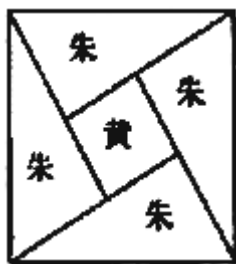


5. 三国时代吴国数学家赵爽所注《周髀算经》中给出了勾股定理的绝妙证明.下面是赵爽的弦图及注文,弦图是一个以勾股形之弦为边的正方形,其面积称为弦实.图中包含四个全等的勾股形及一个小正方形,分别涂成红(朱)色及黄色,其面积称为朱实、黄实,利用 $2 \times \text{勾} \times \text{股} + (\text{股} - \text{勾})^2 = 4 \times \text{朱实} + \text{黄实} = \text{弦实}$, 化简,得 $\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2$.设勾股形中勾股比为 $1:\sqrt{3}$,若向弦图内随机抛掷1000颗图钉(大小忽略不计),则落在黄色图形内的图钉数大约为()



- A. 134 B. 866 C. 300 D. 500

6. “ $\tan \theta = 2$ ”是“ $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

7. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}| = 5$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2e) = -f(x)$ (其中 $e = 2.71828\text{L}$), 且在区间 $[e, 2e]$ 上是减函数,

令 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 的大小关系 (用不等号连接) 为 ()

- A. $f(b) > f(a) > f(c)$ B. $f(b) > f(c) > f(a)$

- C. $f(a) > f(b) > f(c)$ D. $f(a) > f(c) > f(b)$

9. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 d_1 , 到直线 $l: 3x + 4y + 12 = 0$ 的距离为 d_2 , 则 $d_1 + d_2$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $\frac{15}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 3

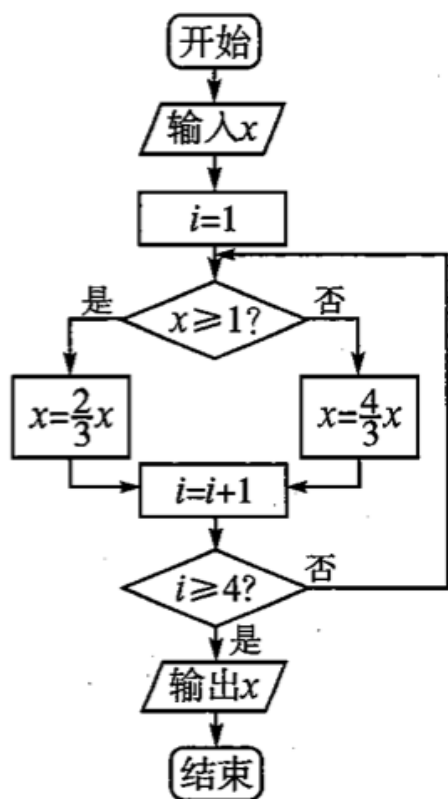
10. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x^3 < 27$ ”是“ $|x| < 3$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 中国古典乐器一般按“八音”分类. 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最先见于《周礼·春官·大师》, 分为“金、石、土、革、丝、木、匏 (páo)、竹”八音, 其中“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器. 现从“八音”中任取不同的“两音”, 则含有打击乐器的概率为 ()

- A. $\frac{3}{14}$ B. $\frac{11}{14}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{2}{7}$

12. 相传黄帝时代, 在制定乐律时, 用“三分损益”的方法得到不同的竹管, 吹出不同的音调. 如图的程序是与“三分损益”结合的计算过程, 若输入的 x 的值为 1, 输出的 x 的值为 ()



- A. $\frac{64}{81}$ B. $\frac{32}{27}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{16}{27}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，过 F 作直线与 C 相交于 P, Q 两点，且 Q 在第一象限，若 $\overrightarrow{2PF} = \overrightarrow{FQ}$ ，则直线 PQ 的斜率是_____.

14. 设实数 $a > 0$ ，若函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln x - x^2 & (x > 0) \\ x + \frac{1}{x} + a + 2 & (x < 0) \end{cases}$ 的最大值为 $f(-1)$ ，则实数 a 的最大值为_____.

15. 已知复数 $z_1 = 1 - 2i$ ， $z_2 = a + 2i$ （其中 i 是虚数单位， $a \in \mathbb{R}$ ），若 $z_1 \cdot z_2$ 是纯虚数，则 a 的值为_____.

16. 已知正四棱柱的底面边长为 3cm，侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}$ cm，则这个正四棱柱的体积是_____ cm^3 .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+1| - |x-2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 1$;

(2) 记函数 $f(x)$ 的最大值为 s ，若 $a + b + c = s (a, b, c > 0)$ ，证明： $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3abc$.

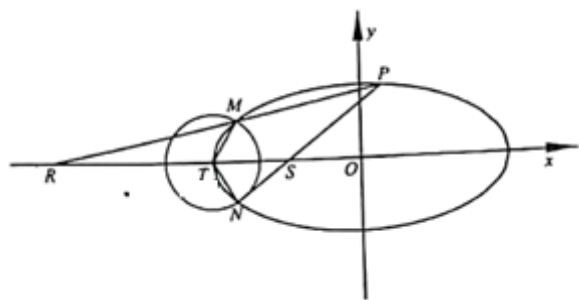
18. (12 分) 选修 4—5；不等式选讲.

已知函数 $f(x) = |x| - |x-1|$.

(1)若 $f(x) \geq |m-1|$ 的解集非空，求实数 m 的取值范围；

(2)若正数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = M$ ， M 为 (1) 中 m 可取到的最大值，求证： $x + y \geq 2xy$ 。

19. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，以椭圆 C 左顶点 T 为圆心作圆 $T: (x+2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ ，设圆 T 与椭圆 C 交于点 M 与点 N 。



(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 求 $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TN}$ 的最小值，并求此时圆 T 的方程；

(3) 设点 P 是椭圆 C 上异于 M, N 的任意一点，且直线 MP, NP 分别与 x 轴交于点 R, S ， O 为坐标原点，求证： $|OR| \cdot |OS|$ 为定值。

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且满足 $\sqrt{3}a = \sqrt{3}b \cos C - c \sin B$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$ ， AD 为 BC 边上的中线，当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时，求 AD 的长。

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 + mx^2 + m + 1$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 -3 ，求 m 的值。

22. (10 分) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极值，且 $f(x_0) = x_0$ ，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的“ F 点”。

(1) 设函数 $f(x) = kx^2 - 2 \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$)。

①当 $k = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

②若函数 $f(x)$ 存在“ F 点”，求 k 的值；

(2) 已知函数 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) 存在两个不相等的“ F 点” x_1, x_2 ，且 $|g(x_1) - g(x_2)| \geq 1$

，求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用倍角公式求得 $\tan 2\alpha$ 的值，利用诱导公式求得 $\cos \beta$ 的值，利用同角三角函数关系式求得 $\sin \beta$ 的值，进而求得 $\tan \beta$ 的值，最后利用正切差角公式求得结果.

【详解】

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3},$$

$$\cos(\pi + \beta) = -\frac{4}{5} = -\cos \beta, \quad (\beta \in (0, \pi)),$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \tan \beta = \frac{3}{4},$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{24},$$

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关三角函数求值问题，涉及到的知识点有诱导公式，正切倍角公式，同角三角函数关系式，正切差角公式，属于基础题目.

2、A

【解析】

对复数 z 进行乘法运算，并计算得到 $z = 4 + 2i$ ，从而得到虚部为 2.

【详解】

因为 $z = (1+i)(3-i) = 4 + 2i$ ，所以 z 的虚部为 2.

【点睛】

本题考查复数的四则运算及虚部的概念，计算过程要注意 $i^2 = -1$.

3、A

【解析】

先利用向量坐标运算求解 $\vec{OB}$ ，再利用向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影公式即得解

【详解】

由于向量 $\vec{OA} = (-3, 4)$ ， $\vec{OA} + \vec{OB} = (-1, 5)$

故 $\vec{OB} = (2, 1)$

向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \frac{-3 \times 2 + 4 \times 1}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法的坐标运算和向量投影的概念，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

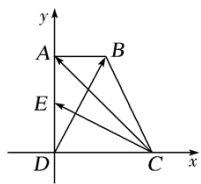
4、B

【解析】

建立平面直角坐标系，用坐标表示 $\vec{CA}, \vec{CE}, \vec{DB}$ ，利用 $\vec{CA} = \lambda \vec{CE} + \mu \vec{DB} (\lambda, \mu \in R)$ ，列出方程组求解即可.

【详解】

建立如图所示的平面直角坐标系，则 $D(0, 0)$.



不妨设 $AB=1$ ，则 $CD=AD=2$ ，所以 $C(2, 0)$ ， $A(0, 2)$ ， $B(1, 2)$ ， $E(0, 1)$ ，

$\therefore \vec{CA} = (-2, 2)$ ， $\vec{CE} = (-2, 1)$ ， $\vec{DB} = (1, 2)$

Q $\vec{CA} = \lambda \vec{CE} + \mu \vec{DB}$

$\therefore (-2, 2) = \lambda(-2, 1) + \mu(1, 2)$,

$\therefore \begin{cases} -2\lambda + \mu = -2 \\ \lambda + 2\mu = 2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{6}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases}$ 则 $\lambda + \mu = \frac{8}{5}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了由平面向量线性运算的结果求参数，属于中档题.

5、A

【解析】

分析：设三角形的直角边分别为 1， $\sqrt{3}$ ，利用几何概型得出图钉落在小正方形内的概率即可得出结论.

解析：设三角形的直角边分别为 1， $\sqrt{3}$ ，则弦为 2，故大正方形的面积为 4，小正方形的面积为 $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 图钉落在黄色图形内的概率为 $\frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 落在黄色图形内的图钉数大约为 $1000 \times \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 134$.

故选：A.

点睛：应用几何概型求概率的方法

建立相应的几何概型，将试验构成的总区域和所求事件构成的区域转化为几何图形，并加以度量.

(1)一般地，一个连续变量可建立与长度有关的几何概型，只需把这个变量放在数轴上即可；

(2)若一个随机事件需要用两个变量来描述，则可用这两个变量的有序实数对来表示它的基本事件，然后利用平面直角坐标系就能顺利地建立与面积有关的几何概型；

(3)若一个随机事件需要用三个连续变量来描述，则可用这三个变量组成的有序数组来表示基本事件，利用空间直角坐标系即可建立与体积有关的几何概型.

6、A

【解析】

首先利用二倍角正切公式由 $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ，求出 $\tan \theta$ ，再根据充分条件、必要条件的定义判断即可；

【详解】

解： $\because \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}$ ， $\therefore$ 可解得 $\tan \theta = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ “ $\tan \theta = 2$ ”是“ $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$ ”的充分不必要条件.

故选：A

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，二倍角正切公式的应用是解决本题的关键，属于基础题.

7、B

【解析】

建立平面直角坐标系，将已知条件转化为所设未知量的关系式，再将 $\left| \vec{a} - \vec{b} \right|$ 的最小值转化为用该关系式表达的算式，利用基本不等式求得最小值。

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示，设 $\vec{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，且 $A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，由于

$$\left| \vec{a} - \vec{c} \right| = \left| \vec{b} - \vec{c} \right| = 5, \text{ 所以 } m, n \in [4, 6].$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (m - \cos \theta, -\sin \theta), \vec{b} - \vec{c} = (-\cos \theta, n - \sin \theta). \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 25 \\ n^2 - 2n \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 25 \end{cases}, \text{ 即 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta.$$

$$\left| \vec{a} - \vec{b} \right| = \left| (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) \right| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2 - 2(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta}$$

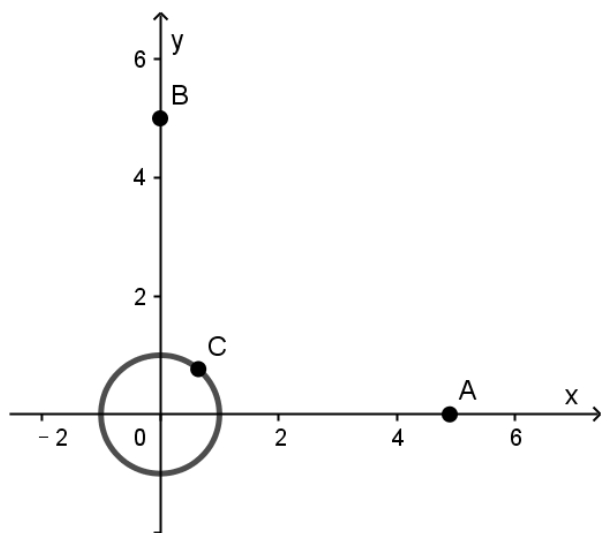
$$= \sqrt{m^2 + n^2} \geq \sqrt{2mn}. \text{ 当且仅当 } m = n \text{ 时取得最小值，此时由 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta \text{ 得}$$

$$2m^2 = 48 + 2m(\sin \theta + \cos \theta) = 48 + 2\sqrt{2}m \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \text{ 当 } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ 时， } 2m^2 \text{ 有最小值为 } 48 - 2\sqrt{2}m, \text{ 即}$$

$$2m^2 = 48 - 2\sqrt{2}m, \quad m^2 + \sqrt{2}m - 24 = 0, \text{ 解得 } m = 3\sqrt{2}. \text{ 所以当且仅当 } m = n = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ 时 } \left| \vec{a} - \vec{b} \right| \text{ 有最小值为}$$

$$\sqrt{2 \times (3\sqrt{2})^2} = 6.$$

故选：B



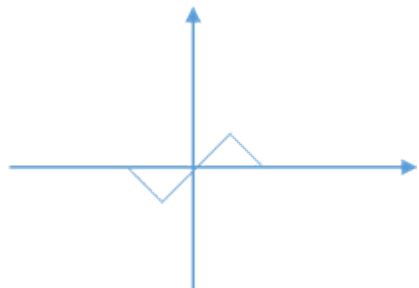
【点睛】

本小题主要考查向量的位置关系、向量的模，考查基本不等式的运用，考查数形结合的数学思想方法，属于难题。

8、A

【解析】

因为 $f(x+2e) = -f(x)$ ，所以 $f(x+4e) = f(x)$ ，即周期为 4，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以可作一个周期 $[-2e, 2e]$ 示意图，如图 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增，因为 $5^2 < 2^5 \therefore 5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}}, 2^3 < 3^2 \therefore 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \therefore 0 < c < a < b < 1$ ，因此 $f(b) > f(a) > f(c)$ ，选 A.



点睛：函数对称性代数表示

- (1) 函数 $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$ ，函数 $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$ （定义域关于原点对称）；
- (2) 函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称 $\Leftrightarrow f(x) + f(-x + 2a) = 2b$ ，函数 $f(x)$ 关于直线 $x = m$ 对称 $\Leftrightarrow f(x) = f(-x + 2m)$ ，
- (3) 函数周期为 T ，则 $f(x) = f(x + T)$

9、A

【解析】

分析：题设的直线与抛物线是相离的， $d_1 + d_2$ 可以化成 $d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，其中 $d_1 + 1$ 是点 P 到准线的距离，也就是 P 到焦点的距离，这样我们从几何意义得到 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值，从而得到 $d_1 + d_2$ 的最小值。

详解：由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$ ①得到 $3y^2 + 16y + 48 = 0$ ， $\Delta = 256 - 12 \times 48 < 0$ ，故①无解，

所以直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 与抛物线是相离的。

由 $d_1 + d_2 = d_1 + 1 + d_2 - 1$ ，

而 $d_1 + 1$ 为 P 到准线 $x = -1$ 的距离，故 $d_1 + 1$ 为 P 到焦点 $F(1, 0)$ 的距离，

从而 $d_1 + 1 + d_2$ 的最小值为 F 到直线 $3x + 4y + 12 = 0$ 的距离 $\frac{|1 \times 3 + 0 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ ，

故 $d_1 + d_2$ 的最小值为 2，故选 A.

点睛：抛物线中与线段的长度相关的最值问题，可利用抛物线的几何性质把动线段的长度转化为到准线或焦点的距离来求解。

10、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/958012110065006051>