senior high school education

1　指数幂的拓展

【最新课标】

通过对有理数指数幂$a^{\frac{m}{n}}$(a>0，且$a\neq 1$，m，n为整数，且n>0)，实数指数幂a^x(a>0，且$a\neq 1$，$x\in \mathbf{R}$)含义的认识，了解指数幂的拓展过程.

内容索引

01. 新知初探・自主学习

01. 新知初探・自主学习

教 材 要 点

要点一　分数指数幂

1．分数指数幂：给定正数a和正整数m，$n(n>1$，且m，n互素)，若存在唯一的正数b，使得$b^n=a^m$，则称b为a的__$\frac{m}{n}$__次幂，记作$b=$__$a^{\frac{m}{n}}$__．

返回导航

状元随笔

(1)所谓两个正整数m，n互素(也叫互质)指的是m，n除1之外没有其他正约数(此时，称$\frac{m}{n}$为既约分数)，例如：2和5互素，但是3和9就不是互素.

(2)对于$a^{\frac{m}{n}}$，显然不能理解成$\frac{m}{n}$个a相乘，那么，怎么理解它的意义呢？一是根据定义：满足$b^n=a^m$的正数b就是$a^{\frac{m}{n}}$；二是借助根式：有时也把$a^{\frac{m}{n}}$看成根式$\sqrt[n]{a^m}$，可以看出，$a^{\frac{m}{n}}$就是正数a^m的n次算术根．例

(3)当k是正整数时，$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{km}{kn}}$.

(4)对于正分数指数幂，规定其底数是正数，例如：虽然 $\sqrt[3]{-27}=-3$，但是不能写成$(-27)^{\frac{1}{3}}=-3$.

2．负分数指数幂：对于给定的正数a和正整数m，$n(n>1$，且m，n互素)，定义$a^{-\frac{m}{n}}=$__$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$__$=$__$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$__．

返回导航

状元随笔

(1)类比负整数指数幂的定义($a^{-n}=\frac{1}{a^n}$)，相对照而记忆；可以看出，负整数指数幂也是“化负为正”.

(2)定义了负分数指数幂之后，幂的指数就由原来的整数范围扩充到有理数范围.

要点二　分数指数幂与根式的互化

(1)正分数指数幂的根式形式：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0)$.

(2)负分数指数幂的根式形式：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0$，$m$，$n\in\mathbf{N}_+$，且$n>1$，且$m$，$n$互素).

(3)0的分数指数幂：0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义.

返回导航

要点三　无理数指数幂

一般地，给定正数a，对于任意的正无理数α，可以用类似的方法定义一个实数a^{α}，自然地，规定：$a^{-\alpha}=\frac{1}{a^{\alpha}}$，例如，$1^{-\sqrt{2}}=1$，$10^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$.

返回导航

基 础 自 测

1.判断正误．(正确的画“√”，错误的画“×”)

(1)根式一定是无理式．(×)

(2)在分数指数幂$a^{\frac{m}{n}}$中，m与n可以为任意整数．(×)

(3)a^p(p是无理数，$a>0$)是一个实数且是一个无理数．(×)

(4)函数$y=1$与$y=x^0$是同一函数．(×)

2．若$a^6=8(a>0)$，则$a=$(　　)

A．6^8　　B．8^6　　C.$6^{\frac{1}{8}}$　　D.$8^{\frac{1}{6}}$

答案：*D*

3．若将$4^{\frac{3}{2}}$写成根式，下列写法正确的是(　　)

A．$\sqrt[3]{4^2}$　　B．$\sqrt{4^3}$　　C．$\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$　　D．$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

答案：B

4．计算$64^{-\frac{2}{3}}$的值是$\underline{\quad \frac{1}{16} \quad}$．

解析：$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{16^3}}=\frac{1}{16}$.

02. 课堂探究·素养提升

题型1 分数指数幂的概念及应用——自主完成

1．在$(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$中，实数x的取值范围是$\underline{(-\frac{1}{2},\ +\infty)}$.

解析： 由分数指数幂的意义知，应有$2x+1>0$，

解得$x>-\frac{1}{2}$，故实数x的取值范围是$(-\frac{1}{2},\ +\infty)$.

2．将下列各式中的$a(a>0)$写成分数指数幂的形式：

①$a^3=5^4$；

解析：$a=5^{\frac{4}{3}}$；

②$a^3=(-2)^8$；

解析：$a=(-2)^{\frac{8}{3}}$，即$a=2^{\frac{8}{3}}$；

③$a^{-3}=10^{4m}(m\in\mathbf{N}_+)$；

解析：$a=10^{-\frac{4m}{3}}=\frac{1}{10^{\frac{4m}{3}}}=(\frac{1}{10})^{\frac{4m}{3}}$；

④$a^{-2}=6$.

解析：$a=6^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{6})^{\frac{1}{2}}$.

方法归纳

(1)分数指数幂是一个正实数，即$b=a^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow b^n=a^m$，其中$a$，$b$均为正实数，且$m$，$n\in \mathbf{Z}$，$m$，$n$互素.

(2)将$b^k=d$中的正实数b改写成分数指数幂的形式时，主要根据分数指数幂的意义，同时一定要注意式子中字母的取值要求.

题型2 分数指数幂与根式的互化——师生共研

例1 (1)将下列各式化为根式：①$x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$；

解析：$x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$；

②$8^{\frac{3}{4}}$；

解析：$8^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8^3}=\sqrt[4]{512}=4\sqrt[4]{2}$.

返回导航

(2)将下列各式化为分数指数幂：① $\sqrt[3]{x^6}$；

解析： $\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{6}{3}}=x^2$；

② $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

解析： $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$.

返回导航