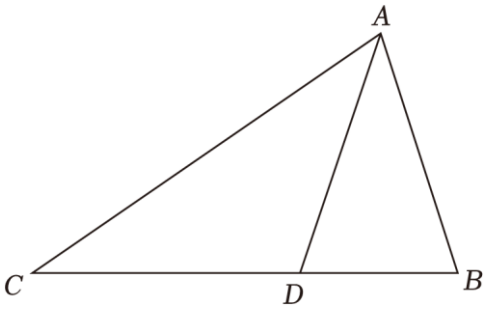
其中所有正确结论的序号是_____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（13 分）如图，在$\triangle ABC$ 中，$AC=4\sqrt{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，点 D 在边 BC 上，$\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$．

（Ⅰ）求 AD 的长；

（Ⅱ）若$\triangle ABD$ 的面积为$2\sqrt{2}$，求 AB 的长．



17.（13 分）某高校“植物营养学专业”学生将鸡冠花的株高增量作为研究对象，观察长效肥和缓释肥对农作物影响情况．其中长效肥、缓释肥、未施肥三种处理下的鸡冠花分别对应 1，2，3 三组．观察一段时间后，分别从 1，2，3 三组随机抽取 40 株鸡冠花作为样本，得到相应的株高增量数据整理如表．

株高增量（单位：厘米）	（4，7]	（7，10]	（10，13]	（13，16]
第 1 组鸡冠花株数	9	20	9	2
第 2 组鸡冠花株数	4	16	16	4
第 3 组鸡冠花株数	13	12	13	2

假设用频率估计概率，且所有鸡冠花生长情况相互独立．

（Ⅰ）从第 1 组所有鸡冠花中各随机选取 1 株，估计株高增量为（7，10]厘米的概率；

（Ⅱ）分别从第 1 组，第 2 组，第 3 组的所有鸡冠花中各随机选取 1 株，记这 3 株鸡冠花中恰有 X 株的株高增量为（7，10]厘米，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）用“$\xi_k=1$”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为（4，10]，“$\xi_k=0$”表示第 k 组鸡冠花的株高增量为（10，16]厘米，$k=1$，2，3，直接写出方差 $D(\xi_1)$，$D(\xi_2)$，$D(\xi_3)$ 的大小关系．（结论不要求证明）

18.（14 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD=\frac{\pi}{2}$，点 F 为棱 PC 上的点，平面 ADF 与棱 PB 交于点 E．

（Ⅰ）求证：$EF/\!/AD$；

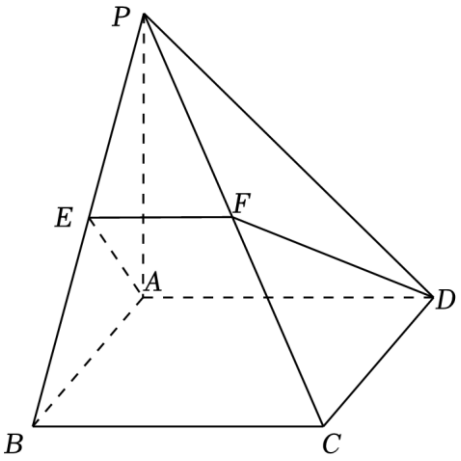
（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求平面 PCD 与平面 $ADFE$ 所成锐二面角的大小．

条件①：$AE=\sqrt{2}$；

条件②：平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$；

条件③：$PB\perp FD$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．



19．（15 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0，\sqrt{3})$，且离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 P（－1，1）且互相垂直的直线 l_1，l_2 分别交椭圆 C 于 M，N 两点及 S，T 两点．求$\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}$的取值范围．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=e^x-1-m\sin x$（$m\in\mathbf{R}$）．

（Ⅰ）当 $m=1$ 时．

（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线方程；

（ⅱ）求证：$\forall x\in(0，\frac{\pi}{2})$，$f(x)>0$.

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在$(0，\frac{\pi}{2})$上恰有一个极值点，求 m 的取值范围．

21．（15 分）若无穷数列$\{a_n\}$满足以下两个条件，则称该数列 τ 为数列．

①$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$|a_n-2|=|a_{n-1}+2|$；

②若存在某一项 $a_m\leqslant -5$，则存在 $k\in\{1，2，\cdots，m-1\}$，使得 $a_k=a_m+4$（$m\geqslant 2$ 且 $m\in\mathbf{N}^*$）．

（Ⅰ）若 $a_2<0$，写出所有 τ 数列的前四项；

（Ⅱ）若 $a_2>0$，判断 τ 数列是否为等差数列，请说明理由；

（Ⅲ）在所有的 τ 数列中，求满足 $a_m=-2021$ 的 m 的最小值．

2023年北京市石景山区高考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-2,1]$　　C．$[0,1]$　　D．$[0,2]$

解：因为$A=[-2,2]$，

因为$x^2+x-2\leqslant 0$，得$(x+2)(x-1)\leqslant 0$，解得$-2\leqslant x\leqslant 1$，

所以集合$B=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}=[-2,1]$，

所以$A\cup B=[-2,2]$.

故选：A.

2．在复平面内，复数z对应的点的坐标为$(-2,-1)$，则$\frac{z}{i}=$（　　）

A．$-1-2i$　　B．$-2-i$　　C．$-1+2i$　　D．$2-i$

解：复数z对应的点的坐标为$(-2,-1)$，

则$z=-2-i$，

故$\frac{z}{i}=\frac{-2-i}{i}=\frac{(-2-i)i}{i^2}=-1+2i$.

故选：C.

3．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的离心率是2，则$b=$（　　）

A．12　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解：根据题意可得$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4+b^2}}{2}=2$，$(b>0)$，

$\therefore b=2\sqrt{3}$，

故选：B.

4．下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（　　）

A．$f(x)=\sin x$　　B．$f(x)=2^{|x|}$

C．$f(x)=x^3+x$　　D．$f(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$

解：A项，$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$是奇函数，$f(x)$在定义域内没有单调性，不符合；

B项，$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$是偶函数，不符合；

C项，$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$，则$f(x)$是奇函数，

$f'(x)=3x^2+1>0$，则$f(x)=x^3+x$在**R**上单调增，不符合；

D 项，$f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数，

$y=e^{-x}$ 在 **R** 上单调减，$y=e^{x}$ 在 **R** 上单调增，则函数 $f(x)$ 在定义域上单调减，符合．

故选：D．

5．设 $x>0$，$y>0$，则“$x+y=2$”是“$xy\leqslant 1$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解：①当 $x+y=2$ 时，∵$x>0$，$y>0$，∴$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，∴$xy\leqslant 1$，

当且仅当 $x=y$ 时取等号，∴$xy\leqslant 1$，∴充分性成立，

②当 $xy\leqslant 1$ 时，比如 $x=1$，$y=\frac{1}{5}$时，$xy\leqslant 1$ 成立，但 $x+y=2$ 不成立，

∴必要性不成立，

∴$x+y=2$ 是 $xy\leqslant 1$ 的充分不必要条件．

故选：A．

6．已知数列$\{a_n\}$满足：对任意的 m，$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_m a_n=a_{m+n}$，且 $a_2=3$，则 $a_{10}=$（　　）

A．3^4　　B．3^5　　C．3^6　　D．3^{10}

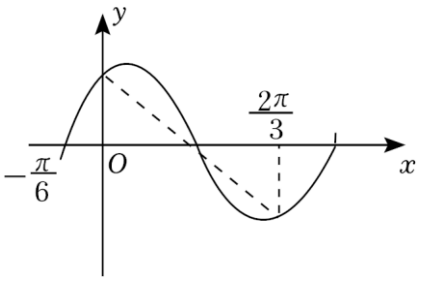
解：由题意，令 $m=n=2$，$a_4=a_{2+2}=a_2\cdot a_2=3\cdot 3=3^2$，

令 $m=n=4$，$a_8=a_{4+4}=a_4\cdot a_4=3^2\cdot 3^2=3^4$，

令 $m=2$，$n=8$，$a_{10}=a_{8+2}=a_8\cdot a_2=3^4\cdot 3=3^5$．

故选：B．

7．若函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则 φ 的值是（　　）



A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{12}$

解：根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的部分图象，

可得 $f(0)=-f(\frac{2\pi}{3})$，即有 $f(x)$ 的图象关于点（$\frac{\pi}{3}$，0）对称，

由图象可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\pi$，即有 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，①

又 $f(-\frac{\pi}{6})=A\sin(-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi)=0$，

由图象可得$-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi=0$，②

由①②解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\omega=2$，

故选：*A*．

8．在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 *v*（单位：*km/s*）与燃料的质量 *M*（单位：*kg*），火箭（除燃料外）的质量 *m*（单位：*kg*）的函数关系是 $v=2000ln(1+\frac{M}{m})$．当燃料质量与火箭质量的比值为 t_0 时，火箭的最大速度可达到 v_0km/s．若要使火箭的最大速度达到 $2v_0km/s$，则燃料质量与火箭（除燃料外）质量的比值应为（　　）

A．$2t_0^2$　　B．$t_0^2+t_0$　　C．$2t_0$　　D．$t_0^2+2t_0$

解：设燃料质量与火箭质量的比值为 *x* 时，火箭的最大速度达到 $2v_0km/s$，

由题意可知 $v_0=2000ln(1+t_0)$，$2v_0=2000ln(1+x)$，

∴$4000ln(1+t_0)=2000ln(1+x)$，

∴$ln(1+x)=2ln(1+t_0)=ln(1+t_0)^2$，

∴$1+x=(1+t_0)^2$，

∴$x={t_0}^2+2t_0$，

即要使火箭的最大速度达到 $2v_0km/s$，则燃料质量与火箭质量的比值应为${t_0}^2+2t_0$，

故选：*D*．

9．已知直线 *l*：*kx*﹣*y*﹣2*k*+2＝0 被圆 *C*：$x^2+(y+1)^2=25$ 所截得的弦长为整数，则满足条件的直线 *l* 有（　　）

A．6 条　　B．7 条　　C．8 条　　D．9 条

解：由圆 *C*：$x^2+(y+1)^2=25$，得圆心 *C*（0，﹣1），

直线 *l*：*kx*﹣*y*﹣2*k*+2＝0 可化为 *k*（*x*﹣2）+（﹣*y*+2）＝0，即直线过定点（2，2）

∵圆心到定点（2，2）的距离为$\sqrt{13}$，

∴直线 *l*：*kx*﹣*y*﹣2*k*+2＝0 被圆 *C*：$x^2+(y+1)^2=25$ 所截得的最短弦长为 $2\sqrt{25-13}=4\sqrt{3}$，

又过定点（2，2）的最长的弦长为 10，

过点（2，2）垂直 *x* 轴的直线 *x*＝2 与圆 *C* 所截得的弦长恰好为 $2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$不是整数，

∴弦长为整数时直线 *l* 共有 7 条．

故选：*B*．

10．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 *P* 为正方形 *ABCD* 所在平面内一动点，给出下列三个命题：

①若点 *P* 总满足 $PD_1\perp DC_1$，则动点 *P* 的轨迹是一条直线；

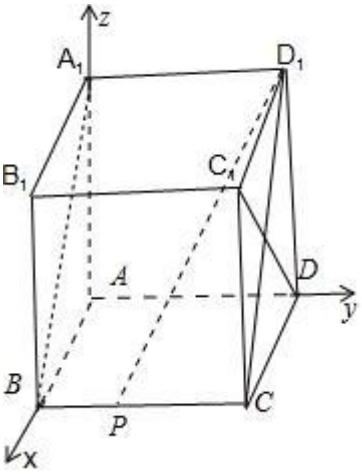
②若点 P 到直线 BB_1 与到平面 CDD_1C_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹是抛物线；

③若点 P 到直线 DD_1 的距离与到点 C 的距离之和为 2，则动点 P 的轨迹是椭圆.

其中正确的命题个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解：如图所示，建立空间直角坐标系，



①连接 CD_1，A_1B，由正方体的性质可得 $C_1D\perp$ 平面 A_1BCD_1，

而平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

∴点 P 的轨迹是一条直线 BC，因此①正确；

②设 P（x，y，0），B（2，0，0），∵点 P 到直线 BB_1 与到平面 CDD_1C_1 的距离相等，

∴$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|2-y|$，化为 $y=-\frac{1}{4}x^2+x$，

∴动点 P 的轨迹是抛物线，因此②正确；

③设 P（x，y，0），C（2，2，0），D（0，2，0），

∵P 到直线 DD_1 的距离与到点 C 的距离之和为 2，

∴$\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=2$，化为 $y=2$（$0\leqslant x\leqslant 2$）.

∴动点 P 的轨迹是线段 CD，因此③不正确.

综上只有①②正确，

故选：C.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．向量$\vec{a}=(2sin\theta，cos\theta)$，$\vec{b}=(1，1)$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 tanθ＝____$\frac{1}{2}$____.

解：∵$\vec{a}=(2sin\theta，cos\theta)$，$\vec{b}=(1，1)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$，

∴2sinθ＝cosθ，

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$,

故答案为：$\frac{1}{2}$.

12．抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点坐标为 （0，1），若抛物线 C 上一点 M 的纵坐标为 2，则点 M 到抛物线焦点的距离为 3．

解：抛物线 C：$x^2=4y$ 中 $p=2$，所以焦点坐标为 F（0，1）；

由抛物线的定义可得$|MF|=2+1=3$．

故答案为：（0，1）；3．

13．若$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中含有常数项，则正整数 n 的一个取值为 6（答案不唯一）．

解：$(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式通项公式为$C_n^r x^{n-r}x^{-\frac{1}{2}r}=C_n^r x^{n-\frac{3}{2}r}$，

令$n-\frac{3}{2}r=0$，即 $n=\frac{3}{2}r$，

不妨取 $r=4$，即 $n=6$，

故正整数 n 的一个取值为 6．

故答案为：6（答案不唯一）．

14．设函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x，x\le a\\-2x，x>a\end{cases}$．

①若 $a=0$，则 f（x）的最大值为 2；

②若 f（x）无最大值，则实数 a 的取值范围是 （－∞，－1）．

解：①若 $a=0$，则 f（x）$=\begin{cases}x^3-3x，x\le 0\\-x，x>0\end{cases}$，

$\therefore f'$（x）$=\begin{cases}3x^2-3，x\le 0\\-1，x>0\end{cases}$，

当 $x<-1$ 时，f'（x）>0，此时函数为增函数，

当 $x>-1$ 时，f'（x）<0，此时函数为减函数，

故当 $x=-1$ 时，f（x）的最大值为 2；

②$\because f'$（x）$=\begin{cases}3x^2-3，x\le a\\-1，x>a\end{cases}$，

令 f'（x）$=0$，则 $x=\pm 1$，

若 f（x）无最大值，则$\begin{cases}a\le -1\\-2a>a^3-3a\end{cases}$，或$\begin{cases}a>-1\\-2a>a^3-3a，\\-2a>2\end{cases}$

解得：$a\in(-\infty,-1)$.

故答案为：2，$(-\infty,-1)$.

15．项数为 k（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geq2$）的有限数列$\{a_n\}$的各项均不小于－1 的整数，满足$a_1\cdot2^{k-1}+a_2\cdot2^{k-2}+a_3\cdot2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot2+a_k=0$，其中 $a_1\neq0$．给出下列四个结论：

①若 $k=2$，则 $a_2=2$；

②若 $k=3$，则满足条件的数列$\{a_n\}$有 4 个；

③存在 $a_1=1$ 的数列$\{a_n\}$；

④所有满足条件的数列$\{a_n\}$中，首项相同．

其中所有正确结论的序号是 ①②④ ．

解：因为有限数列$\{a_n\}$的各项均不小于－1 的整数，

所以 $a_n\geq-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\in\mathbf{Z}$，

又因为$a_1\cdot2^{k-1}+a_2\cdot2^{k-2}+a_3\cdot2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot2+a_k=0$，

所以 $a_1\cdot2^{k-1}=-(a_2\cdot2^{k-2}+a_3\cdot2^{k-3}+\cdots+a_{k-1}\cdot2+a_k)\leq(2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2^1+1)=2^{k-1}-1$，

所以 $-1\leq a_1\leq1-(\frac{1}{2})^{k-1}<1$，且 $a_1\neq0$，a_1 为整数，

所以 $a_1=-1$，所以③错误，④正确；

当 $k=2$ 时，得 $2a_1+a_2=0$，所以 $a_1=-1$，则 $a_2=2$，故①正确；

当 $k=3$ 时，得 $4a_1+2a_2+a_3=0$，

又因为 $a_1=-1$，

所以 $2a_2+a_3=4$，则 $2a_2=4-a_3\leq5$，

所以 $-1\leq a_2\leq\frac{5}{2}$，$a_2$ 为整数，

则 a_2 的可能取值为－1，0，1，2，对应的 a_3 的取值为 6，4，2，0，

故数列$\{a_n\}$可能为－1，－1，6；－1，0，4；－1，1，2；－1，2，0，共 4 个，故②正确．

故答案为：①②④．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（13 分）如图，在△ABC 中，$AC=4\sqrt{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，点 D 在边 BC 上，$\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 AD 的长；

（Ⅱ）若△ABD 的面积为$2\sqrt{2}$，求 AB 的长．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/957111026104006026