

湖北省武汉市汉铁高级中学 2022-2023 学年高三高考模拟考数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “ $a=2$ ”是“直线 $ax+2y-1=0$ 与 $x+(a-1)y+2=0$ 互相平行”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 设 i 是虚数单位，则 $(2+3i)(3-2i) = (\quad)$

- A. $12+5i$ B. $6-6i$ C. $5i$ D. 13

3. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上，它的底面边长为 $\sqrt{6}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则它的外接球的表面积为 ()

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

4. 已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$)，则斜率 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

5. 给出下列三个命题：

①“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ ”的否定；

②在 $\triangle ABC$ 中，“ $B > 30^\circ$ ”是“ $\cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的充要条件；

③将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象。

其中假命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3 = -3$ ， $S_7 = -7$ ，则 S_n 的最小值为 ()

- A. -12 B. -15 C. -16 D. -18

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $S_6 =$ ()

- A. 21 B. 22 C. 11 D. 12

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$, 则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

9. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 存在两项 a_m, a_n , 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 3a_1$, $a_6 = 2a_5 + 3a_4$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{9}{4}$

10. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为2, 且球心为线段 BC 的中点, 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

11. 若复数 $\frac{2a+2i}{1+i}$ ($a \in R$) 是纯虚数, 则复数 $2a+2i$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

12. 根据最小二乘法由一组样本点 (x_i, y_i) (其中 $i = 1, 2, \dots, 300$), 求得的回归方程是 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 至少有一个样本点落在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上
B. 若所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则变量间的相关系数为1
C. 对所有的解释变量 x_i ($i = 1, 2, \dots, 300$), $\hat{b}x_i + \hat{a}$ 的值一定与 y_i 有误差
D. 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$, 则变量 x 与 y 正相关

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 已知命题 $P: \forall x > 0, x^3 > 0$, 那么 P 是_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, 若目标函数 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为12, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为_____.

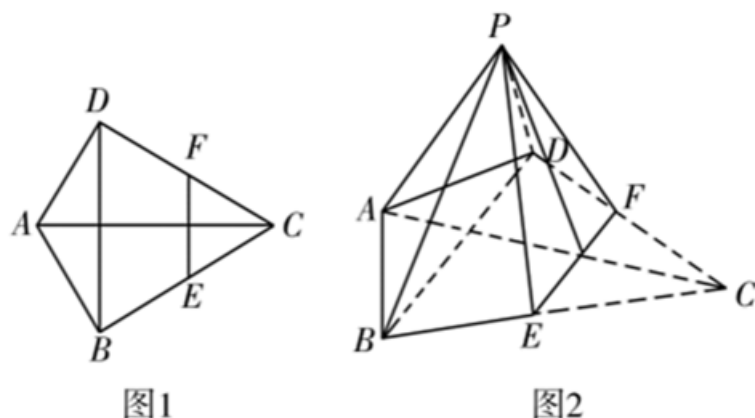
15. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 A, B, C 成等差数列, 若 $b = \sqrt{3}$, $c = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 某市公租房源位于 A, B, C 三个小区, 每位申请人只能申请其中一个小区的房子, 申请其中任意一个小区的房子是等可能的, 则该市的任意5位申请人中, 恰好有2人申请 A 小区房源的概率是_____. (用数字作答)

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知二阶矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 矩阵 M 属于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的一个特征向量为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 属于特征值 $\lambda_2 = 4$ 的一个特征向量为 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. 求矩阵 M .

18. (12 分) 如图 1, $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是处在同一个平面内的两个全等的直角三角形, $\angle ACB = \angle ACD = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 2$, 连接 BD , E 边 BC 上一点, 过 E 作 $EF \parallel BD$, 交 CD 于点 F , 沿 EF 将 $\triangle CEF$ 向上翻折, 得到如图 2 所示的六面体 $P-ABEFD$,



(1) 求证: $BD \perp AP$;

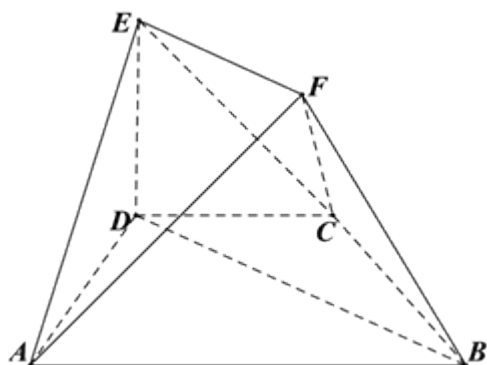
(2) 设 $\vec{BE} = \lambda \vec{EC}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 若平面 PAB 与平面 PDF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 λ 的值;

(3) 若平面 $PEF \perp$ 底面 $ABEFD$, 求六面体 $P-ABEFD$ 的体积的最大值.

19. (12 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABD = 30^\circ$, $AB = 2CD = 2AD = 2$, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel BD$, 且 $BD = 2EF$.

(I) 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 $BDEF$;

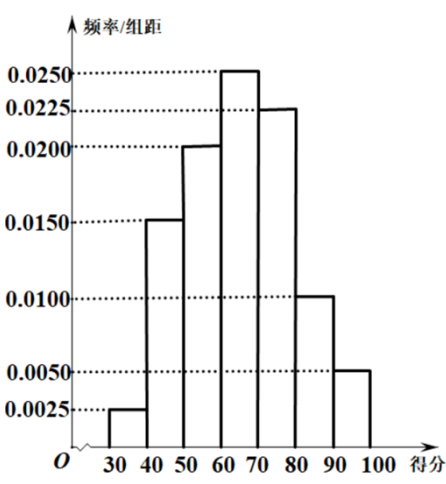
(II) 若二面角 $C-BF-D$ 的大小为 60° , 求 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



20. (12 分) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程是 $\rho \cos^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$, 直线 l_1 和直线 l_2 的极坐标方程分别是 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 和 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 其中 $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

- (1) 写出曲线 C 的直角坐标方程;
- (2) 设直线 l_1 和直线 l_2 分别与曲线 C 交于除极点 O 的另外点 A, B , 求 $\triangle OAB$ 的面积最小值.

21. (12 分) 为了解广大学生家长对校园食品安全的认识, 某市食品安全检测部门对该市家长进行了一次校园食品安全网络知识问卷调查, 每一位学生家长仅有一次参加机会, 现对有效问卷进行整理, 并随机抽取出了 200 份答卷, 统计这些答卷的得分 (满分: 100 分) 制出的频率分布直方图如图所示, 由频率分布直方图可以认为, 此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$, 其中 μ 近似为这 200 人得分的平均值 (同一组数据用该组区间的中点值作为代表).



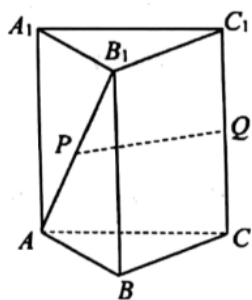
- (1) 请利用正态分布的知识求 $P(36 < Z \leq 79.5)$;
- (2) 该市食品安全检测部门为此次参加问卷调查的学生家长制定如下奖励方案:
 - ① 得分不低于 μ 的可以获赠 2 次随机话费, 得分低于 μ 的可以获赠 1 次随机话费;
 - ② 每次获赠的随机话费和对应的概率为:

获赠的随机话费 (单位: 元)	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

市食品安全检测部门预计参加此次活动的家长约 5000 人, 请依据以上数据估计此次活动可能赠送出多少话费?

附: ① $\sqrt{210} \approx 14.5$; ② 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

22. (10 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CA = CB$, 点 P, Q 分别为 AB_1, CC_1 的中点. 求证:



(1) $PQ \parallel$ 平面 ABC ;

(2) $PQ \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

利用两条直线互相平行的条件进行判定

【详解】

当 $a = 2$ 时，直线方程为 $2x + 2y - 1 = 0$ 与 $x + y + 2 = 0$ ，可得两直线平行；

若直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与 $x + (a - 1)y + 2 = 0$ 互相平行，则 $a(a - 1) = 2$ ，解得 $a_1 = 2$ ，

$a_2 = -1$ ，则“ $a = 2$ ”是“直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与 $x + (a - 1)y + 2 = 0$ 互相平行”的充分不必要条件，故选 A

【点睛】

本题主要考查了两直线平行的条件和性质，充分条件，必要条件的定义和判断方法，属于基础题.

2. A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2 + 3i)(3 - 2i) = 6 + 5i - 6i^2 = 12 + 5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

3. C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则

$(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，得到答案.

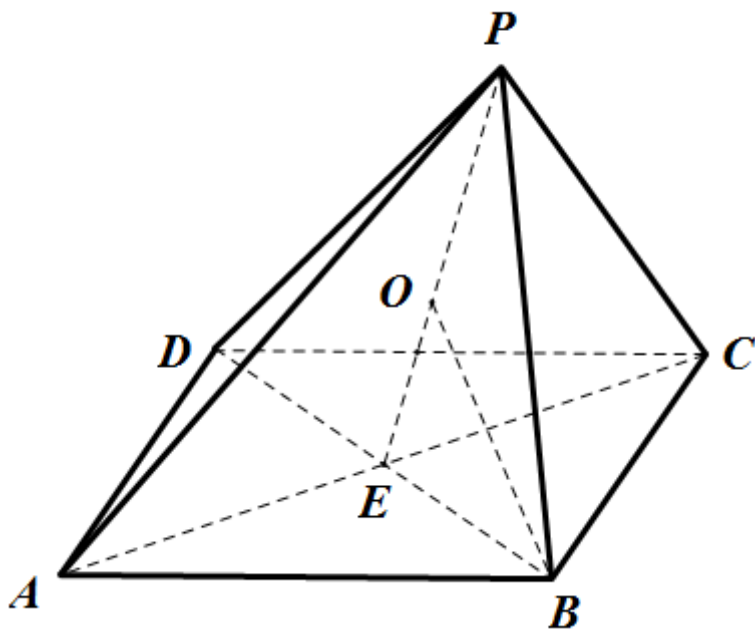
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}$ ，故 $BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$ ， $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3$ ，

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

4. C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，设直线 l 的方程为： $y = kx + b$ ，与抛物线方程联立，由 $\Delta > 0$ 得 $kb < 1$ ，利用韦达定理结

合已知条件得 $b = \frac{2-k^2}{k}$ ， $m = \frac{2}{k}$ ，代入上式即可求出 k 的取值范围.

【详解】

设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 y 得: $k^2 x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (2kb - 4)^2 - 4k^2 b^2 > 0,$$

$$\therefore kb < 1,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{b^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = \frac{4}{k},$$

Q 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$),

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = \frac{4}{k} = 2m,$$

$$\therefore b = \frac{2 - k^2}{k}, \quad m = \frac{2}{k},$$

Q $m > 0$,

$$\therefore k > 0,$$

把 $b = \frac{2 - k^2}{k}$ 代入 $kb < 1$, 得 $2 - k^2 < 1$,

$$\therefore k^2 > 1,$$

$$\therefore k > 1,$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系, 考查了韦达定理的应用, 属于中档题.

5. C

【解析】

结合不等式、三角函数的性质, 对三个命题逐个分析并判断其真假, 即可选出答案.

【详解】

对于命题①, 因为 $x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0 - 1)^2 \geq 0$, 所以“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ ”是真命题, 故其否定是假命题, 即①是假命题;

对于命题②, 充分性: $\forall ABC$ 中, 若 $B > 30^\circ$, 则 $30^\circ < B < 180^\circ$, 由余弦函数的单调性可知, $\cos 180^\circ < \cos B < \cos 30^\circ$, 即

$$-1 < \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{即可得到 } \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{即充分性成立; 必要性: } \forall ABC \text{ 中, } 0^\circ < B < 180^\circ, \text{若 } \cos B < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

,结合余弦函数的单调性可知, $\cos 180^\circ < \cos B < \cos 30^\circ$,即 $30^\circ < B < 180^\circ$,可得到 $B > 30^\circ$,即必要性成立.故命题②正确;

对于命题③,将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,可得到 $y = 2\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,即

命题③是假命题.

故假命题有①③.

故选:C

【点睛】

本题考查了命题真假的判断,考查了余弦函数单调性的应用,考查了三角函数图象的平移变换,考查了学生的逻辑推理能力,属于基础题.

6. C

【解析】

根据已知条件求得等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,判断出 S_n 最小时 n 的值,由此求得 S_n 的最小值.

【详解】

依题意 $\begin{cases} a_1 + 2d = -3 \\ 7a_1 + 21d = -7 \end{cases}$,解得 $a_1 = -7, d = 2$,所以 $a_n = 2n - 9$.由 $a_n = 2n - 9 \leq 0$ 解得 $n \leq \frac{9}{2}$,所以前 n 项和中,前

4项的和最小,且 $S_4 = 4a_1 + 6d = -28 + 12 = -16$.

故选:C

【点睛】

本小题主要考查等差数列通项公式和前 n 项和公式的基本量计算,考查等差数列前 n 项和最值的求法,属于基础题.

7. A

【解析】

由题意知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等差数列,结合等差中项,列出方程,即可求出 S_6 的值.

【详解】

解:由 $\{a_n\}$ 为等差数列,可知 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 也成等差数列,

所以 $2(S_4 - S_2) = S_2 + S_6 - S_4$,即 $2 \times (10 - 3) = 3 + S_6 - 10$,解得 $S_6 = 21$.

故选:A.

【点睛】

本题考查了等差数列的性质,考查了等差中项.对于等差数列,一般用首项和公差将已知量表示出来,继而求出首项和

公差.但是这种基本量法计算量相对比较大,如果能结合等差数列性质,可使得计算量大大减少.

8. C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d = -\frac{2}{3}$, $a_1 = 15$, 则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$, 所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$, 则 $n = 23$, 应选答案 C.

9. C

【解析】

由已知求出等比数列 $\{a_n\}$ 的公比, 进而求出 $m+n=4$, 尝试用基本不等式, 但 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 取不到等号, 所以考虑直接取 m, n 的值代入比较即可.

【详解】

由 $a_6 = 2a_5 + 3a_4$, $\therefore q^2 - 2q - 3 = 0$, $\therefore q = 3$ 或 $q = -1$ (舍).

由 $\sqrt{a_m \cdot a_n} = 3a_1$, $\therefore a_m \cdot a_n = a_1^2 \cdot 3^{m+n-2} = 9a_1^2$, $\therefore m+n=4$.

当 $m=1, n=3$ 时 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{7}{3}$;

当 $m=2, n=2$ 时 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{5}{2}$;

当 $m=3, n=1$ 时, $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{13}{3}$, 所以最小值为 $\frac{7}{3}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查等比数列通项公式基本量的计算及最小值, 属于基础题.

10. C

【解析】

由题可推断出 $\triangle VABC$ 和 $\triangle VBCD$ 都是直角三角形, 设球心为 O , 要使三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大, 则需满足 $h = OD$, 结合几何关系和图形即可求解

【详解】

先画出图形, 由球心到各点距离相等可得, $OA = OB = OC$, 故 $\triangle VABC$ 是直角三角形, 设 $AB = x, AC = y$, 则有

$x^2 + y^2 = 4^2 \geq 2xy$, 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy \leq 4$, 当且仅当 $x = y = 2\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取最大值 4, 要使三

棱锥体积最大, 则需使高 $h = OD = 2$, 此时 $V_{ABC-D} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/958121116051006137>