江西省新余市2023-2024学年高三第二次模拟考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．一个容量为10的样本，其数据依次为：9，2，5，10，16，7，18，21，20，3，则该组数据的第60百分位数为（　　）

A．9　　B．10　　C．13　　D．16

2．已知点$Q(2,-2)$在抛物线C：$y^2=2px$上，F为抛物线的焦点，则$\triangle OQF$（O为坐标原点）的面积是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

3．已知$\vec{a}=\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(-\sqrt{3},\lambda\right)$，若$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，则$\lambda=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．±1　　D．±2

4．两个大人和4个小孩站成一排合影，若两个大人之间至少有1个小孩，则不同的站法有（　　）种.

A．240　　B．360　　C．420　　D．480

5．已知a,b为两条不同的直线，α,β为两个不同的平面，则（　　）

①若$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，且$\alpha\parallel\beta$，则$a\parallel b$；

②若$a\perp\alpha$，$b\parallel\beta$，且$\alpha\parallel\beta$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$；

③若$a\parallel\alpha$，$b\perp\beta$，且$\alpha\perp\beta$，则$a\parallel b$；

④若$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，且$\alpha\perp\beta$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

其中真命题的个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

6．已知直线$x-ay=0$交圆C：$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$于M，N两点，则“$\triangle MCN$为正三角形”是“$a=0$”的（　）

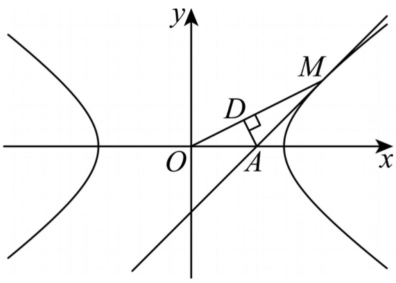
A．充分不必要条件　　　　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

7．已知x，y为正实数，且$x+y=2$，则$\dfrac{x+6y+6}{xy}$的最小值为（　）

A．12　　　　B．$3+2\sqrt{2}$　　　　C．$\dfrac{25}{2}$　　　　D．$\dfrac{6\sqrt{2}-3}{2}$

8．如图，已知M为双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一动点，过$M$作双曲线$E$的切线交$x$轴于点A，过点A作$AD\perp OM$于点$D$，$|OD|\cdot|OM|=2b^2$，则双曲线$E$的离心率为（　）



A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

二、多选题

9．已知z_1,z_2是两个虚数，则下列结论中正确的是（　）

A．若$z_1=\overline{z}_2$，则z_1+z_2与z_1z_2均为实数　　B．若z_1+z_2与z_1z_2均为实数，则$z_1=\overline{z}_2$

C．若 z_1, z_2 均为纯虚数，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数　　D．若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数，则 z_1, z_2 均为纯虚数

10．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x$，则下列说法正确的是（　）

A．$f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-2-\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right]$

B．$f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi\pi}{6}+\frac{k}{2},0\right)$，$k\in Z$

C．$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单减区间为 $\left(\frac{\pi\pi}{6},\frac{\ }{2}\right)$

D．$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 上的极值点个数为 1

11．已知定义在实数集 **R** 上的函数 $f\left(x\right)$，其导函数为 $f'\left(x\right)$，且满足

$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+xy$，$f\left(1\right)=0, f'\left(1\right)=\frac{1}{2}$，则（　）

A．$f\left(x\right)$ 的图像关于点 $\left(1,0\right)$ 成中心对称

B．$f'(2)=\frac{3}{2}$

C．$f\left(2024\right)=1012\times 2023$

D．$\sum_{k=1}^{2024} f'(k)=1012\times 2024$

三、填空题

12．已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(3,2^2\right)$，则 $D\left(3X+2\right)$ 的值为______.

13．在公差为正数的等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=3$，a_3，a_6，$\frac{3}{2}a_8$成等比数列，则数列$\{a_n\}$的前10项和为______.

14．如图1，在直角梯形$ABCD$中，$AB /\!/ CD$，$AB\perp AD$，$AB=6\sqrt{3}$，$CD=8\sqrt{3}$，$AD=6$，点E，F分别为边AB，CD上的点，且$EF /\!/ AD$，$AE=4\sqrt{3}$.将四边形$AEFD$沿EF折起，如图2，使得平面$AEFD\perp$平面$EBCF$，点M是四边形$AEFD$内（含边界）的动点，且直线MB与平面$AEFD$所成的角和直线MC与平面$AEFD$所成的角相等，则当三棱锥$M-BEF$的体积最大时，三棱锥$M-BEF$的外接球的表面积为_____.

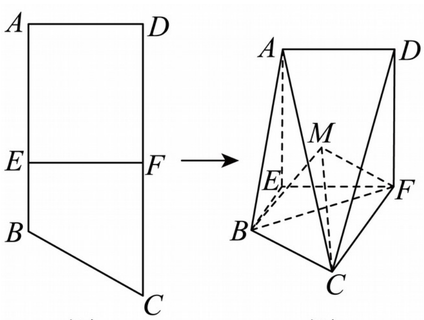


图1　　图2

四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-b^2\right)\sin B$.

(1)求角B；

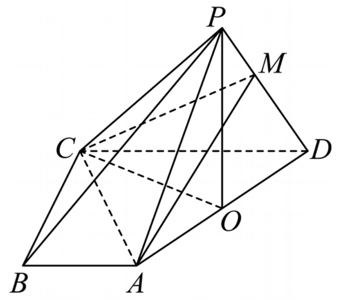
(2)若$\angle ABC$的平分线交AC于点D，$a=3$，$c=4$，求BD的长.

16．已知函数$f\left(x\right)=\ln^{2}x+\left(\mathrm{e}+a\right)x-1$，$g\left(x\right)=\left(2a+\mathrm{e}\right)x+1$.

(1)当$a=\mathrm{e}$时，求函数$f\left(x\right)$的最小值；

(2)若$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，求$a$的取值范围.

17．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是直角梯形，$AB\parallel CD$，$\angle ABC=90^{\circ}$，且$PA=PD=AD$，$PC=PB$.



(1)若O为AD的中点，证明：平面$POC\perp$平面$ABCD$；

(2)若$\angle CDA=60^{\circ}$，$AB=\frac{1}{2}CD=1$，线段PD上的点M满足$\overline{DM}=\lambda\overline{DP}$，且平面$PCB$与平面$ACM$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求实数$\lambda$的值.

18．近年来，某大学为响应国家号召，大力推行全民健身运动，向全校学生开放了A，B两个健身中心，要求全校学生每周都必须利用课外时间去健身中心进行适当的体育锻炼.

(1)该校学生甲、乙、丙三人某周均从A，B两个健身中心中选择其中一个进行健身，若甲、乙、丙该周选择A健身中心健身的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，求这三人中这一周恰好有一人选择A健身中心健身的概率；

(2)该校学生丁每周六、日均去健身中心进行体育锻炼，且这两天中每天只选择两个健身中

心的其中一个，其中周六选择A健身中心的概率为$\frac{2}{3}$.若丁周六选择A健身中心，则周日仍选择A健身中心的概率为$\frac{1}{3}$；若周六选择B健身中心，则周日选择A健身中心的概率为$\frac{3}{4}$.求丁周日选择B健身中心健身的概率；

(3)现用健身指数$k\left(k\in[0,10]\right)$来衡量各学生在一个月的健身运动后的健身效果，并规定k值低于1分的学生为健身效果不佳的学生，经统计发现从全校学生中随机抽取一人，其k值低于1分的概率为$p\left(0<p<1\right)$，现从全校学生中随机抽取一人，如果抽取到的学生不是健身效果不佳的学生，则继续抽取下一个，直至抽取到一位健身效果不佳的学生为止，但抽取的总次数不超过n（n足够大），求抽取次数X的分布列和数学期望.

19．通过研究，已知对任意平面向量$\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把$\overrightarrow{AB}$绕其起点$A$沿逆时针方向旋转$\theta$角得到向量$\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点$B$绕点$A$逆时针方向旋转$\theta$角得到点$P$，

(1)已知平面内点$A\left(-\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$，点$B\left(\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$，把点$B$绕点$A$逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$得到点$P$，求点$P$的坐标：

(2)已知二次方程$x^2+y^2-xy=1$的图像是由平面直角坐标系下某标准椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$绕原点$O$逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$所得的斜椭圆$C$，

（i）求斜椭圆C的离心率；

（ⅱ）过点$Q\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$作与两坐标轴都不平行的直线$l_1$交斜椭圆$C$于点$M$、$N$，过原点$O$作直线$l_2$与直线$l_1$垂直，直线$l_2$交斜椭圆$C$于点$G$、$H$，判断$\frac{\sqrt{2}}{|MN|}+\frac{1}{|OH|^2}$是否为定值，若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

参考答案：

1．C

【分析】将这组数据从小到大排列后借助百分位数定义计算即可得.

【详解】将该组数据从小到大排列：2，3，5，7，9，10，16，18，20，21，

由$10\times0.6=6$，有$\frac{10+16}{2}=13$，故该组数据的第60百分位数为13.

故选：C.

2．A

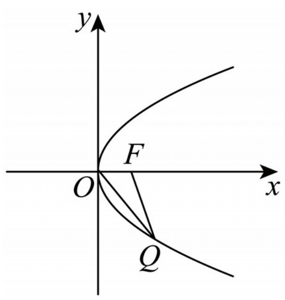
【分析】将点Q代入抛物线C的方程，即可求解p，再结合抛物线的公式，即可求解

【详解】$\because$点$Q(2,-2)$在抛物线$C:y^2=2px$上，F为抛物线C的焦点，

$\therefore 4=4p$，解得$p=1$，

故抛物线C的方程为$y^2=2x$，$F(\frac{1}{2},0)$，

则$\triangle OQF$的面积$S_{\triangle OQF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$.



故选：A.

3．A

【分析】利用向量积的运算律计算$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$，再利用向量数量积的定义计算$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$，列出相关等式可得$\lambda$的值.

【详解】因为$\vec{a}=\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(-\sqrt{3},\lambda\right)$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}\lambda=-3+2\sqrt{3}\lambda$，

$\vec{a}+\vec{b}=\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3},\lambda\right)=\left(0,2\sqrt{3}+\lambda\right)$，

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+\lambda\right)^2}=\left|2\sqrt{3}+\lambda\right|$，

因为$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=-3+2\sqrt{3}\lambda+3+\lambda^2=\lambda^2+2\sqrt{3}\lambda$，

又$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi 1}{3}=\left|2\sqrt{3}+\lambda\right|\times\sqrt{3+\lambda^2}\times\left(-\frac{}{2}\right)$，

所以$\lambda^2+2\sqrt{3}\lambda=\left|2\sqrt{3}+\lambda\right|\times\sqrt{3+\lambda^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得$\lambda=1$或$\lambda=-1$，

因为$2\sqrt{3}+\lambda\neq 0$，所以$\lambda^2+2\sqrt{3}\lambda<0$，

解得$-2\sqrt{3}<\lambda<0$，

所以$\lambda=-1$.

故选：A.

4．D

【分析】由题意可得两个大人不相邻，不相邻问题用插空法即可得.

【详解】若两个大人之间至少有1个小孩，即两个大人不相邻，

故共有$A_4^4A_5^2=24\times 20=480$种.

故选：D.

5．B

【分析】根据空间直线与平面平行、垂直，平面与平面平行、垂直的判定定理和性质定理，逐项判断，即可得出结论.

【详解】由$b\perp\beta$且$\alpha /\!/ \beta$，可得$b\perp\alpha$，

而垂直同一个平面的两条直线相互平行，故①正确；

由于$\alpha /\!/ \beta$，$a\perp\alpha$，所以$a\perp\beta$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$，故②正确；

若a与平面α,β的交线平行，则$\vec{a}\perp\vec{b}$，

故不一定有$a /\!/ b$，故③错误；

设$\alpha\cap\beta=l$，在平面β内作直线$c\perp l$，

$\alpha\perp\beta$，则$c\perp\alpha$，又$a\perp\alpha$，所以$a P c$，

$b\perp\beta,c\subset\beta$，所以$b\perp c$，从而有$b\perp a$，

故④正确.

因此，真命题的个数是3.

故选：B

【点睛】本题考查了空间线面位置关系的判定和证明，其中熟记空间线面位置中的平行与垂直的判定定理与性质定理是解题的关键，考查直观想象能力，属于基础题.

6．B

【分析】求出圆的圆心及半径后，结合正三角形的性质可计算出当$\triangle MCN$为正三角形时a的值，结合充分条件与必要条件定义即可判断.

【详解】由C：$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y=0$可得其圆心为$C\left(\sqrt{3},1\right)$，半径$r=2$，

圆心到直线 $x-ay=0$ 的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{3}-a\right|}{\sqrt{1+a^2}}$，

若 $\triangle MCN$ 为正三角形，则有 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，即 $\frac{\left|\sqrt{3}-a\right|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{3}$，

即 $a^2+\sqrt{3}a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=-\sqrt{3}$，

故“$\triangle MCN$ 为正三角形”是“$a=0$”的必要不充分条件.

故选：B.

7．C

【分析】借助“1”的活用将分式其次化后结合基本不等式计算即可得.

【详解】由 $x+y=2$，则 $\frac{x+6y+6}{xy}=\frac{2x+12y+12}{2xy}=\frac{\left(x+y\right)x+6\left(x+y\right)y+3\left(x+y\right)^2}{2xy}$

$=\frac{4x^2+9y^2+13xy}{2xy}=\frac{2x}{y}+\frac{9y}{2x}+\frac{13}{2}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{9y}{2x}}+\frac{13}{2}=\frac{25}{2}$，

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{9y}{2x}$，即 $x=\frac{6}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ 时，等号成立.

故选：C.

8．B

【分析】由 MA 与双曲线相切，可得 $l_{MA}:\frac{m}{a^2}x-\frac{n}{b^2}y=1$，即可得 $A\left(\frac{a^2}{m},0\right)$，作 $MB\perp x$ 轴于点 B，结合相似三角形的性质可得 $\left|OD\right|\cdot\left|OM\right|=\left|OA\right|\cdot\left|OB\right|$，计算即可得 $\left|OD\right|\cdot\left|OM\right|$ 的值，从而求出离心率.

【详解】设 $M\left(m,n\right)$，则 $l_{MA}:\frac{m}{a^2}x-\frac{n}{b^2}y=1$，令 $y=0$，则 $x=\frac{a^2}{m}$，故 $A\left(\frac{a^2}{m},0\right)$，

过点 M 作 $MB \perp x$ 轴于点 B，则 $B(m,0)$，

由 $AD \perp OM$， $MB \perp x$ 轴，故 $\triangle OAD$ 与 $\triangle OMB$ 相似，

故 $\frac{|OD|}{|OB|}=\frac{|OA|}{|OM|}$，及 $|OD|\cdot|OM|=|OA|\cdot|OB|$，

即 $|OD|\cdot|OM|=|OA|\cdot|OB|=\frac{a^2}{m}\times m=a^2$.

又 $|OD|\cdot|OM|=2b^2$，所以 $2b^2=a^2$，所以 $a^2=2(c^2-a^2)$，

即 $2c^2=3a^2$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

其中双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，证明如下：

不妨先探究双曲线在第一象限的部分（其他象限由对称性同理可得）.

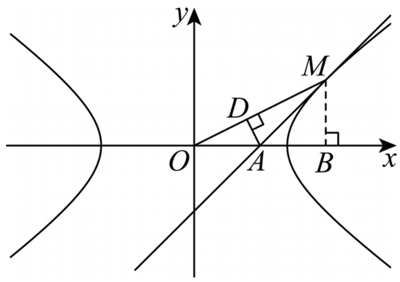
由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $y=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}$，所以 $y'=\frac{\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}}$，

则在 (x_0,y_0) 的切线斜率 $y'|_{x=x_0}=\frac{\frac{b^2}{a^2}x_0}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_0^2-b^2}}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，

所以在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为： $y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$，

又有 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，化简即可得切线方程为： $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

故选：B.



【点睛】关键点点睛：本题关键在于构造相似三角形，从而将求$|OD|\cdot|OM|$的值，转化为求$|OA|\cdot|OB|$的值.

9．ABC

【分析】根据复数的四则运算，结合共轭复数的定义即可求解ABC，举反例即可求解D.

【详解】设$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}\left(a,b,c,d\in\mathbf{R},b\neq0,d\neq0\right)$．$z_1+z_2=a+c+\left(b+d\right)\mathrm{i}$，

$z_1z_2=ac-bd+\left(ad+bc\right)\mathrm{i}$．

若$z_1=\overline{z_2}$，则$a=c$，$b+d=0$，所以$z_1+z_2=2a\in\mathbf{R}$，$z_1z_2=a^2+b^2\in\mathbf{R}$，所以A正确；

若z_1+z_2与z_1z_2均为实数，则$b+d=0$，且$ad+bc=0$，又$b\neq0$，$d\neq0$，所以$a=c$，所以B正确；

若z_1，z_2均为纯虚数，则$a=c=0$，所以$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{c}{d}\in\mathbf{R}$，所以C正确；

取$z_1=2+2\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，则$\dfrac{z_1}{z_2}$为实数，但z_1，z_2不是纯虚数，所以D错误.

故选：ABC.

10．AD

【分析】借助三角恒等变换公式将原函数化为正弦型函数后，借助正弦型函数的值域、对称性、单调性与极值点逐项计算并判断即可得.

【详解】$f\left(x\right)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2x=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x-\sqrt{3}=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$，

对 A：由 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，则 $f(x)\in\left[-2-\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right]$，故 A 正确；

对 B：令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in Z$，解得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

故 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},-\sqrt{3}\right)$，$k\in Z$，故 B 错误；

对 C：令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单减区间为 $\left(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right)$，故 C 错误；

对 D：令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，即 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 上的极值点有 $x=\frac{5\pi}{12}$ 一个，故 D 正确.

故选：AD.

11．BCD

【分析】对 A、B，利用赋值法进行计算即可得；对 C、D，利用赋值法后结合数列的性质进行相应的累加及等差数列公式法求和即可得.

【详解】对 A：令 $x=y=0$，则有 $f(0)=f(0)+f(0)+0$，即 $f(0)=0$，

令 $x=y=1$，则有 $f(2)=f(1)+f(1)+1$，又 $f(1)=0$，故 $f(2)=1$，$f(x)$ 不关于 $(1,0)$ 对称，故 A 错误；

对于 B，令 $y=1$，则有 $f(x+1)=f(x)+f(1)+x=f(x)+x$，

两边同时求导，得 $f'(x+1)=f'(x)+1$，