2024中考数学常见几何模型归纳总结—圆中的重要模型之阿基米德折弦（定理）模型、婆罗摩笈多（定理）模型

圆在中考数学几何模块中占据着重要地位，也是学生必须掌握的一块内容，本专题就圆形中的重要模型（阿基米德折弦（定理）模型、婆罗摩笈多（布拉美古塔）（定理）模型）进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型1.阿基米德折弦模型

【模型解读】折弦:从圆周上任一点出发的两条弦，所组成的折线，我们称之为该图的一条折弦。

一个圆中一条由两长度不同的弦组成的折弦所对的两段弧的中点在较长弦上的射影，就是折弦的中点。

如图1所示，AB 和 BC 是⊙O的两条弦(即 ABC 是圆的一条折弦)，$BC>AB$，M 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线之垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$。

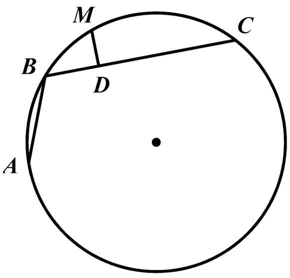


图1

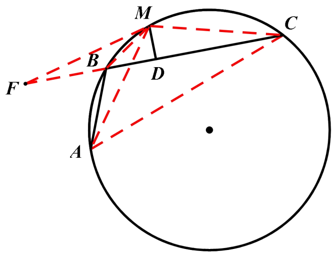


图2

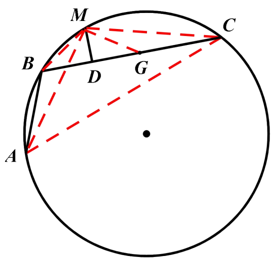


图3

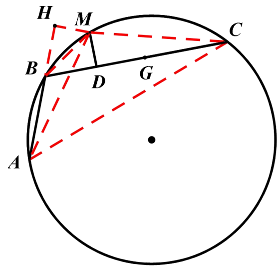


图4

常见证明的方法：

1）补短法：如图2，如图，延长 DB 至 F，使 $BF=BA$；

2）截长法：如图3，在 CD 上截取 $DG=DB$；

3）垂线法：如图4，作 MH⊥射线 AB，垂足为 H。

例1．（2023·广东·统考一模）定义：圆中有公共端点的两条弦组成的折线称为圆的一条折弦．阿基米德折弦定理：如图1，AB和BC组成圆的折弦，AB＞BC，M是弧ABC的中点，MF⊥AB于F，则AF＝FB+BC．

如图2，△ABC中，∠ABC＝60°，AB＝8，BC＝6，D是AB上一点，BD＝1，作DE⊥AB交△ABC的外接圆于

E，连接 EA，则∠EAC=_____°.

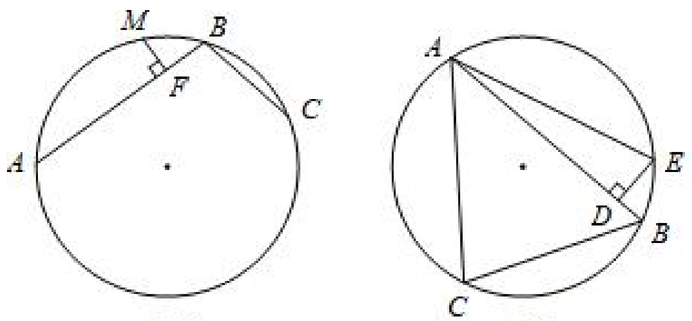


图1　　　　图2

【答案】60°.

【分析】连接 OA、OC、OE，由已知条件，根据阿基米德折弦定理，可得到点 E 为弧 ABC 的中点，即 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}$，进而推得∠AOE=∠COE，已知∠ABC=60°，则∠AOC=2∠ABC=2×60°=120°，可知∠AOE=∠COE=120°，故∠CAE=$\frac{1}{2}$∠COE=60°.

【详解】解：如图 2，连接 OA、OC、OE，

∵AB=8，BC=6，BD=1，∴AD=7，BD+BC=7，∴AD=BD+BC，而 ED⊥AB，

∴点 E 为弧 ABC 的中点，即 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}$，∴∠AOE=∠COE，

∵∠AOC=2∠ABC=2×60°=120°，∴∠AOE=∠COE=120°，

∴∠CAE=$\frac{1}{2}$∠COE=60°．故答案为 60°.

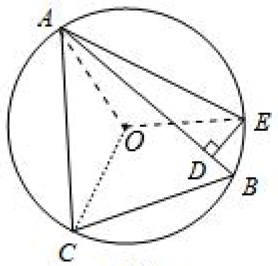
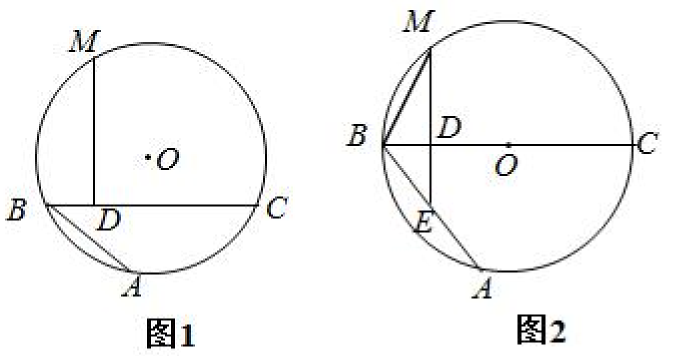


图2

【点睛】本题是新定义型题，考查了圆周角定理及推论，解本题的关键是掌握题中给出的关于阿基米德折弦定理的内容并进行应用.

例 2．（2023·浙江温州·九年级校考阶段练习）阿基米德是古希腊最伟大的数学家之一，他曾用图 1 发现了阿基米德折弦定理．如图 2，已知 BC 为⊙O 的直径，AB 为一条弦($BC>AB$)，点 M 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 上的点，$MD\perp BC$

于点 D，延长 MD 交弦 AB 于点 E，连接 BM，若 $BM=\sqrt{6}$，AB=4，则 AE 的长为(　)

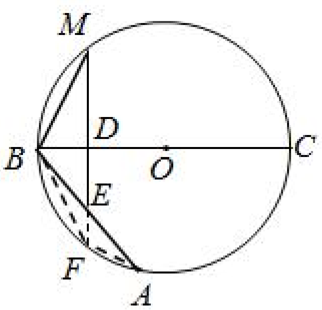


A. $\frac{5}{2}$　　　B. $\frac{9}{4}$　　　C. $\frac{12}{5}$　　　D. $\frac{13}{5}$

【答案】A

【分析】延长 ME，设交圆于点 F，连接 BF、AF，可得 BF=BM，$\angle BMF=\angle BFM=\angle FAB$，从而可得$\triangle BFA\backsim\triangle BEF$，利用相似三角形的性质列式可求 BE 的长度，从而可求得 AE 的长度.

【详解】解：延长 ME，设交圆于点 F，连接 BF、AF，如图，



∵BC 为⊙O 的直径，　MD⊥BC 于点 D，∴MB=FB=$\sqrt{6}$，∠BMF=∠BFM

又∠BMF=∠FAB∴∠BFM=∠FAB∴∠BFE=∠FAB

∵∠EBF=∠FBA∴△BFA∽△BEF∴$\frac{BF}{AB}=\frac{BE}{BF}$即$\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{BE}{\sqrt{6}}$∴BE=$\frac{3}{2}$∴AE=4-$\frac{3}{2}$=$\frac{5}{2}$故选：A.

【点睛】本题考查垂径定理及三角形相似的判定和性质，解题的关键是准确做出辅助线，得出三角形相似.

例 3.（2023 上·河南周口·九年级校考期末）问题呈现：阿基米德折弦定理：如图1，AB 和 BC 是⊙O 的两条弦（即折线 ABC 是弦⊙O 的一条折弦），$BC>AB$，M 是弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$，下面是运用“截长法”证明 $CD=AB+BD$ 的部分证明过程·

证明：如图 2，在 CB 上截取 $CG=AB$，连接 MA， MB， MC 和 MG.

$\because M$ 是弧 ABC 的中点，

$\therefore MA=MC$，

……

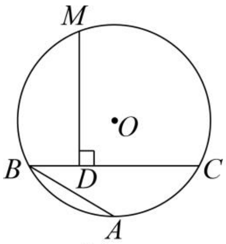


图1

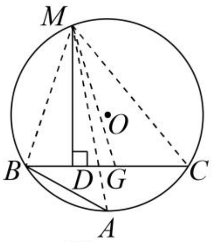


图2

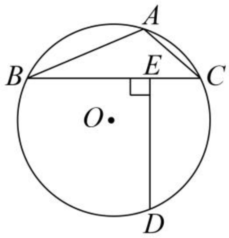


图 3

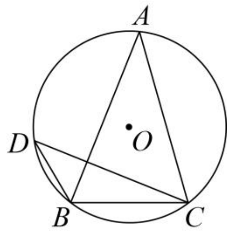


图4

(1)请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

(2)实践应用：如图 3， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$， $BC>AB>AC$， D 是弧 ACB 的中点， $DE\perp BC$ 于点 E，依据阿基米德折弦定理可得图中某三条线段的等量关系为______.

(3)如图 4，等腰 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB=AC$，D 为弧 AB 上一点，连接 DB，$\angle ACD=45°$，$AC=6$，$BC=4$，求 $\triangle BDC$ 的周长.

【答案】(1)见解析(2) $BE=CE+AC$ (3) $6\sqrt{2}+4$

【分析】（1）首先证明 $\triangle MBA\cong\triangle MGC(\text{SAS})$，进而得出 $MB=MG$，再利用等腰三角形的性质得出 $BD=GD$，即可证明结论；（2）直接根据阿基米德折弦定理，即可证明结论；

（3）过点 A 作 $AE\perp CD$，根据阿基米德折弦定理，勾股定理求得 CE，即可得出结论.

【详解】（1）证明：如图 2，在 CB 上截取 $CG=AB$，连接 MA， MB， MC 和 MG .

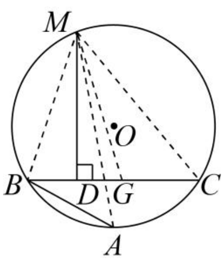


图2

$\because M$ 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点， $\therefore MA=MC$.

在$\triangle MBA$和$\triangle MGC$中$\begin{cases} BA=GC \\ \angle A=\angle C \\ MA=MC \end{cases}$，$\therefore \triangle MBA \cong \triangle MGC(SAS)$，$\therefore MB=MG$，

又$\because MD \perp BC$，$\therefore BD=GD$，$\therefore DC=GC+GD=AB+BD$．

（2）解：根据（1）中的结论可得图中某三条线段的等量关系为$BE=CE+AC$

故答案为：$BE=CE+AC$．

（3）解：如图所示，过点A作$AE \perp CD$，

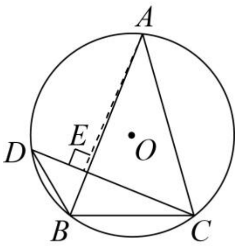


图4

由阿基米德折弦定理得：$CE=BD+DE$，

$\because \angle ACD=45^\circ$ $\therefore \angle EAC=45^\circ$ $\therefore CE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle BDC$的周长为$BC+BD+DC=BC+BD+DE+EC=BC+2EC=4+6\sqrt{2}$

【点睛】本题是圆的综合题，考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识点，理解“截长法”是解答本题的关键．

例4．（2023·江苏·九年级假期作业）问题呈现：阿基米德折弦定理：如图1，AB和BC是$\odot O$的两条弦（即折线ABC是圆的一条折弦），$BC>AB$，M是$\overset{\frown}{ABC}$的中点，则从M向BC所作垂线的垂足D是折弦ABC的中点，即$CD=AB+BD$．下面是运用“截长法”证明$CD=AB+BD$的部分证明过程．

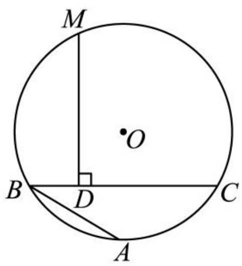


图1

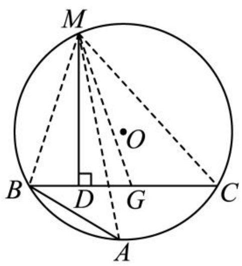


图2

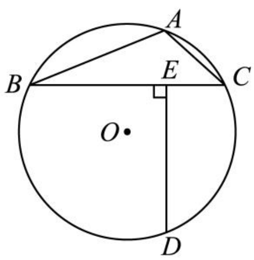


图3

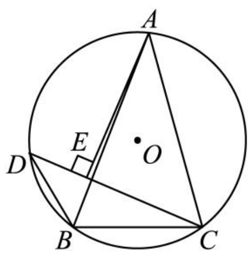


图4

（1）证明：如图2，在CB上截取$CG=AB$，连接MA，MB，MC和MG．

∵M 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点，

∴ $MA=MC$ ……

请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

实践应用：（2）如图 3，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $BC>AB>AC$ ，D 是 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点，依据阿基米德折弦定理可得图中某三条线段的等量关系为____.

（3）如图 4，已知等腰 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB=AC$ ，D 为 AB 上一点，连接 DB ， $\angle ACD=45°$ ， $AE\perp CD$ 于点 E，$\triangle BDC$ 的周长为 $4\sqrt{2}+2$ ， $BC=2$ ，请求出 AC 的长．

【答案】（1）证明见解析；（2） $BE=CE+AC$ ；（3）4

【分析】（1）首先证明 $\triangle MBA\cong\triangle MGC(\text{SAS})$ ，进而得出 $MB=MG$ ，再利用等腰三角形的性质得出 $BD=GD$ ，即可得出答案；（2）直接根据阿基米德折弦定理得出结论；

（3）根据阿基米德折弦定理得出 $CE=BD+DE$ ，进而求出 CE ，最后用勾股定理即可得出结论．

【详解】（1）证明：如图 2，在 CB 上截取 $CG=AB$ ，连接 MA，MB，MC 和 MG .

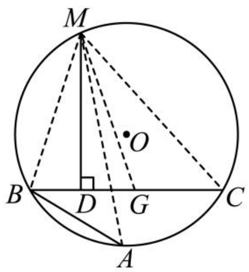


图2

∵M 是 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点，∴ $MA=MC$.

在 $\triangle MBA$ 和 $\triangle MGC$ 中，$\begin{cases}BA=GC\\ \angle A=\angle C\\ MA=MC\end{cases}$ ，∴ $\triangle MBA\cong\triangle MGC(\text{SAS})$ ，∴ $MB=MG$ ，

又∵ $MD\perp BC$ ，∴ $BD=GD$ ，∴ $DC=GC+GD=AB+BD$ ；

（2）根据阿基米德折弦定理得， $BE=CE+AC$ ，答案为： $BE=CE+AC$ ；

（3）根据阿基米德折弦定理得， $CE=BD+DE$ ，

∵ $\triangle BCD$ 的周长为 $4\sqrt{2}+2$，∴ $BD+CD+BC=4\sqrt{2}+2$，

∴ $BD+DE+CE+BC=2CE+BC=4\sqrt{2}+2$，

∵ $BC=2$，∴ $CE=2\sqrt{2}$，在 $Rt\triangle ACE$ 中，$\angle ACD=45°$，∴ $AC=\sqrt{2}CE=4$．

【点睛】此题是圆的综合题，考查了全等三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质，理解和应用阿基米德折弦定理解题关键．

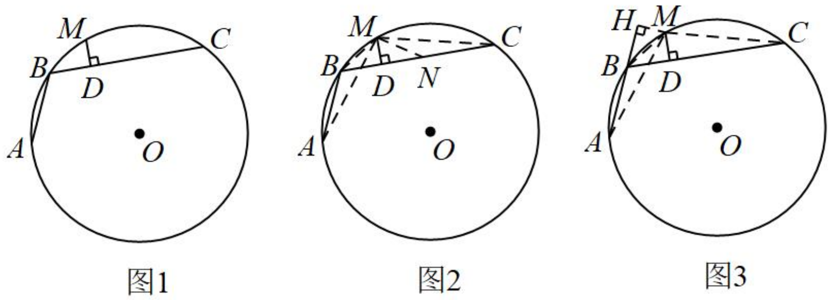
例 5．（2023·河南商丘·统考二模）阅读下面材料，完成相应的任务：

阿基米德是有史以来最伟大的数学家之一．《阿基米德全集》收集了已发现的阿基米德著作，它对于了解古希腊数学，研究古希腊数学思想以及整个科技史都是十分宝贵的．其中论述了阿基米德折弦定理：从圆周上任一点出发的两条弦，所组成的折线，称之为该圆的一条折弦．一个圆中一条由两长度不同的弦组成的折弦所对的两段弧的中点在较长弦上的射影，就是折弦的中点．

如图 1，AB 和 BC 是 $\odot O$ 的两条弦（即 ABC 是圆的一条折弦），$BC>AB$．M 是弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线之垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$．

小明认为可以利用“截长法”，如图 2：在线段 CB 上从 C 点截取一段线段 $CN=AB$，连接 MA，MB，MC，MN．

小丽认为可以利用“垂线法”，如图 3：过点 M 作 $MH\perp AB$ 于点 H，连接 MA，MB，MC



任务：(1)请你从小明和小丽的方法中任选一种证明思路，继续书写出证明过程，

(2)就图 3 证明：$MC^2-MB^2=BC\cdot AB$．

【答案】(1)见解析(2)见解析

【分析】（1）首先证明$\triangle MBA \cong \triangle MNC(\text{SAS})$，进而可得$MB=MN$，即可得到解答；

（2）由（1）可知，$AC=AM$，$BH=BD$，$AH=CD$，整理等式即可得到结论.

【详解】（1）证明：如图 2，在 CB 上截取$CN=AB$ C，连接MA、MB、MC、MN，

∵ M 是$\overset{\frown}{ABC}$的中点，∴ $MA=MC$

在$\triangle MBA$和$\triangle MNC$中，$\begin{cases} BA=NC \\ \angle A=\angle C, \\ MA=MC \end{cases}$ ∴ $\triangle MBA \cong \triangle MNC(\text{SAS})$，∴ $MB=MN$

∵ $MD \perp BC$，∴ $BD=ND$ ∴ $CD=NC+ND=AB+BD$ ；

（2）证明：在$\text{Rt}\triangle AHM$中，$\text{AM}^2=\text{AH}^2+\text{MH}^2$，

在$\text{Rt}\triangle BHM$中，$BM^2=BH^2+MH^2$，由（1）可知，$AC=AM$，$BH=BD$，$AH=CD$ ，

∴ $MC^2-MB^2 \;=AM^2-MB^2=AH^2+HM-BH^2-HM^2=AH^2-BH^2$

$=(AH+BH)\cdot(AH-BH)=(CD+BD)\cdot(AH-BH)=BC\cdot AB$；

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，正确作出辅助线是解题的关键.

模型 2.婆罗摩笈多（定理）模型

【模型解读】婆罗摩笈多（*Brahmagupta*）是七世纪时的印度数学家。

婆罗摩笈多定理：如果一个圆内接四边形的对角线互相垂直相交，那么从交点向某一边所引垂线的反向延长线必经过这条边对边的中点。

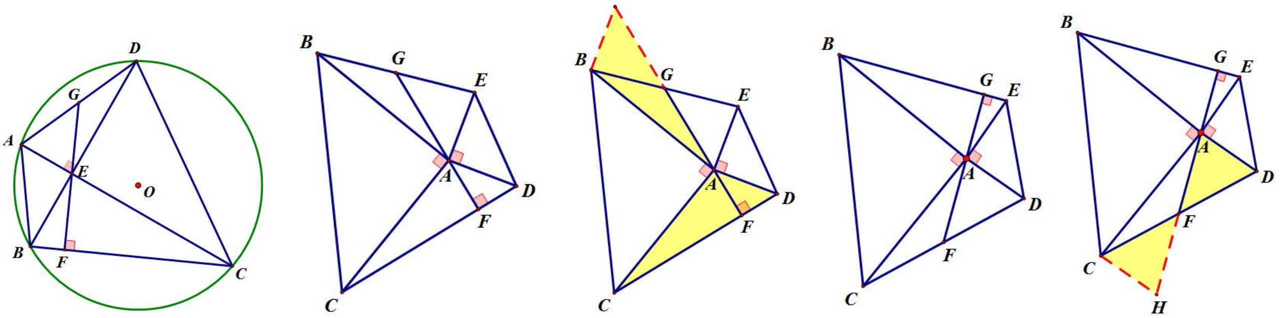


图 1　　　　图 2　　　　图 3

如图 1，$ABCD$ 为圆内接四边形，对角线 AC 和 BD 垂直相交，交点为 E，过点 E 作 BC 的垂线 EF，延长 FE 与 AD 交于点 G；则点 G 是 AD 的中点。

如图 2，所示已知等腰 $Rt\triangle ABC$ 和等腰 $Rt\triangle AED$，作 $BH//AE$ 交 AG 的延长线于点 H，（1）$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABE}$；（2）若 $AF\perp CD$，则 G 为 BE 中点。

2、如图 3，已知等腰 $Rt\triangle ABC$ 和等腰 $Rt\triangle AED$，在 AF 的延长线取点 H，使得 $AF=FH$；（1）$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABE}$；（2）若 F 为 CD 中点，则 $AG\perp BE$。

例 1．（2023·浙江·九年级专题练习）阅读下列相关材料，并完成相应的任务．

布拉美古塔定理

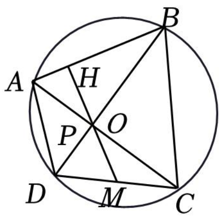
婆罗摩笈多是古印度著名的数学家、天文学家，他编著了《婆罗摩修正体系》，他曾经提出了“婆罗摩笈多定理”，也称“布拉美古塔定理”．定理的内容是：若圆内接四边形的对角线互相垂直，则垂直于一边且过对角线交点的直线平分对边．

某数学兴趣小组的同学写出了这个定理的已知和求证．

已知：如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC\perp BD$，垂足为 P，过点 P 作 AB 的垂线分别交 AB，DC 于点 H，M．

求证：M 是 CD 的中点．

任务：(1)请你完成这个定理的证明过程．(2)该数学兴趣小组的同学在该定理的基础上写出了另外一个命题：若圆内接四边形的对角线互相垂直，则一边中点与对角线交点的连线垂直于对边请判断此命题是 ____命题．（填“真”或“假”）。(3)若 $PD=2$，$HP=\sqrt{3}$，$BP=3$，求 MH 的长．



【答案】(1)见解析(2)真(3) $MH=2\sqrt{3}$.

【分析】（1）在 Rt$\triangle APB$ 中，证明 $\angle ABP=\angle APH$ ，再由同弧所对的圆周角相等，可得 $\angle ABP=\angle ACD$，可得 $\angle PCM=\angle MPC$，则 $PM=MC$；同理可证 $PM=DM$ ，即可得到 $DM=CM$；

（2）仿照（1）的证明过程，直接证明即可；

（3）求出 $\sin\angle HBP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，再由 $\angle ABP=\angle PCD$，可得 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{DP}{CD}=\dfrac{2}{CD}$，求出 $CD=2\sqrt{3}$，再由 $PM=\dfrac{1}{2}CD=\sqrt{3}$，即可求出 $MH=2\sqrt{3}$.

【详解】（1）证明：∵ $AC\perp BD$，∴ $\angle APB=\angle CPD=90°$，∴ $\angle ABP+\angle BAP=90°$，

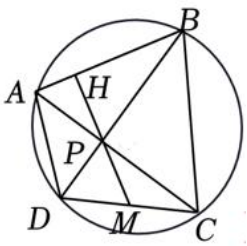
∵ $PH\perp AB$，∴ $\angle BAP+\angle APH=90°$，∴ $\angle ABP=\angle APH=\angle CPM$，∴ $\angle MPC=\angle APH$，

∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$，∴ $\angle ABP=\angle ACD$，∴ $\angle PCM=\angle MPC$，

∴ $PM=MC$，同理可得，$PM=DM$，∴ $DM=CM$，∴M 是 CD 的中点；

（2）解：若圆内接四边形的对角线互相垂直，则一边中点与对角线交点的连线垂直于对边，理由如下：

已知：如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC\perp BD$，垂足为 P，M 是 CD 的中点，连接 MP 交 AB 于点 H，



求证：$PH\perp AB$；

证明：∵M 是 CD 的中点；∴ $DM=CM=PM$，

∴ $\angle PCM=\angle MPC$，且 $\angle APH=\angle MPC$，

∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$，∴ $\angle ABP=\angle PCM$，∴ $\angle MPC=\angle APH$，

∴ $\angle APH+\angle HPB=\angle ABP+\angle HPB=90^\circ$，∴ $PH\perp AB$；故答案为：真；

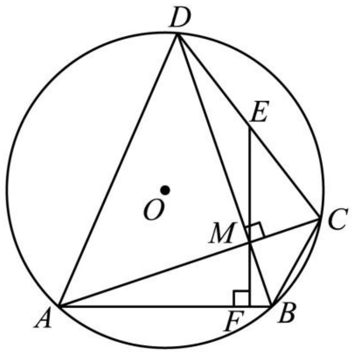
（3）解：∵ $BP=3$，$HP=\sqrt{3}$，∴ $BH=\sqrt{6}$，∴ $\sin\angle HBP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∵ $\angle ABP=\angle PCD$，∴ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{DP}{CD}=\dfrac{2}{CD}$，∴ $CD=2\sqrt{3}$，

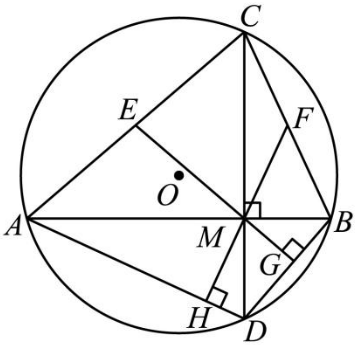
∵ M 是 CD 的中点，∴ $PM=\dfrac{1}{2}CD=\sqrt{3}$，∴ $MH=2\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查圆的综合应用，熟练掌握直角三角形的性质，同弧所对的圆周角相等，同角的余角相等是解题的关键．

例 2．（2023·重庆·统考一模）阅读下列相关材料，并完成相应的任务．婆罗摩笈多是古印度著名的数学家、天文学家，他编著了《婆罗摩修正体系》，他曾经提出了“婆罗摩笈多定理”，也称“布拉美古塔定理”．定理的内容是：“若圆内接四边形的对角线互相垂直，则垂直于一边且过对角线交点的直线平分对边”．



图(1)



图(2)

任务：（1）按图（1）写出了这个定理的已知和求证，并完成这个定理的证明过程；

已知：__________________　求证：_________________

证明：

（2）如图（2），在⊙O 中，弦 $AB\perp CD$ 于 M，连接 AC,CB,BD,DA,E,F 分别是 AC,BC 上的点，$EM\perp BD$ 于 $G,FM\perp AD$ 于 H，当 M 是 AB 中点时，直接写出四边形 $EMFC$ 是怎样的特殊四边形：__________．

【答案】（1）见解析；（2）菱形

【分析】（1）先写出已知、求证，先证明 $\angle BMF=\angle MAF$，再证明 $DE=ME$，$DE=CE$ 即可证明

（2）先证明$CE=CF$，再证明$AC=BC$,由布拉美古塔定理证明$ME=EC=CF=FM$即可证明

【详解】（1）已知：如图，在圆内接四边形$ABCD$中，对角线$AC\perp BD$于点M，过点M作AB的垂线分别交AB、DC于点F,E． 求证：点E是DC的中点

证明：$\because AC\perp BD,EF\perp AB$

$\therefore \angle BMF+\angle AMF=90°$，$\angle MAF+\angle AMF=90°$，$\therefore \angle BMF=\angle MAF$，

$\because \angle EDM=\angle MAF$，$\angle EMD=\angle BMF$，$\therefore \angle EDM=\angle EMD$，$\therefore DE=ME$，

同理可证$ME=CE$，$\therefore DE=CE$，∴点E是DC的中点

故答案为：已知：如图，在圆内接四边形$ABCD$中，对角线$AC\perp BD$于点M，过点M作AB的垂线分别交AB、DC于点F,E． 求证：点E是DC的中点

（2）四边形$EMFC$是菱形

理由：由布拉美古塔定理可知，E,F分别是AC,BC的中点，$\therefore CE=\frac{1}{2}AC,CF=\frac{1}{2}CB$

$\because AB\perp CD\ \therefore ME=\frac{1}{2}AC,MF=\frac{1}{2}CB$

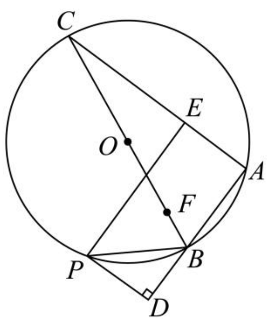
$\because AB\perp CD$，M是AB中点$\therefore AC=BC\ \therefore ME=EC=CF=FM$

∴四边形$EMFC$是菱形故答案为：四边形$EMFC$是菱形

【点睛】本题考查菱形的判定、根据题意写已知求证、灵活进行角的和差关系的转换是解题的关键

课后专项训练

1．（2023·浙江温州·校考三模）在几何学发展的历史长河中，人们发现了许多经久不衰的平面几何定理，苏格兰数学家罗伯特·西姆森$(RobertSimson)$发现从三角形外接圆上任意一点向三边（或其延长线）所作垂线的垂足共线，这三个垂足的连线后来被称为著名的“西姆森线”$(SimsonLine)$．如图，半径为4的$\odot O$为$\triangle ABC$的外接圆，CB过圆心O，那么过圆上一点P作$\triangle ABC$三边的垂线，垂足E、F、D所在直线即为西姆森线，若$\angle FPB=\angle C$，$EF=3$，则$\dfrac{AE}{AB}$的值为（　）

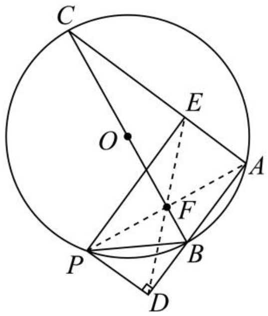


A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】D

【分析】连接AP，首先根据题意得到点A，F，P三点共线，然后证明出四边形$AEPD$是矩形，得到$AP=DE=2EF=6$，证明出$\triangle CAB\backsim\triangle DAE$，利用相似三角形的性质求解即可．

【详解】解：如图所示，连接AP，



由题意可得，点 E、F、D 共线，∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，∴ $\angle APB=\angle C$，

∵ $\angle FPB=\angle C$，∴ $\angle APB=\angle FPB$，∴点 A，F，P 三点共线，

∵ $PE\perp AC$，$AC\perp BA$，$FD\perp AD$，∴四边形 $AEPD$ 是矩形，∴ $AP=DE=2EF=6$，

∵ $OB=AP$，$AF=PF$，∴ $BP=AB$，∴ $\angle BAP=\angle BPA$，∴ $\angle FPE=\angle PEF=\angle FDA=\angle FAD$，

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，∴ $\angle APB=\angle C$，∴ $\angle FDA=\angle C$，

又∵ $\angle CAB=\angle DAE$，∴ $\triangle CAB\backsim\triangle DAE$，∴ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$．故选：D．

【点睛】此题考查了圆与三角形综合题，相似三角形的性质和判定，矩形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点．

2．（2023 山东·校考二模）阿基米德折弦定理：如图 1，AB 和 BC 是 $\odot O$ 的两条弦（即折线 ABC 是圆的一条折弦），$BC>AB$，M 是弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$．请应用阿基米德折弦定理解决问题：如图 2，已知等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB=10$，D 为 $\odot O$ 上一点，$\angle ABD=45°$，$AE\perp BD$ 于点 E，则 $\triangle BDC$ 的周长是_______．

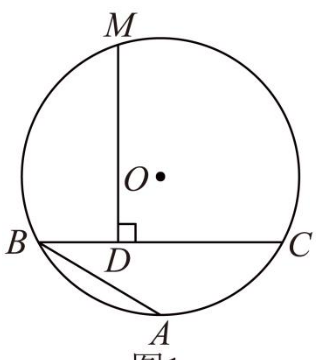


图1

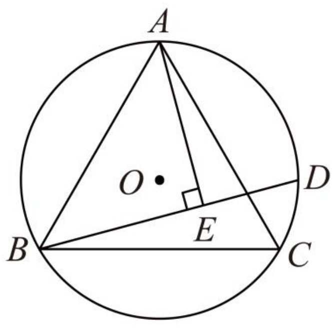


图2

【答案】$10+10\sqrt{2}$

【分析】根据等边三角形的性质可得点 M 是弧 BDC 的中点，则可用阿基米德折弦定理得，$BE=DE+DC$，根据 $\triangle ABE$ 中，$\angle ABD=45°$，$AE\perp BD$ 于点 E，可得 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，可求出 BE 的长，即 $DE+CD$ 的长，根据 $\triangle BDC$ 的周长的计算方法即可求解．

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $AB=BC=AC=10$，$\angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{CA}$，即点 M 是弧 BDC 的中点，且 $AE\perp BD$ 于点 E，

∴根据阿基米德折弦定理得，$BE=DE+DC$，

∵ $\triangle ABE$ 中，$\angle ABD=45°$，$AE\perp BD$ 于点 E，且 $AB=10$，

∴ $\angle AEB=90°$，$\angle BAE=45°$，即 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，则 $AB=\sqrt{2}BE$，

∴ $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10=5\sqrt{2}$，∴ $DE+CD=BE=5\sqrt{2}$，

∵ $\triangle BDC$ 的周长为 $BE+DE+CD+BC$，∴ $5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+10=10+10\sqrt{2}$，故答案为：$10+10\sqrt{2}$．

【点睛】本题主要考查定义新运算，等边三角形的性质，圆的基础知识，等腰直角三角形的性质，几何图形的周长的计算方法等知识，掌握以上知识是解题的关键．

3.（2023 春·山东威海·九年级校联考期中）早在公元前古希腊数学家欧几里得就发现了垂径定理，即垂直于弦的直径平分弦．阿基米德从中看出了玄机并提出：如果条件中的弦变成折线段，仍然有类似的结论．

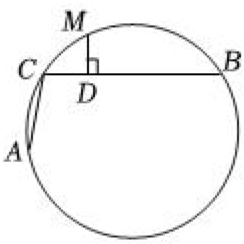


图1

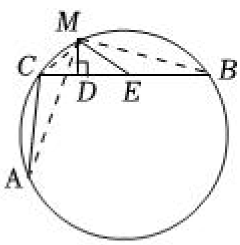


图2

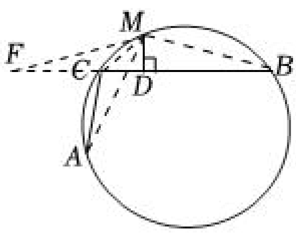


图3

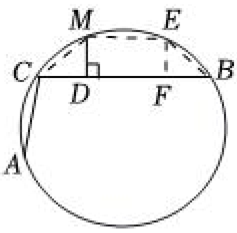


图4

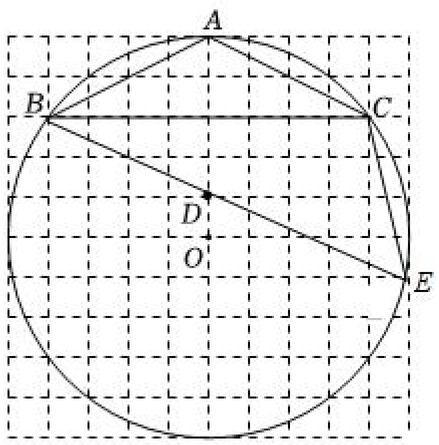


图5

某数学兴趣小组对此进行了探究，如图 1，AC 和 BC 是 $\odot O$ 的两条弦（即折线段 ACB 是圆的一条折弦），

$BC>AC$，M 是 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点，过点 M 作 $MD\perp BC$，垂足为 D，小明通过度量 AC、CD、DB 的长度，发

现点 D 平分折弦 ACB，即 $BD=AC+CD$．小丽和小军改变折弦的位置发现 $BD=AC+CD$ 仍然成立，于是

三位同学都尝试进行了证明：

小军采用了“截长法”（如图 2），在 BD 上濊取 BE，使得 $BE=AC$，……

小丽则采用了“补短法”（如图 3），延长 BC 至 F，使 $CF=AC$，……

小明采用了“平行线法”（如图 4），过 M 点作 $ME\,//\,BC$，交圆于点 E，过点 E 作 $EF\perp BC$，……

(1)请你任选一位同学的方法，并完成证明；

(2)如图 5，在网格图中，每个小正方形边长均为 1，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$（A、B、C 均是格点），点 A、D 关于

BC 对称，连接 BD 并延长交 $\odot O$ 于点 E，连接 CE．

①请用无刻度的直尺作直线 l，使得直线 l 平分 $\triangle BCE$ 的周长；②求 $\triangle BCE$ 的周长．

【答案】(1)见解析(2)①见解析，②$8+\dfrac{32}{5}\sqrt{5}$

【分析】（1）证 $\triangle ACM\cong\triangle BEM\,(\mathrm{SAS})$，得到 $CM=EM$，再由待腰三角形“三线合一”性质得 $CD=ED$，即

可得出结论（2）①作直径 AF，交 BC 于 H，连接 CF 交 BE 于 G，过点 G、H 作直线 l 即可；

②先由勾股定理，求得 $BD=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，再证 $\triangle BDH\backsim\triangle FDG$，得 $\dfrac{BD}{FD}=\dfrac{HD}{DG}$，即可求得 $DG=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

从而得出 $BG=BD+DG=2\sqrt{5}+\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，则 $BH+BG=4+\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，然后由由①可知 $\triangle BEC$ 周长

$=2(BH+BG)$，即可求解.

【详解】（1）解：选小军采用了“截长法”（如图 2），在 BD 上濊取 BE，使得 $BE=AC$，

证明：∵点 M 是 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点，∴ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$ ∴ $AM=BM$，

在 $\triangle ACM$ 与 $\triangle BEM$ 中，$\begin{cases} AC=BM \\ \angle CAM=\angle EBM \\ AM=BM \end{cases}$，∴ $\triangle ACM\cong\triangle BEM(\text{SAS})$，∴ $CM=EM$，

∵ $MD\perp BC$，即 $MD\perp EC$，∴ $CD=ED$，∴ $AC+CD=BE+ED$，∴ $AC+CD=BD$；

（2）解：①如图所示，直线 l 即为所作，

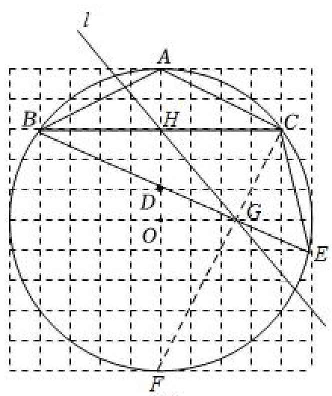


图5

理由：∵点 A 与点 D 关于 BC 对称，∴ $\angle ABC=\angle DBC$，$AD\perp BC$，

∴ $\angle BHD=90°$，即 $FH\perp BC$，∴F 是 $\overset{\frown}{BFC}$ 的中点，

∵ $\angle ABC=\angle AFC$，$\angle BDH=\angle FDG$，∴ $\angle FGD=\angle BHD=90°$，

由（1）得 FC 平分折弦 BEC，∴ $BG=GE+EC$，

∵ $AD\perp BC$，∴ $BD=CD$，∴ $BD+BG=CD+GE+EC$，即 l 平分 $\triangle BEC$ 周长；

②由题意可得：$BH=4$，$HD=2$，$DF=6$，由勾股定理，得 $BD=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∵ $\angle DBH=\angle ABH=\angle DFG$，$\angle BHD=\angle FGD=90°$，

∴ $\triangle BDH\backsim\triangle FDG$，∴ $\dfrac{BD}{FD}=\dfrac{HD}{DG}$，即 $\dfrac{2\sqrt{5}}{6}=\dfrac{2}{DG}$，∴ $DG=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

∴ $BG=BD+DG=2\sqrt{5}+\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，∴ $BH+BG=4+\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$，

由①知$\triangle BEC$周长$=2(BH+BG)=2\left(4+\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)=8+\frac{32}{5}\sqrt{5}$

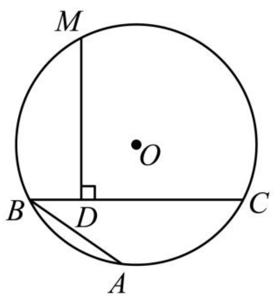
【点睛】本题考查垂径定理，圆周角定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，等腰三角形的性质，属圆的综合探究题目，熟练掌握相关性质与判定并能灵活运用是解题的关键.

4.（2023·浙江嘉兴·九年级校联考期中）阿基米德折弦定理：如图1，AB和BC是$\odot O$的两条弦（即折线ABC是圆的一条折弦），$BC>AB$，M是$\overset{\frown}{ABC}$的中点，则从M向BC所作垂线的垂足D是折弦ABC的中点，即$CD=AB+BD$．下面是运用“截长法”证明$CD=AB+BD$的部分证明过程.

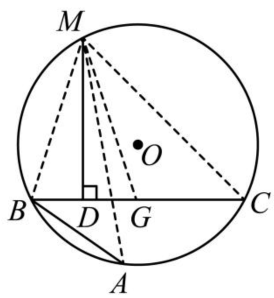
证明：如图2，在CB上截取$CG=AB$，连接MA，MB，MC和MG．∵M是$\overset{\frown}{ABC}$的中点，∴$MA=MC$

任务：（1）请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

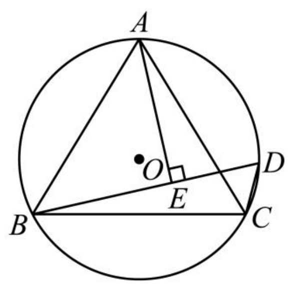
（2）填空：如图（3），已知等边$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$AB=2$，D为$\odot O$上 一点，$\angle ABD=45°$，$AE\perp BD$与点E,则$\triangle BDC$的周长是________.



图(1)



图(2)



图(3)

【答案】（1）证明见解析；（2）$2+2\sqrt{2}$．

【分析】（1）首先证明$\triangle MBA\cong\triangle MGC$，进而得出$MB=MG$，再利用等腰三角形的性质得出$BD=GD$，即可得出答案；（2）方法一、首先证明$\triangle ABF\cong\triangle ACD$，进而得出$AF=AD$，以及$CD+DE=BE$，进而求出$DE$的长即可得出答案．方法二、先求出$BE$，再用（1）的结论得出$CD+DE=BE$，即可得出结论.

【详解】（1）证明：如图2，在CB上截取$CG=AB$，连接MA，MB，MC和MG．

∵M是$\overset{\frown}{ABC}$的中点，∴$MA=MC$

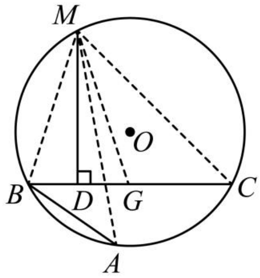


图2

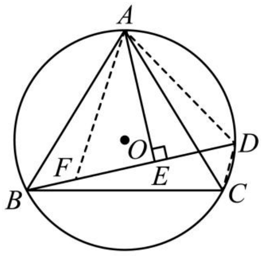


图3

在△MBA和$\triangle MGC$中$\begin{cases}BA=GC\\ \angle A=\angle C\\ MA=MC\end{cases}$ ∴$\triangle MBA\cong\triangle MGC$，∴$MB=MG$，

又∵$MD\perp BC$， ∴$BD=GD$，∴$DC=GC+GD=AB+BD$；

（2）解：方法一、如图3，截取$BF=CD$，连接AF，AD，CD，

由题意可得：$AB=AC$，$\angle ABF=\angle ACD$，

在△ABF和ACD中$\begin{cases}AB=AC\\ \angle ABF=\angle ACD\\ BF=DC\end{cases}$，∴△$ABF\cong\triangle ACD$，∴$AF=AD$，

∵$AE\perp BD$，∴$FE=DE$，则$CD+DE=BE$，

∵$\angle ABD=45°$，∴$BE=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，则$\triangle BDC$的周长是$2+2\sqrt{2}$．故答案为$2+2\sqrt{2}$．

方法二、∵$\triangle ABC$是等边三角形，∴$BC=AB=2$，$\angle ABC=\angle ACB$，

∴由（1）的结论得，$CD+DE=BE$，

∵$\angle ABD=45°$，$AB=2$，∴$BE=\sqrt{2}$，∴$DE+CE=\sqrt{2}$，

∴则$\triangle BDC$的周长是$BC+BD+CD=BC+BE+DE+CD=2+2\sqrt{2}$．故答案为$2+2\sqrt{2}$．

【点睛】此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及等腰三角形以及等边三角形的性质，正确作出辅助线利用全等三角形的判定与性质解题是解题关键.

5．（2023秋·山西阳泉·九年级统考期末）请阅读下列材料，并完成相应的任务：

阿基米德折弦定理

阿基米德（*Archimedes*，公元前287～公元前212年，古希腊）是有史以来最伟大的数学家之一，他与牛顿、高斯并称为三大数学王子.

阿拉伯 *Al-Biruni*（973年～1050年）的译文中保存了阿基米德折弦定理的内容，苏联在1964年根据 *Al-Biruni* 译本出版了俄文版《阿基米德全集》，第一题就是阿基米德的折弦定理.

阿基米德折弦定理：

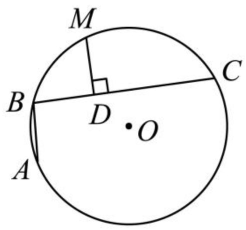
如图1，AB 和 BC 是 $\odot O$ 的两条弦（即折线 ABC 是圆的一条折弦），$BC>AB$，M 是弧 ABC 的中点，则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点，即 $CD=AB+BD$.

这个定理有很多证明方法，下面是运用“垂线法”证明 $CD=AB+BD$ 的部分证明过程.

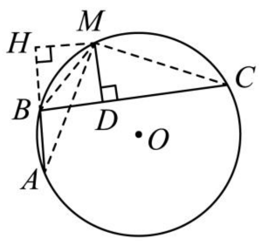
证明：如图2．作 $MH\perp$ 射线 AB，垂足为 H，连接 MA，MB，MC.

$\because M$ 是弧 ABC 的中点，

$\therefore MA=MC$．…



(图1)

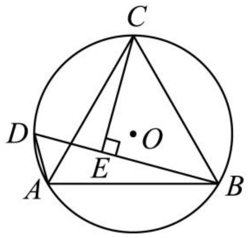


(图2)

任务：(1)请按照上面的证明思路，写出该证明的剩余部分；

(2)填空：如图3，已知等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点，$\angle ABD=15^{\circ}$，$CE\perp BD$ 于点 E，$AB=2\sqrt{2}$，

则折弦 ADB 的长是______.



(图3)

【答案】(1)见解析；(2) 4 .

【分析】（1）根据圆的性质，同弧或等弧所对的圆周角相等，则 $\angle MAB=\angle MCB$，根据全等三角形的判定和性质，则 $\triangle MHA\cong\triangle MCB$，得 $AH=CD$， $MH=MD$ 。再根据直角三角形的全等和判定，得 $\mathrm{Rt}\triangle MHB\cong\mathrm{Rt}\triangle MDB$，推出 $BH=BD$，即可；

（2）根据等边三角形的性质，则 $AB=BC$， $\angle CBA=60^\circ$，根据 $\angle ABD=15^\circ$， $CE\perp BD$ 于点 E， $AB=2\sqrt{2}$，得 $EC=EB=2$；由题意得， $BE=AD+DE$，则折弦 ADB 的长为： $AD+DE+BE$，即可．

【详解】（1）$\because$ M 是弧 ABC 的中点，$\therefore$ $MA=MC$， $\because$ $MD\perp BC$， $\therefore$ $\angle MDC=\angle H=90^\circ$，

$\because$ $\angle MAB$ 和 $\angle MCB$ 所对的弧是 $\overset{\frown}{BM}$，$\therefore$ $\angle MAB=\angle MCB$，

在 $\triangledown MHA$ 和 $\triangle MCB$ 中， $\begin{cases}\angle H=\angle MDC\\ \angle MAH=\angle MCD\\ MA=MC\end{cases}$， $\therefore$ $\triangle MHA\cong\triangle MCB$， $\therefore$ $AH=CD$， $MH=MD$，

$\because$ $MB=MB$， $\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle MHB\cong\mathrm{Rt}\triangle MDB(\mathrm{HL})$， $\therefore$ $BH=BD$， $\therefore$ $CD=AH=AB+BH=AB+BD$.

（2）$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore$ $AB=BC$， $\angle CBA=60^\circ$，

$\because$ $\angle ABD=15^\circ$， $\therefore$ $\angle CBD=45^\circ$， $\because$ $CE\perp BD$ 于点 E， $\therefore$ $\angle ECB=45^\circ$， $\therefore$ $CE=EB$，

$\because$ $AB=2\sqrt{2}$， $\therefore$ $EC=EB=2$， $\because$ $BE=AD+DE=2$，

$\therefore$ 折弦 ADB 的长为： $AD+DE+BE=2BE=4$，故答案为： 4 .

【点睛】本题考查圆，全等三角形，等边三角形的性质，解题的关键是掌握圆的基本性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的性质，勾股定理的运用，掌握折弦定理的运用.

6．（2023·山西·校联考模拟预测）阅读以下材料，并按要求完成相应任务：

婆罗摩笈多（*Brahmagupta*）是古代印度著名数学家、天文学家，他在三角形、四边形、零和负数的算术运算规则、二次方程等方面均有建树．他曾经提出了“婆罗摩笈多定理”，该定理也称为“古拉美古塔定理”，该定理的内容及部分证明过程如下：

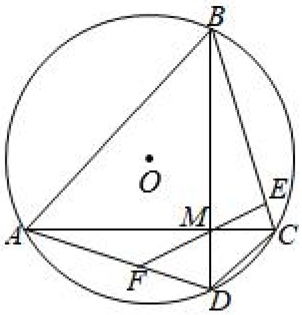


图 1

古拉美古塔定理：如图 1，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，对角线 $AC \perp BD$，垂足为点 M，直线 $ME \perp BC$，垂足为点 E，并且交直线 AD 于点 F，则 $AF = FD$．

证明：$\because AC \perp BD$，$ME \perp BC$，$\therefore \angle BMC = \angle AMD = \angle MEC = 90^\circ$

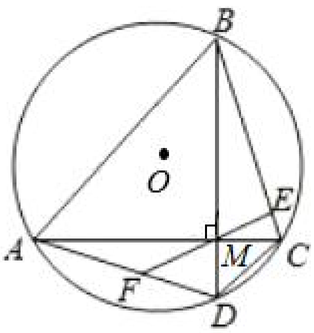
$\therefore \angle CME + \angle ECM = 90^\circ$，$\angle CBD + \angle ECM = 90^\circ$．$\therefore \angle CBD = \angle CME$．

$\because \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle CBD = \angle CAD$．（依据）

又 $\because \angle CME = \angle AMF$，$\therefore \angle AMF = \angle CAD$．$\therefore AF = FM$．……

任务：（1）上述证明过程中的依据是______；（2）将上述证明过程补充完整；

（3）古拉美古塔定理的逆命题：如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，对角线 $AC \perp BD$，垂足为点 M，直线 FM 交 BC 于点 E，交 AD 于点 F．若 $AF = FD$，则 $FE \perp BC$．请证明该命题．



【答案】（1）同弧所对的圆周角相等；（2）见解析；（3）见解析.

【分析】（1）根据圆周角定理可得结论；（2）证明$\triangle MFD$为等腰三角形即可；

（3）用直角三角形斜边上的中线的性质证明即可.

【详解】（1）同弧所对的圆周角相等

（2）…，∵ $\angle AMF+\angle FMD=90°$， $\angle CAD+\angle FDM=90°$，

∴ $\angle FMD=\angle FDM$， ∴ $FM=FD$， ∴ $AF=FD$.

（3）证明：∵ $AC\perp BD$， ∴ $\angle BMC=\angle AMD=90°$， ∴ $\angle CAD+\angle ADB=90°$，

∵ $AF=FD$， ∴ $AF=FM=\frac{1}{2}AD$， ∴ $\angle AMF=\angle CAD$， ∵ $\angle CME=\angle AMF$， ∴ $\angle CAD=\angle CME$，

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$， ∴ $\angle ADB=\angle BCA$， ∴ $\angle CME+\angle ACB=90°$， ∴ $\angle MEC=90°$， ∴ $FE\perp BC$.

【点睛】本题属于圆的综合题，考查了圆周角定理，等腰三角形判定和性质，直角三角形斜边上的中线的性质等知识，解题的关键是熟练转换题目中角的关系.

7.（2023·江苏宿迁·统考二模）【阅读】婆罗摩笈多是七世纪印度数学家，他曾提出一个定理：若圆内接四边形的对角线相互垂直，则垂直于一边且过对角线交点的直线平分对边.

证明：如图 1 所示内接于圆的四边形$ABCD$的对角线AC,BD互相垂直，垂足为点G，过点G的直线垂直于AD，垂足为点E，与边BC交于点F，由垂直关系得$\angle EGD+\angle FGC=90^{\circ}$，$\angle EGD+\angle EDG=90^{\circ}$，所以$\angle EDG=\angle FGC$，由同弧所对的圆周角相等得$\angle ADB=\angle ACB$，所以$\angle FGC=\angle FCG$，则$FG=FC$，同理，$FG=FB$，故$BF=FC$；

【思考】命题“若圆内接四边形的对角线相互垂直，则平分对边且过对角线交点的直线垂直于另一边”为____

（填“真命题”，“假命题”）；

【探究】（1）如图 2，ΔAGB 和 ΔDGC 为共顶点的等腰直角三角形，$\angle AGB=\angle DGC=90^{\circ}$，过点 G 的直线垂直于 AD，垂足为点 E，与边 BC 交于点 F．证明：点 F 是 BC 的中点；

（2）如图 3，ΔAGB 和 ΔDGC 为共顶点的等腰直角三角形 $\angle AGB=\angle DGC=90^{\circ}$，点 F 是 BC 的中点，连接 FG 交 AD 于点 E，若 $GF=2$，求 AD 的长．

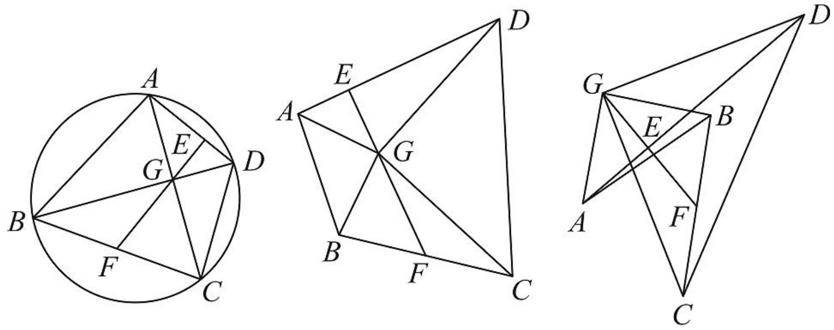


图1　　图2　　图3

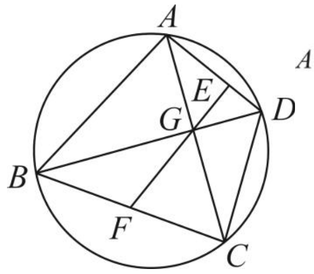
【答案】【思考】真命题；【探究】（1）证明见解析；（2）4．

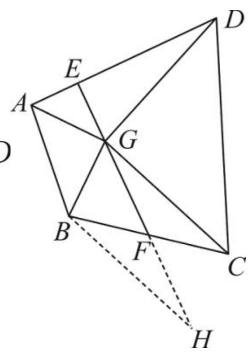
【思考】由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出 $\angle FBG=\angle FGB$，再利用等量代换计算 $\angle GAD+\angle EGA=90^{\circ}$．结论可得；

（1）过点 B 作 $BH//GC$，交 GF 的延长线于点 H，利用同角的余角相等得出 $\angle HGC=\angle EDG$ 和 $\angle BGH=\angle EAG$，进而得到 $\Delta AGD\cong\Delta GBH$；再证明 $\Delta GCF\cong\Delta HFB$，结论可得；

（2）过点 C 作 $MH//BG$，交 GF 的延长线于点 H，易证 $\Delta GBF\cong\Delta HCF$，得到 $GH=2GF=4$，$AG=CH$．再进一步说明 $\Delta AGD\cong\Delta HCG$，可得 $AD=GH$，结论可得．

【详解】解:【思考】“若圆内接四边形的对角线相互垂直，则平分对边且过对角线交点的直线垂直于另一边”为真命题．理由如下：如下图，





∵ $AC \perp BD$， F 为 BC 的中点，∴ $BF = GF = FC$． ∴ $\angle FBG = \angle FGB$．

∵ $\angle FBG = \angle GAD$， ∴ $\angle FGB = \angle GAD$． ∵ $\angle AGB = 90^{\circ}$， ∴ $\angle FGB + \angle EGA = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$．

∴ $\angle GAD + \angle EGA = 90^{\circ}$． ∴ $\angle AEG = 90^{\circ}$． 即： $EG \perp AD$．

∴命题“若圆内接四边形的对角线相互垂直，则平分对边且过对角线交点的直线垂直于另一边”为真命题．

故答案为：真命题．

【探究】（1）如下图，过点 B 作 $BH//GC$， 交 GF 的延长线于点 H，

∵ $BH//GC$， ∴ $\angle H = \angle HGC$． ∵ $\angle DGC = 90^{\circ}$， ∴ $\angle HGC + \angle EGD = 90^{\circ}$．

∵ $EG \perp AD$， ∴ $\angle EGD + \angle EDG = 90^{\circ}$． ∴ $\angle HGC = \angle EDG$．

∵ $\angle AGB = 90^{\circ}$， ∴ $\angle BGH + \angle AGE = 90^{\circ}$．

∵ $EG \perp AD$， ∴ $\angle AGE + \angle EAG = 90^{\circ}$． ∴ $\angle BGH = \angle EAG$．

∵ ΔAGB 为等腰直角三角形， ∴ $AG = BG$．

在 ΔAGD 和 ΔGBH 中， $\begin{cases} \angle EAG = \angle BGH \\ \angle ADG = \angle H \\ AG = BG \end{cases}$ ∴ $\Delta AGD \cong \Delta GBH(AAS)$． ∴ $GD = BH$．

∵ $GD = GC$， ∴ $GC = BH$． 在 ΔGCF 和 ΔHFB 中， $\begin{cases} \angle HGC = \angle H \\ \angle GFC = \angle HFB \\ GC = BH \end{cases}$ ∴ $\Delta GCF \cong \Delta HFB(AAS)$．

∴ $CF = BF$． 即 F 是 BC 的中点．

（2）如下图，过点 C 作 $MH//BG$，交 GF 的延长线于点 H，