

第一章 集合与常用逻辑用语

第4节 充分条件与必要条件

第一课时 充分条件与必要条件

学习目标

- 1、了解命题的概念，会判断命题的真假；
- 2、理解充分条件、必要条件的意义；
- 3、会判断充分条件和必要条件。

在初中，我们已经对命题有了初步的认识。

命题：一般地，我们把用 语言、符号 或 式子 表达的，可以 判断真假 的 陈述句 叫做 命题。

判断为 真 的语句叫做 真命题，

判断为 假 的语句叫做 假命题。

中学数学中的许多命题可以写成“若 p ，则 q ”“如果 p ，那么 q ”等形式。其中 p 称为命题的条件， q 称为命题的结论。

本节主要讨论这种形式的命题。下面我们将进一步考查“若 p ，则 q ”形式的命题中 p 和 q 的关系，学习数学中的三个常用的逻辑用语——充分条件、必要条件和充要条件。

例1: 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中,
哪些是真命题? 哪些是假命题?

- (1) 若平行四边形的对角线互相垂直,
则这个平行四边形是菱形; **真命题**
- (2) 若两个三角形的周长相等,
则这两个三角形全等; **假命题**
- (3) 若 $x^2 - 4x + 3 = 0$, 则 $x = 1$; **假命题**
- (4) 若平面内两条直线 a 和 b 均垂直
于直线 l , 则 $a // b$. **真命题**

练习1：下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些是真命题？哪些是假命题？

- (1)若两个三角形全等，则这两个三角形相似；
真命题
- (2)若 $x > 5$ ，则 $x > 10$.假命题

练习1: 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, 哪些是真命题? 哪些是假命题?

- (1) 若两个三角形全等, 则这两个三角形相似;
(2) 若 $x > 5$, 则 $x > 10$.

在真命题(1)中, 如果 p 成立, 那么 q 一定成立.
即: 只要有 p 就能充分地保证 q 的成立.

此时, 如果 q 不成立, 则 p 一定不成立, 所以,
 q 对于 p 成立而言是必要的.

练习1: 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, 哪些是真命题? 哪些是假命题?

(1) 若两个三角形全等, 则这两个三角形相似;

(2) 若 \underline{p} , 则 \underline{q} .

在假命题(2)中, 条件 p 不充分,
所以, q 对于 p 成立而言是不必要的.

2、充分条件与必要条件

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由 p 通过推理能推出 q 。这时，我们就说，由 p 可以推出 q ，记作： $p \Rightarrow q$ ，读作： p 推出 q 。

并且说， p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件。

如果“若 p ，则 q ”为假命题，那么由条件 p 不能推出结论 q ，记作： $p \not\Rightarrow q$ 。

此时，我们就说， p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件。也可以说， p 是 q 的不充分条件， q 是 p 的不必要条件。

充分条件与必要条件会同时出现，但是要分清楚谁是谁的什么条件，即 p 是 q 的还是 q 是 p 的什么条件。

例2 下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

- (1)若四边形的两组对角分别相等，则这个四边形是平行四边形；
- (2)若两个三角形的三边对应成比例，则这两个三角形相似；
- (3)若四边形为菱形，则这个四边形的对角线互相垂直；

解:(1)这是一条平行四边形的**判定定理**, $p \Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.
(2)这是一条相似三角形的**判定定理**, $p \Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.
(3)这是一条菱形的**性质定理**, $p \Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.

(4)若 $x^2=1$ ，则 $x=1$ ；

(5)若 $a=b$,则 $ac=bc$,

(6)若 x,y 为无理数，则 xy 为无理数.

解:(4)由于 $(-1)^2=1$,但 $-1\neq 1$, $p\nRightarrow q$,所以 p 不是 q 的充分条件.

(5)由等式性质知, $p\Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件.

(6) $\sqrt{2}$ 是无理数,但 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 为有理数, $p\nRightarrow q$,
所以 p 不是 q 的充分条件.

举反例是判断一个命题是假命题的重要方法.

思考例2中命题(1)若四边形的两组对角分别相等，则这个四边形是平行四边形.给出了“四边形是平行四边形”的一个**充分条件**，即“四边形的两组对角分别相等”.这样的充分条件**唯一**吗？如果不唯一，那么你能再给出几个不同的充分条件吗？

例如,我们知道,下列命题均为真命题：

- ①若四边形的两组对边分别相等，则这个四边形是平行四边形；
- ②若四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形；
- ③若四边形的两条对角线互相平分，则这个四边形是平行四边形。

所以，“四边形的两组对边分别相等” “四边形的一组对边平行且相等” “四边形的两条对角线互相平分” 都是“四边形是平行四边形”的充分条件.

我们说 p 是 q 的充分条件,是指由条件 p 可以推出结论 q ,但这并不意味着只能由这个条件 p 才能推出结论 q 。

一般来说,对给定结论 q ,使得 q 成立的条件 p 是不唯一的。

事实上,例1中命题(1)及上述命题①②③均是平行四边形的判定定理 .

所以,平行四边形的每一条判定定理都给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件,即这个条件能充分保证四边形是平行四边形 .

类似地,平行线的每一条判定定理都给出了“两直线平行”的一个充分条件,例如“内错角相等”这个条件就充分保证了“两条直线平行” .

深化概念

充分性：条件是充足的，条件是足够的，条件是足以保证结论成立的，但**不是唯一的**。

“有之必成立，无之未必不成立”

一般地，数学中的**每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件**。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/958136012024006130>