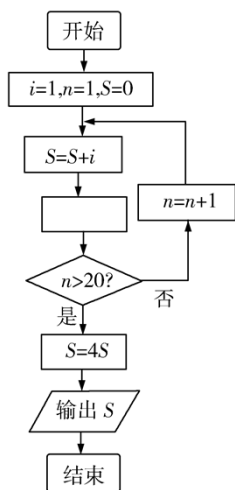


6. 已知 $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ ，如图是求 π 的近似值的一个程序框图，则图中空白框中应填入



A. $i = -\frac{1}{2n-1}$

B. $i = -\frac{1}{i+2}$

C. $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

D. $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$

7. 过点 $P(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$ 的直线 l 与曲线 $y = \sqrt{13-x^2}$ 交于 A, B 两点, 若 $2\overrightarrow{PA} = 5\overrightarrow{AB}$, 则直线 l 的斜率为()

A. $2 - \sqrt{3}$

B. $2 + \sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$

D. $2 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} - 1$

8. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} =$ ()

A. 1194

B. 1695

C. 311

D. 1095

9. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且满足 $3 + a_5 = a_3 + a_8$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{11} =$ ()

A. 27

B. 33

C. 39

D. 44

10. 已知函数 $f(x) = (2a+2)\ln x + 2ax^2 + 5$. 设 $a < -1$, 若对任意不相等的正数 x_1, x_2 , 恒有 $\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq 8$,

则实数 a 的取值范围是 ()

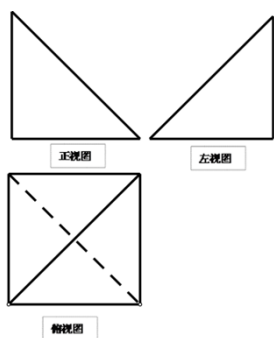
A. $(-3, -1)$

B. $(-2, -1)$

C. $(-\infty, -3]$

D. $(-\infty, -2]$

11. 某几何体的三视图如图所示, 三视图是腰长为 1 的等腰直角三角形和边长为 1 的正方形, 则该几何体中最长的棱长为 ().



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\sqrt{6}$

12. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\tau: x^2+y^2=1$, 且 P 是圆 τ 上一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 设 P 为有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的一个交点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, 椭圆 C_1 的离心率为 e_1 , 双曲线 C_2 的离心率为 e_2 , 若 $e_2 = 3e_1$, 则 $e_1 =$ _____.

14. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+2y-3 \geq 0 \\ 2x+y-3 \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $2x+3y$ 的最小值为_____.

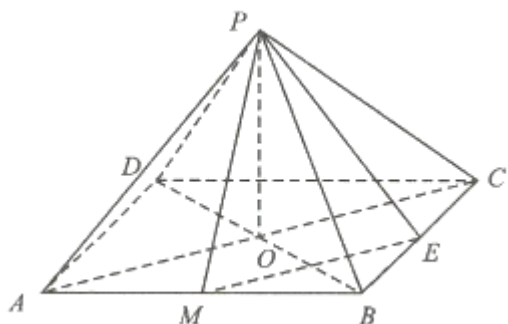
15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的焦距为 $2c$, 过 C 外一点 $P(c, 2c)$ 作线段

PF_1, PF_2 分别交椭圆 C 于点 A, B , 若 $|PA| = |AF_1|$, 则 $\frac{|PF_2|}{|BF_2|} =$ _____.

16. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F , 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A, B 两点若 $\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FA}$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 是边长为4的正方形 $ABCD$ 的中心, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BC 的中点.



(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PE = 3$, 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x, g(x) = \frac{a}{x} - 1 (a \in R)$ (e 是自然对数的底数, $e \approx 2.718 \dots$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 $[4, 5]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $h(x) = f(x) + (x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $h(x_1) < m$ 恒成立, 求满足条件的 m 的最小值 (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值).

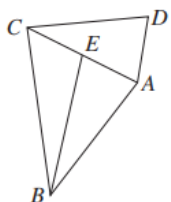
19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{b}{x} (a, b \in R)$, 且对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(I) 用含 a 的表达式表示 b ;

(II) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求出 a 的取值范围, 并证明 $f\left(\frac{a^2}{2}\right) > 0$;

(III) 在 (II) 的条件下, 判断 $y = f(x)$ 零点的个数, 并说明理由.

20. (12 分) 如图在四边形 $ABCD$ 中, $BA = \sqrt{3}, BC = 2, E$ 为 AC 中点, $BE = \frac{\sqrt{13}}{2}$.



(1) 求 AC ;

(2) 若 $D = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ACD$ 面积的最大值.

21. (12 分) 在平面直角坐标系中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的参数方程

为 $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$;

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交点分别为 A, B , 点 $P(1, 0)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

22. (10 分) 已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = |x + a| + |2x - 6|$ 有最小值 7.

(1) 求 a 的值;

(2) 设 $m, n > 0$ ， $m + 4n = a$ ，求证： $\frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{9}{8}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

设出 M 的坐标为 (x, y) ，依据题目条件，求出点 M 的轨迹方程 $x^2 + (y - 2)^2 = 8$ ，

写出点 M 的参数方程，则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta$ ，根据余弦函数自身的范围，可求得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 结果.

【详解】

设 $M(x, y)$ ，则

$$\because \frac{|MA|}{|MO|} = \sqrt{2}, \quad A(0, -2)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2 + (y+2)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 + (y+2)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 8$ 为点 M 的轨迹方程

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos \theta \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

则由向量的坐标表达式有：

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\text{又} \because \cos \theta \in [-1, 1]$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2\sqrt{2} \cos \theta \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

故选：D

【点睛】

考查学生依据条件求解各种轨迹方程的能力，熟练掌握代数式转换，能够利用三角换元的思想处理轨迹中的向量乘积，属于中档题.求解轨迹方程的方法有：①直接法；②定义法；③相关点法；④参数法；⑤待定系数法

2、B

【解析】

由题意得出 $\frac{b^2}{a^2}$ 的值，进而利用离心率公式 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 可求得该双曲线的离心率.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，由题意可得 $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ ，

因此，该双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用双曲线的渐近线方程求双曲线的离心率，利用公式 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 计算较为方便，考查计算能力，属于基础题.

3、B

【解析】

每个式子的值依次构成一个数列 $\{a_n\}$ ，然后归纳出数列的递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ 后再计算.

【详解】

以及数列的应用根据题设条件，设数字 2，4，9，17，31，54，92， $\dots$ 构成一个数列 $\{a_n\}$ ，可得数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n \quad (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{则 } a_8 = a_7 + a_6 + 8 = 54 + 92 + 8 = 154,$$

$$a_9 = a_8 + a_7 + 9 = 154 + 92 + 9 = 255, \quad a_{10} = a_9 + a_8 + 10 = 255 + 154 + 10 = 419.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查归纳推理，解题关键是通过数列的项归纳出递推关系，从而可确定数列的一些项.

4、B

【解析】

根据题意，求得函数周期，利用周期性和函数值，即可求得 a 。

【详解】

由已知可知， $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 是一个以4为周期的周期函数，

所以 $f(2020-\ln 2)=f(-\ln 2)=-f(\ln 2)=e^{a\ln 2}=2^a=8$ ，

解得 $a=3$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查函数周期的求解，涉及对数运算，属综合基础题.

5、A

【解析】

由题意画出图形，求出三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的半径，再求出外接球球心到 D 的距离，利用勾股定理求得过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径，则答案可求.

【详解】

如图，设三角形 ABC 外接圆的圆心为 G ，则外接圆半径 $AG=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ，

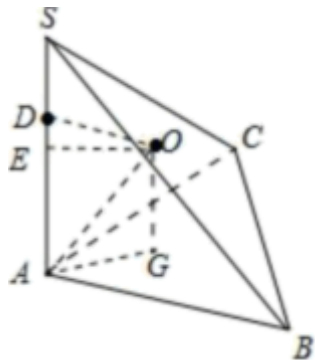
设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心为 O ，则外接球的半径 $R=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

取 SA 中点 E ，由 $SA=4$ ， $AD=3SD$ ，得 $DE=1$ ，

所以 $OD=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$ 。

则过点 D 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径为 $\sqrt{4^2-(\sqrt{13})^2}=\sqrt{3}$

所以过点 D 的平面截球 O 所得截面的最小面积为 $\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$



故选：A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球问题，还考查了求截面的最小面积，属于较难题.

6、C

【解析】

由于 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ 中正项与负项交替出现，根据 $S = S + i$ 可排除选项 A、B；执行第一次循环 $S = 0 + 1 = 1$ ，①若图中空白框中填入 $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ，则 $i = -\frac{1}{3}$ ，②若图中空白框中填入 $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$ ，则 $i = -\frac{1}{3}$ ，此时 $n > 20$ 不成立， $n = 2$ ；执行第二次循环，由①②均可得 $S = 1 - \frac{1}{3}$ ，③若图中空白框中填入 $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ，则 $i = \frac{1}{5}$ ，④若图中空白框中填入 $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$ ，则 $i = \frac{3}{5}$ ，此时 $n > 20$ 不成立， $n = 3$ ；执行第三次循环：由③可得 $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ ，符合题意，由④可得 $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$ ，不符合题意，所以图中空白框中应填入 $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ，故选 C.

7、A

【解析】

利用切割线定理求得 $|PA|, |AB|$ ，利用勾股定理求得圆心到弦 AB 的距离，从而求得 $\angle APO = 30^\circ$ ，结合 $\angle POx = 45^\circ$ ，求得直线 l 的倾斜角为 15° ，进而求得 l 的斜率.

【详解】

曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 为圆 $x^2 + y^2 = 13$ 的上半部分，圆心为 $(0, 0)$ ，半径为 $\sqrt{13}$.

设 PQ 与曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 相切于点 Q ，

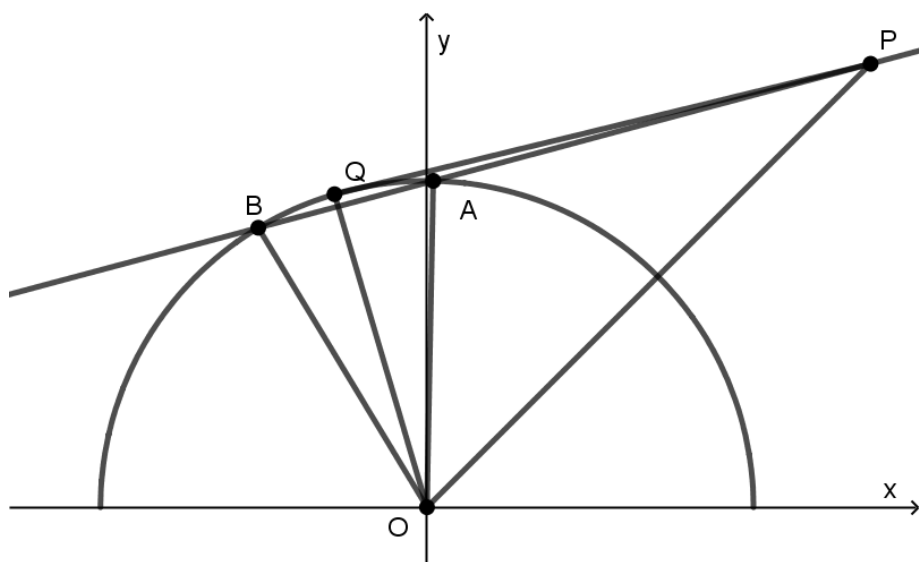
$$\text{则 } |PQ|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PA| \cdot (|PA| + |AB|) = \frac{7}{5} |PA|^2 = |PO|^2 - |OQ|^2 = 35$$

所以 $|PA| = 5, |AB| = 2$,

O 到弦 AB 的距离为 $\sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$ ， $\sin \angle APO = \frac{2\sqrt{3}}{|OP|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle APO = 30^\circ$ ，由于 $\angle POx = 45^\circ$ ，

所以直线 l 的倾斜角为 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ，斜率为 $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \times \tan 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$.

故选：A



【点睛】

本小题主要考查直线和圆的位置关系，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

8、D

【解析】

确定 $\{c_n\}$ 中前 35 项里两个数列中的项数，数列 $\{2n\}$ 中第 35 项为 70，这时可通过比较确定 $\{3^n\}$ 中有多少项可以插入这 35 项里面即可得，然后可求和.

【详解】

$n = 35$ 时， $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项和中， $\{3^n\}$ 有三项 3，9，27， $\{2n\}$ 有 32 项，所以

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查数列分组求和，掌握等差数列和等比数列前 n 项和公式是解题基础. 解题关键是确定数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项中有多少项是 $\{2n\}$ 中的，又有多少项是 $\{3^n\}$ 中的.

9、B

【解析】

利用等差数列性质，若 $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 求出 $a_6 = 3$ ，再利用等差数列前 n 项和公式得

$$S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 11a_6 = 33$$

【详解】

解：因为 $3 + a_5 = a_3 + a_8$ ，由等差数列性质，若 $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 得，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/958035130045006076>