顺义区 2024 届高三第二次质量监测

数学试卷

考生须知

1.本试卷共 6 页，共两部分，21 道小题，满分 150 分.考试时间 120 分钟.

2.在答题卡上准确填写学校、姓名、班级和教育 ID 号.

3.试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.

4.在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $U=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|x^2\le 4\right\}$，$A=\{1,2\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $[-2,0]$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-2,-1\}$　　D. $\{-2,-1,0\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出全集，然后根据补集运算可得.

【详解】因为 $A=\{1,2\}$，$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以 $\complement_U A=\{-2,-1,0\}$.

故选：D

2. 已知复数 z 的共轭复数 $\overline{z}$ 满足 $(1+\mathrm{i})\cdot\overline{z}=2\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数除法运算求出 $\overline{z}$，然后即可求解.

【详解】因为 $(1+\mathrm{i})\cdot\overline{z}=2\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$，

所以 $z=1-\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2$.

故选：C

3. 在$(2x-1)^5$的展开式中，x^4的系数为（　　）

A. -80　　B. -40　　C. 40　　D. 80

【答案】A

【解析】

【分析】利用二项式定理写出其通项，求得$k=1$时，展开式中含有x^4项，代入计算可得结果.

【详解】由二项式$(2x-1)^5$的通项为$C_5^k(2x)^{5-k}(-1)^k$可得，

当$5-k=4$，即$k=1$时，展开式中含有x^4项，

此时$C_5^1(2x)^4(-1)^1=-16C_5^1x^4=-80x^4$，

因此x^4的系数为-80.

故选：A

4. 已知$a=\log_4 2$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^e$，$c=\pi^{\frac{1}{2}}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】

【分析】利用换底公式计算a，利用指数函数单调性判断b，c即可得答案.

【详解】因为$a=\log_4 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 4}=\frac{1}{2}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^e<\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$c=\pi^{\frac{1}{2}}>\pi^0=1$，

所以$c>a>b$.

故选：D

5. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$\lg a_n+\lg a_{n+1}=\lg 2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$S_9=$（　　）

A. 511　　B. 61　　C. 41　　D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数运算法则可求得$a_na_{n+1}=2^n$，即可知数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项分别成等比数列，再由分组求和可得结果.

【详解】由 $\lg a_n+\lg a_{n+1}=\lg 2^n$ 可得 $\lg a_n a_{n+1}=\lg 2^n$，

即 $a_n a_{n+1}=2^n$，所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$，两式相除可得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$；

即 $\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_5}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{a_6}{a_4}=2$，

由 $a_1=1$ 可得 $a_2=2$，因此数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 $a_1=1$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

偶数项是以 $a_2=2$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

所以 $S_9=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_8)$

$=\dfrac{1\times(1-2^5)}{1-2}+\dfrac{2\times(1-2^4)}{1-2}=61$.

故选：B

6. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为 C 上一点，直线 PF 与 l 相交于点 Q，与 y 轴交于点 M .若 F 为 PQ 的中点，则 $|PM|=$（　　）

A. 4　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】先根据抛物线的几何性质求出点 P 的横坐标，从而可得点 P 的坐标，进而可求出直线 PF 的方程，进而可求得 M 点的坐标，再根据两点间的距离公式即可得解.

【详解】$F(1,0)$，准线 l 的方程为 $x=-1$，

过点 P 左 $PP'\perp l$，垂足为 P'，

则 $PP'//OF$，

因为 F 为 PQ 的中点，所以 $\dfrac{|PP'|}{2}=2$，所以 $|PP'|=4$，

所以 $|PF|=|PP'|=4=x_p+1$，所以 $x_p=3$，则 $y_p^2=12$，

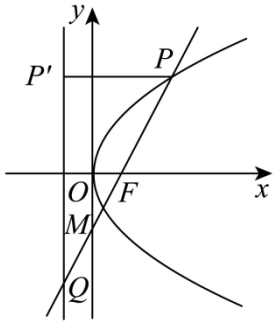
根据抛物线的对称性不妨设 P 在第一象限，则 $P(3,2\sqrt{3})$，

则 $k_{PF}=\dfrac{2\sqrt{3}-0}{3-1}=\sqrt{3}$，

所以直线PF的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$，

令$x=0$，则$y=-\sqrt{3}$，即$M\left(0,-\sqrt{3}\right)$，

所以$|PM|=\sqrt{(0-3)^2+\left(-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2}=6$.



故选：B.

7. 若函数$f(x)=\begin{cases}x-1,x<0\\0,x=0\\x+1,x>0\end{cases}$，则“$x_1+x_2>0$”是“$f(x_1)+f(x_2)>0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

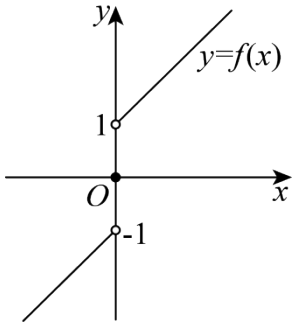
【分析】根据题意分析可知$f(x)$为奇函数且在**R**上单调递增，分析可知$x_1+x_2>0$等价于$f(x_1)+f(x_2)>0$，即可得结果.

【详解】由题意可知：$f(x)$的定义域为**R**，且$f(0)=0$，

若$x>0$，则$-x<0$，可知$f(x)+f(-x)=(x+1)+(-x-1)=0$，

若$x<0$，同理可得$f(x)+f(-x)=0$，所以$f(x)$为奇函数，

作出函数$f(x)$的图象，如图所示，



由图象可知 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

若 $x_1+x_2>0$，等价于 $x_1>-x_2$，等价于 $f\left(x_1\right)>f\left(-x_2\right)=-f\left(x_2\right)$，等价于 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>0$，

所以“$x_1+x_2>0$”是“$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>0$”的充要条件.

故选：C.

8. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是线段 BC_1 上的动点，有下列四个说法：

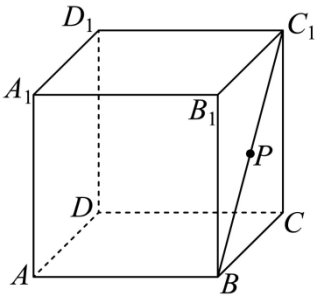
①存在点 P，使得 $D_1P//$ 平面 A_1DB；

②对于任意点 P，四棱锥 $P-A_1ADD_1$ 体积为定值；

③存在点 P，使得 $A_1P\perp$ 平面 C_1DB；

④对于任意点 P，$\triangle A_1DP$ 都是锐角三角形.

其中，不正确的是（　　）



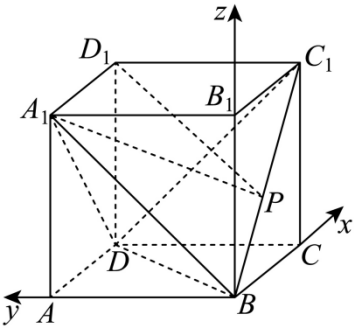
A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

【答案】C

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，由直线的方向向量与平面的法向量的位置关系判断说法①；由棱锥的底面积和高为定值得体积为定值判断说法②；利用向量数量积验证垂直关系判断说法③；利用向量的模和向量夹角的计算，验证说法④.

【详解】以 B 为原点，$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，



不妨设正方体棱长为 1，

则 $B(0,0,0), C(1,0,0), A(0,1,0), D(1,1,0)$，$B_1(0,0,1), C_1(1,0,1), A_1(0,1,1), D_1(1,1,1)$，

设 $P(a,0,a)(0 \le a \le 1)$，

$\overrightarrow{D_1P} = (a-1,-1,a-1)$，$\overrightarrow{BD} = (1,1,0)$，$\overrightarrow{BA_1} = (0,1,1)$，

平面 A_1DB 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，$\begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = x + y = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \cdot \vec{n} = y + z = 0 \end{cases}$，

令 $x = 1$，则 $y = -1, z = 1$，即 $\vec{n} = (1,-1,1)$，

若 $\overrightarrow{D_1P} \cdot \vec{n} = a - 1 + 1 + a - 1 = 0$，得 $a = \frac{1}{2}$，

则 $a = \frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{D_1P} \perp \vec{n}$，又 $D_1P \not\subset$ 平面 A_1DB，所以 $D_1P //$ 平面 A_1DB，

即点 P 为 BC_1 中点时，$D_1P //$ 平面 A_1DB，说法①正确；

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $A_1ADD_1 //$ 平面 B_1BCC_1，$P \in$ 平面 B_1BCC_1，

则 P 点到平面 A_1ADD_1 的距离为定值，又正方形 A_1ADD_1 面积为定值，

所以对于任意点 P，四棱锥 $P - A_1ADD_1$ 体积为定值，说法②正确；

$\overrightarrow{A_1P} = (a,-1,a-1)$，$\overrightarrow{BD} = (1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1} = (1,0,1)$，

若 $A_1P \perp$ 平面 C_1DB，则有 $\begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A_1P} = a - 1 = 0 \\ \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{A_1P} = a + a - 1 = 0 \end{cases}$，方程组无解，

所以不存在点 P，使得 $A_1P \perp$ 平面 C_1DB，说法③错误；

$\overrightarrow{A_1D} = (1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1P} = (a,-1,a-1)$，$\overrightarrow{DP} = (a-1,-1,a)$，

$\left|\overrightarrow{A_1D}\right| = \sqrt{2}$，$\left|\overrightarrow{A_1P}\right| = \left|\overrightarrow{DP}\right| = \sqrt{2a^2 - 2a + 2}$，

则 $\triangle A_1DP$ 中，$\angle PDA_1 = \angle PA_1D$，都是锐角，

$\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{DP} = a(a-1) + 1 + a(a-1) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$，$\angle A_1PD$ 也是锐角，

所以对于任意点 P，$\triangle A_1DP$ 都是锐角三角形，说法④正确.

只有说法③不正确.

故选：C.

9. 已知在平面内，圆$O:x^2+y^2=1$，点P为圆外一点，满足$|PO|=2$，过点P作圆O的两条切线，切点分别为A，B．若圆O上存在异于A，B的点M，使得$\overrightarrow{PM}=2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}$，则$\lambda$的值是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】由$|PO|=2$，得出点P在以原点为圆心，半径为2的圆上，设PA与以原点为圆心半径为2的圆交于点C，连接CO，再说明点C,O,B三点共线，由$PA=\frac{1}{2}PC$，得出$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}$，得出点$C,M,B$三点共线，由$2CM=MB$即可求解．

【详解】因为$|PO|=2$，所以点P在以原点为圆心，半径为2的圆上，

做出图形，设PA与以原点为圆心半径为2的圆交于点C，连接CO，

因为PA,PB与圆O相切于A，B，

所以$PA\perp OA,PB\perp OB$，

在$\mathrm{Rt}\triangle APO$中，因为$OA=1,OP=2$，所以$\angle AOP=60°$，

同理可得$\angle BOP=60°$，

又因为$PA\perp OA$，由垂径定理得$AC=AB$，$\angle AOC=60°$，

因为$\angle AOC+\angle AOP+\angle POB=180°$，

所以点C,O,B三点共线，

因为$PA=\frac{1}{2}PC$，

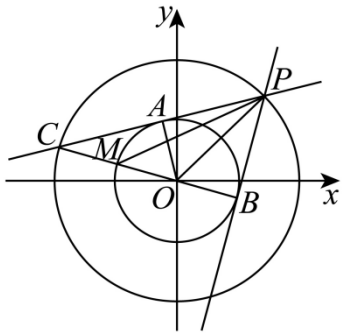
所以$\overrightarrow{PM}=2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PC}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}$，

所以点C,M,B三点共线，则点M为CO与圆O的交点，

因为$CM=CO-OM=1,BM=2$，

所以$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$，即$\lambda=\frac{2}{3}$，

故选：A．



10. 设a_1，a_2，a_3，…，a_7是1，2，3，…，7的一个排列.且满足$|a_1-a_2|\geq|a_2-a_3|\geq\cdots\geq|a_6-a_7|$，则$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_6-a_7|$的最大值是（　　）

A. 23　　B. 21　　C. 20　　D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】依据绝对值的几何意义和题给条件即可求得$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_6-a_7|$的最大值.

【详解】$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_6-a_7|$即为相邻两项之差的绝对值之和，

则在数轴上重复的路径越多越好，又$|a_1-a_2|\geq|a_2-a_3|\geq\cdots\geq|a_6-a_7|$，

比如$1\to7\to2\to6\to3\to5\to4$，其对应的一个排列为$1,7,2,6,3,5,4$

则$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_6-a_7|$的最大值是6+5+4+3+2+1=21

故选：B

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5道小题，每题5分，共25分，把答案填在答题卡上.

11. 函数$f(x)=\sqrt{1-x}+\frac{1}{x}$的定义域为_____.

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1]$

【解析】

【分析】由题意列不等式组即可求得.

【详解】要使函数$f(x)=\sqrt{1-x}+\frac{1}{x}$有意义，

只需$\begin{cases}1-x\geq0,\\x\neq0,\end{cases}$解得：$x\leq1$且$x\neq0$，

从而$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1]$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup(0,1]$

12. 在$\triangle ABC$中，$c=3$，$a+b=7$，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，则$\triangle ABC$面积为_____.

【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】将$a+b=7$两边平方，结合余弦定理可得$ab=12$，利用平方关系求出$\sin C$即可得解.

【详解】由余弦定理得$a^2+b^2-\dfrac{4}{3}ab=9$①，

又$a+b=7$，得$a^2+b^2+2ab=49$②，

联立①②解得$ab=12$，

因为$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$

13. 若非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|>|\vec{b}|>|\vec{c}|$，且$\vec{b}=(2,2)$，则能使得$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$成立的一组$\vec{a},\vec{c}$可以是

$\vec{a}=$_____，$\vec{c}=$_____

【答案】　①. $(3,0)$（答案不唯一）　②. $(1,0)$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据数乘定义可判断$\vec{a}//\vec{c}$，结合$|\vec{a}|>|\vec{b}|>|\vec{c}|$即可求解.

【详解】因为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，即$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle\cdot\vec{a}$，

所以$\vec{a}//\vec{c}$，且$|\vec{a}||\vec{b}||\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|\cdot|\vec{c}|=|\vec{b}||\vec{c}||\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle|\cdot|\vec{a}|$，即$|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|=|\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle|$，

又$|\vec{a}|>|\vec{b}|>|\vec{c}|$，即$|\vec{a}|>2\sqrt{2}>|\vec{c}|$，

所以满足$|\vec{a}|>2\sqrt{2}>|\vec{c}|$，且$\vec{a}//\vec{c}$的向量$\vec{a},\vec{c}$都满足条件，

故可取$\vec{a}=(3,0),\vec{c}=(1,0)$.

故答案为：$(3,0)$；$(1,0)$（答案不唯一）.

14. 已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c$，若点$P\left(\frac{1}{2}c,\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$在双曲线$E$上，则$E$的离心率等于_____.

【答案】$\sqrt{3}+1$##$1+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据点在双曲线上、双曲线的基本性质及离心率的定义计算即可求解.

【详解】因为点$P\left(\frac{1}{2}c,\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$在双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上，

代入坐标有$\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4b^2}=1$，且双曲线满足$c^2=a^2+b^2$，离心率$e=\frac{c}{a}$，

所以有$\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4\left(c^2-a^2\right)}=1$，即$e^2-\frac{3e^2}{e^2-1}=4$，

化简可得$e^4-8e^2+4=0$，所以$e^2=\frac{8\pm\sqrt{48}}{2}=4\pm2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\pm1\right)^2$，

因为双曲线离心率$e=\frac{c}{a}>1$，所以$e=\sqrt{3}+1$或$e=\sqrt{3}-1$（舍去），

故答案为：$\sqrt{3}+1$.

15. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3+x^2}-(kx+b)$，给出下列四个结论：

①当$k=0$时，对任意$b\in\mathbf{R}$，$f(x)$有1个极值点；

②当$k>\frac{1}{8}$时，存在$b\in\mathbf{R}$，使得$f(x)$存在极值点；

③当$b=0$时，对任意$k\in\mathbf{R}$，$f(x)$有一个零点；

④当$0<b<\frac{1}{3}$时，存在$k\in\mathbf{R}$，使得$f(x)$有3个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

【答案】①④

【解析】

【分析】对①：借助导数研究函数的单调性即可得极值点个数；对②：借助导函数的导函数研究导函数可得导函数无零点，故函数不存在极值点；对③：举出反例即可得；对④：将零点个数转化为直线$y=kx+b$与曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$的交点个数，从而可通过研究过$(0,b)$的曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$

的切线，结合零点的存在性定理得到直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{3+x^2}$ 的关系.

【详解】对①：当 $k=0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+x^2}-b$，$f'\left(x\right)=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$，

则 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，

故对任意 $b\in\mathbf{R}$，$f\left(x\right)$ 有 1 个极大值点 $x=0$，故①正确；

对②：当 $k>\dfrac{1}{8}$ 时，$f'\left(x\right)=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}-k$，

若 $f\left(x\right)$ 存在极值点，则 $f'\left(x\right)$ 有变号零点，则 $k=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$ 必须有解，

令 $g\left(x\right)=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$，

则 $g'\left(x\right)=\dfrac{-2\left(3+x^2\right)^2+8x^2\left(3+x^2\right)}{\left(3+x^2\right)^4}=\dfrac{-2x^2+8x^2-6}{\left(3+x^2\right)^3}=\dfrac{6\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(3+x^2\right)^3}$，

故当 $x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(-1,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，

故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$、$\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1,1\right)$ 上单调递减，

又 $x\geq0$ 时，$g\left(x\right)\leq0$，$g\left(-1\right)=\dfrac{-2\times\left(-1\right)}{\left(3+1\right)^2}=\dfrac{1}{8}$，

即 $g\left(x\right)\leq\dfrac{1}{8}$ 恒成立，故当 $k>\dfrac{1}{8}$ 时，$k=\dfrac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}$ 无解，故②错误；

对③：当 $b=0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+x^2}-kx$，

当 $k=0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+x^2}>0$，此时函数 $f\left(x\right)$ 无零点，故③错误；

对④：当 $0<b<\dfrac{1}{3}$ 时，若存在 $k\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(x\right)$ 有 3 个零点，

则直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{3+x^2}$ 有三个不同交点，

由直线 $y=kx+b$ 过点 $\left(0,b\right)$，曲线 $y=\dfrac{1}{3+x^2}$ 过点 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，

又$0<b<\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3+x^2}$是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，

故当$k<0$时，直线$y=kx+b$与曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$在第二象限必有一交点，

同理，当$k>0$时，直线$y=kx+b$与曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$在第一象限必有一交点，

过点$(0,b)$作曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$的切线，设切点为$\left(x_0,\frac{1}{3+x_0^2}\right)$，

则切线方程为$y-\frac{1}{3+x_0^2}=\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2}\left(x-x_0\right)$，

即$b-\frac{1}{3+x_0^2}=\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2}\times\left(-x_0\right)$，则$b=\frac{3\left(x_0^2+1\right)}{\left(3+x_0^2\right)^2}$，

由$0<b<\frac{1}{3}$，则$\frac{3\left(x_0^2+1\right)}{\left(3+x_0^2\right)^2}<\frac{1}{3}$，即$\left(x_0^2+1\right)^2-5\left(x_0^2+1\right)+4>0$，

即$\left(x_0^2+1-4\right)\left(x_0^2+1-1\right)=x_0^2\left(x_0^2-3\right)>0$，即$x_0^2\geq 3$，

故当$0<b<\frac{1}{3}$时，存在$x_0\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，

使曲线$y=\frac{1}{3+x^2}$有过点$(0,b)$的切线，且切点为$\left(x_0,\frac{1}{3+x_0^2}\right)$，

当$x_0>\sqrt{3}$时，切线斜率为$\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2}<0$，

则当$k\in\left(\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2},0\right)$时，有$f\left(x_0\right)<0$，又$f(0)=\frac{1}{3}-b>0$，

则存在$x_1\in\left(0,x_0\right)$，使$f\left(x_1\right)=0$，

此时函数$y=kx+b$单调递减，而$y=\frac{1}{3+x^2}>0$恒成立，

故存在$x_2\in\left(x_0,+\infty\right)$，使$f\left(x_2\right)=0$，

即当$x_0>\sqrt{3}$时，存在$k\in\left(\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2},0\right)$，使得$f(x)$有3个零点，

同理可得，当$x_0<-\sqrt{3}$时，存在$k\in\left(0,\frac{-2x_0}{\left(3+x_0^2\right)^2}\right)$，使得$f(x)$有3个零点，故④正确.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/958107040026006063