

2024 届云南省江川二中高三第二次 (5 月) 联考数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x^2 > 1\}$, 则集合 $A \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值是 ()

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 2

3. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$, $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π , 则 $f(x)$ 的一条对称轴是 ()

- A. $x = -\frac{\pi}{12}$ B. $x = \frac{\pi}{12}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 锐角 θ 顶点在坐标原点, 始边为 x 轴正半轴, 终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, m\right)$, 则

$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

5. 已知定点 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, N 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的任意一点, 点 F_1 关于点 N 的对称点为 M , 线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P , 则点 P 的轨迹是 ()

- A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n = a_{b_n}$,

$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

7. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 其中 $0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$, 记函数 $f(x)$ 满足条件 $\begin{cases} f(2) \leq 12 \\ f(-2) \leq 4 \end{cases}$ 为事件 A , 则事件 A

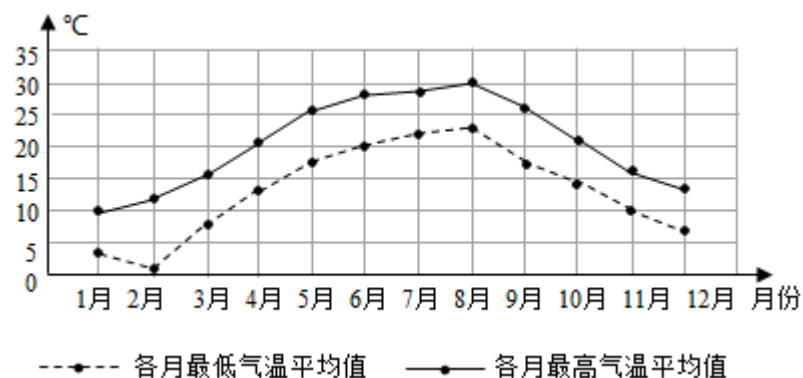
发生的概率为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{8}$
C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 设集合 $U = \mathbf{R}$ (R 为实数集), $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap C_U B =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x \geq 1\}$ D. $\{x | x > 0\}$

9. 某市气象部门根据 2018 年各月的每天最高气温平均数据, 绘制如下折线图, 那么, 下列叙述错误的是()



- A. 各月最高气温平均值与最低气温平均值总体呈正相关
B. 全年中, 2 月份的最高气温平均值与最低气温平均值的差值最大
C. 全年中各月最低气温平均值不高于 10°C 的月份有 5 个
D. 从 2018 年 7 月至 12 月该市每天最高气温平均值与最低气温平均值呈下降趋势

10. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 ()

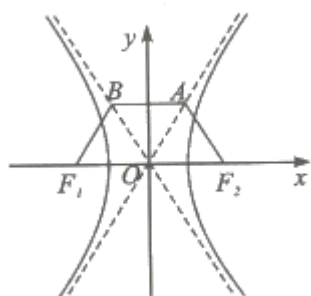
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{7}{2}$

11. 已知实数 $a > 0$, $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $1 < a \leq 2$ B. $a < 5$ C. $3 < a < 5$ D. $2 \leq a \leq 5$

12. 如图, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 直线 $y = \frac{bc}{2a}$ 与双曲线 C 的

两条渐近线分别相交于 A, B 两点. 若 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()



- A. 2
- B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
- C. $\sqrt{2}$
- D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 有一个共同的焦点 F ，两曲线的一个交点为 P ，若 $|FP| = 5$ ，则点 F 到双曲线的渐近线的距离为_____。

14. 某同学周末通过抛硬币的方式决定出去看电影还是在家学习，抛一枚硬币两次，若两次都是正面朝上，就在家学习，否则出去看电影，则该同学在家学习的概率为_____。

15. 一个村子里一共有 n 个人，其中一个人是谣言制造者，他编造了一条谣言并告诉了另一个人，这个人又把谣言告诉了第三个人，如此等等。在每一次谣言传播时，谣言的接受者都是在其余 $n - 1$ 个村民中随机挑选的，当谣言传播 $k (k \geq 2)$ 次之后，还没有回到最初的造谣者的概率是_____。

16. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $|\vec{b}| = 2$ ，且向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - kx$ (其中 e 为自然对数的底， k 为常数) 有一个极大值点和一个极小值点。

(1) 求实数 k 的取值范围；

(2) 证明： $f(x)$ 的极大值不小于 1。

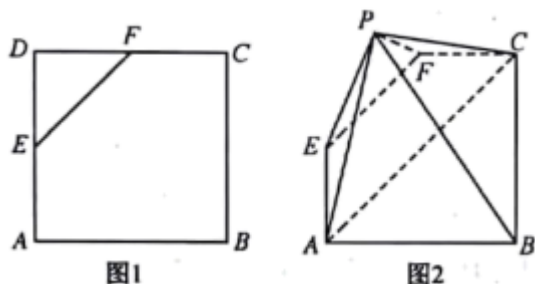
18. (12 分) 设 $f(x) = |x| - 2|x - a| (a > 0)$

(1) 当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集；

(2) 若 $f(x) \leq 1$ ，求 a 的取值范围。

19. (12 分) 如图 1，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中， E 是 AD 的中点， F 是 CD 的中点，现将三角形 DEF 沿 EF

翻折成如图 2 所示的五棱锥 $P-ABCFE$.



(1) 求证: $AC \perp$ 平面 PEF ;

(2) 若平面 $PEF \perp$ 平面 $ABCFE$, 求直线 PB 与平面 PAE 所成角的正弦值.

20. (12 分) 已知 $f(x) = |x-1| + |x+a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $a=1$, 求不等式 $f(x) > 4$ 的解集;

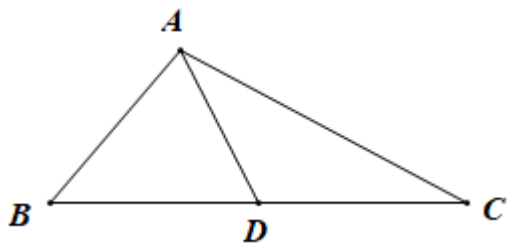
(II) $\forall m \in (0,1), \exists x_0 \in \mathbb{R}, \frac{1}{m} + \frac{4}{1-m} > f(x_0)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{2x} + (1-ax^2)e^x - ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 证明: 当 $x \geq e^2$ 时, $e^x > x^2$;

(2) 若函数 $f(x)$ 有三个零点, 求实数 a 的取值范围.

22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $a \sin B + b \cos A = c$, 线段 BC 的中点为 D .



(I) 求角 B 的大小;

(II) 已知 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\angle ADB$ 的大小.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

化简集合 A, B ，按交集定义，即可求解.

【详解】

集合 $A = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\}$ ，

$B = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$ ，则 $A \cap B = \{2\}$.

故选:A.

【点睛】

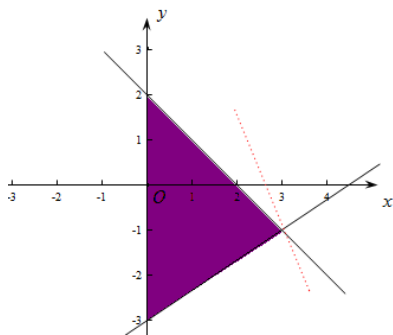
本题考查集合间的运算，属于基础题.

2、B

【解析】

由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，把最优解的坐标代入目标函数得结论.

【详解】



画出约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，表示的可行域，如图，

由 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ ，

将 $z = 2x + y$ 变形为 $y = -2x + z$ ，

平移直线 $y = -2x + z$ ，

由图可知当直 $y = -2x + z$ 经过点 $(3, -1)$ 时，

直线在 y 轴上的截距最大，

z 最大值为 $z = 2 \times 3 - 1 = 5$ ，故选 B.

【点睛】

本题主要考查线性规划中，利用可行域求目标函数的最值，属于简单题. 求目标函数最值的一般步骤是“一画、二移、三求”：（1）作出可行域（一定要注意是实线还是虚线）；（2）找到目标函数对应的最优解对应点（在可行域内平移变形后的目标函数，最先通过或最后通过的顶点就是最优解）；（3）将最优解坐标代入目标函数求出最值.

3、D

【解析】

由题，得 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，由 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π ，

可得最小正周期 $T = \pi$ ，从而求得 ω ，得到函数的解析式，又因为当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，由此即可得到本题答案.

【详解】

由题，得 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

因为 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π ，

所以函数 $y = f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$ ，则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时， $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的一条对称轴，

故选：D

【点睛】

本题主要考查利用和差公式恒等变形，以及考查三角函数的周期性和对称性.

4、A

【解析】

根据单位圆以及角度范围，可得 m ，然后根据三角函数定义，可得 $\sin \theta, \cos \theta$ ，最后根据两角和的正弦公式，二倍角公式，简单计算，可得结果.

【详解】

由题可知： $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + m^2 = 1$ ，又 θ 为锐角

所以 $m > 0$ ， $m = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

根据三角函数的定义： $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

所以 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -\frac{3}{5}$

由 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{4}$

所以 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

故选：A

【点睛】

本题考查三角函数的定义以及两角和正弦公式，还考查二倍角的正弦、余弦公式，难点在于公式的计算，识记公式，简单计算，属基础题。

5、B

【解析】

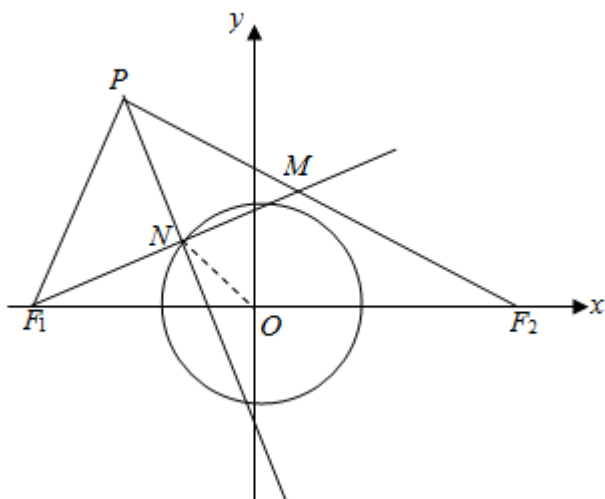
根据线段垂直平分线的性质，结合三角形中位线定理、圆锥曲线和圆的定义进行判断即可。

【详解】

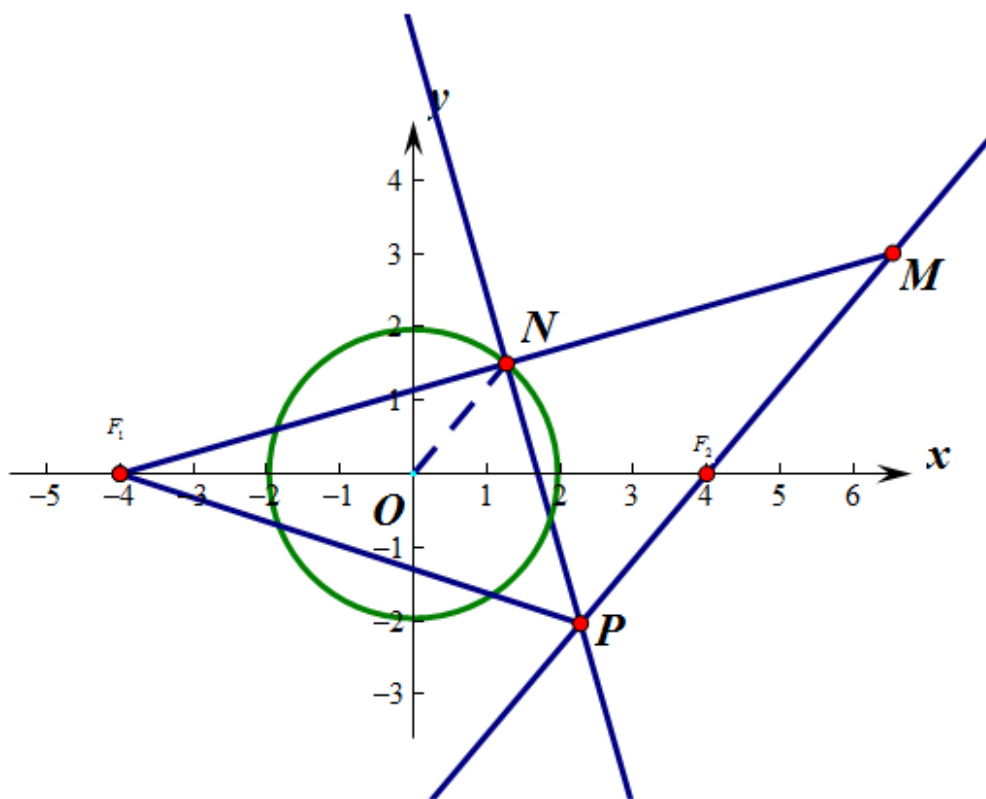
因为线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P ，如下图所示：

所以有 $PF_1 = PM = PF_2 - MF_2$ ，而 O, N 是中点，连接 ON ，故 $MF_2 = 2ON = 4$ ，

因此 $PF_2 - PF_1 = 4(4 < F_2F_1)$



当 N 在如下图所示位置时有，所以有 $PF_1 = PM = PF_2 + MF_2$ ，而 O, N 是中点，连接 ON ，



故 $MF_2 = 2ON = 4$ ，因此 $PF_1 - PF_2 = 4(4 < F_2F_1)$ ，

综上所述：有 $|PF_1 - PF_2| = 4(4 < F_2F_1)$ ，所以点 P 的轨迹是双曲线.

故选：B

【点睛】

本题考查了双曲线的定义，考查了数学运算能力和推理论证能力，考查了分类讨论思想.

6、B

【解析】

根据题意计算 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$, $T_n = 2^{n+1} - n - 2$, 解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore a_n = 2n - 1$.

$\because \{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1}$.

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_n} = a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-1}}$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 4 - 1) + \cdots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2.$$

$\because T_n < 2020$, $\therefore 2^{n+1} - n - 2 < 2020$, 解得 $n \leq 9$. 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 9.

故选: B.

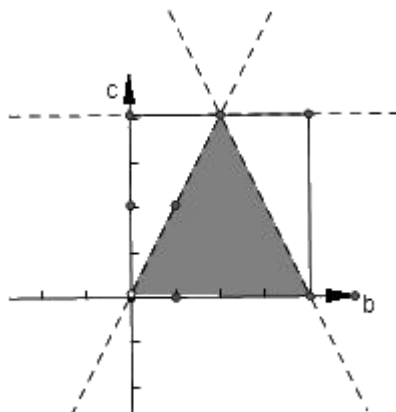
【点睛】

本题考查了等差数列, 等比数列, 分组求和, 意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

7、D

【解析】

由 $\begin{cases} f(2) \leq 12 \\ f(-2) \leq 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4 + 2b + c \leq 12 \\ 4 - 2b + c \leq 4 \end{cases}$, 分别以 b, c 为横纵坐标建立如图所示平面直角坐标系, 由图可知, $P(A) = \frac{1}{2}$.



8、A

【解析】

根据集合交集与补集运算, 即可求得 $A \cap C_U B$.

【详解】

集合 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x \geq 1\}$

所以 $C_U B = \{x | x < 1\}$

所以 $A \cap C_U B = \{x | x > 0\} \cap \{x | x < 1\} = \{x | 0 < x < 1\}$

故选:A

【点睛】

本题考查了集合交集与补集的混合运算,属于基础题.

9、D

【解析】

根据折线图依次判断每个选项得到答案.

【详解】

由绘制出的折线图知:

在 A 中, 各月最高气温平均值与最低气温平均值为正相关, 故 A 正确;

在 B 中, 全年中, 2 月的最高气温平均值与最低气温平均值的差值最大, 故 B 正确;

在 C 中, 全年中各月最低气温平均值不高于 10°C 的月份有 1 月, 2 月, 3 月, 11 月, 12 月, 共 5 个, 故 C 正确;

在 D 中, 从 2018 年 7 月至 12 月该市每天最高气温平均值与最低气温平均值, 先上升后下降, 故 D 错误.

故选: D.

【点睛】

本题考查了折线图, 意在考查学生的理解能力.

10、B

【解析】

由 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, 再由向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ 化简运算即可

【详解】

$\because \vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3,$

$\therefore$ 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $|\vec{a} + \vec{b}| \cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} \rangle = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{|\vec{b}|} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$

故选: B.

【点睛】

本题考查向量投影的几何意义, 属于基础题

11、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/958045051040006117>