

浙江省温州市求知中学 2024 届高三适应性调研考试数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $a \in \mathbb{R}$ ，则“ $a = 3$ ”是“ $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90”的（ ）

A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 若 $z = 1 + (1-a)i$ ($a \in \mathbb{R}$)， $|z| = \sqrt{2}$ ，则 $a =$ ()

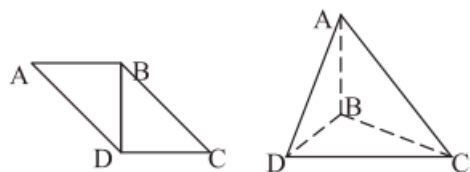
A. 0 或 2 B. 0 C. 1 或 2 D. 1
3. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1}$ ， $g(x) = -x + m + 2$ ，若对任意 $x_1 \in [1, 3]$ ，总存在 $x_2 \in [1, 3]$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立，则实数 m 的取值范围为 ()

A. $\left[\frac{17}{2}, 9\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{17}{2}\right] \cup [9, +\infty)$

C. $\left[\frac{17}{4}, \frac{9}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{17}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$
4. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (5, -1)$ ，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 ()

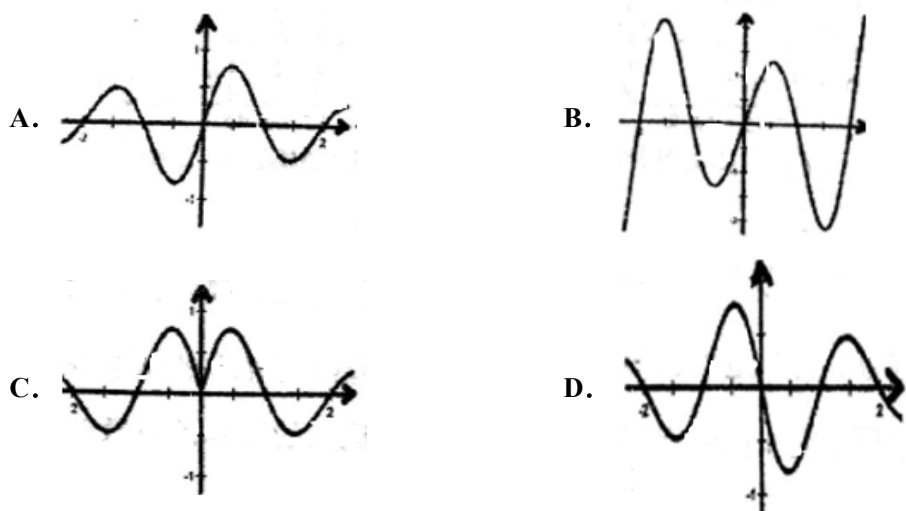
A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°
5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 = -5$ ， $S_4 = -16$ ，则 $a_6 =$ ()

A. 5 B. 3 C. -12 D. -13
6. 如图，将两个全等等腰直角三角形拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，则直线 AC 与 BD 所成角余弦值为 ()

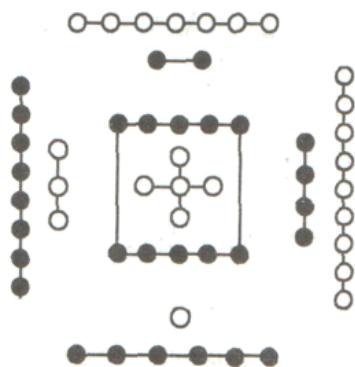


- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

7. 函数 $y(\square) = \sin(\square\square)\square - \frac{\pi}{2}$ 的图象可能是下列哪一个? ()



8. 《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中华文化，阴阳术数之源，其中河图的排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中，如图，白圈为阳数，黑点为阴数，若从阴数和阳数中各取一数，则其差的绝对值为 5 的概率为



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{6}{25}$ C. $\frac{8}{25}$ D. $\frac{2}{5}$

9. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边， $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ ，则 $A =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

10. M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点， N 是圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆上的一点，则 $|MN|$ 最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2} - 1$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $2\sqrt{2} - 1$ D. $\frac{3}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = te^{2x} + (t-2)e^x - x$ ($t \geq 0$)，若函数 $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上有唯一零点，则 t 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ 或 0 C. 1 或 0 D. 2 或 0

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则双曲线 C 的方程为 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 曲线 $f(x) = 4x - e^x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____.

14. 平面区域 $\begin{cases} 3y + 2x - 1 \geq 0 \\ y + 4x - 7 \leq 0 \\ y - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ 的外接圆的方程是_____.

15. 戊戌年结束, 己亥年伊始, 小康, 小梁, 小谭, 小杨, 小刘, 小林六人分成四组, 其中两个组各 2 人, 另两个组各 1 人, 分别奔赴四所不同的学校参加演讲, 则不同的分配方案有_____种 (用数字作答),

16. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_2 = 5, S_6 + S_5 = 2S_4 + 35$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

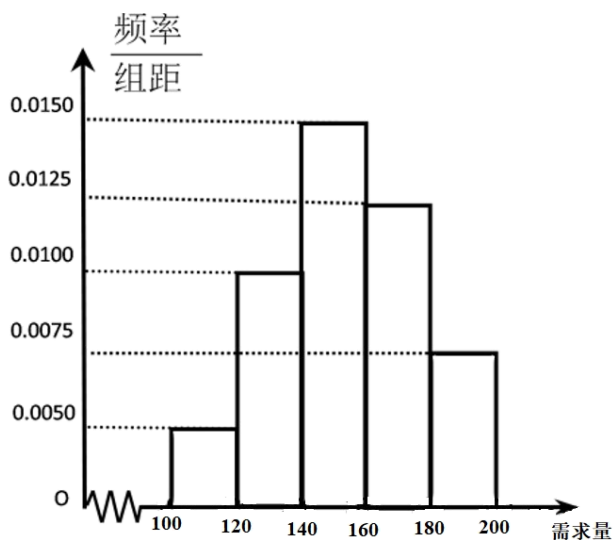
(2) 若满足不等式 $\lambda \cdot (\sqrt{2})^n + (-1)^{n-1} S_n < 0$ 的正整数 n 恰有 3 个, 求正实数 λ 的取值范围.

18. (12 分) 2019 年是五四运动 100 周年.五四运动以来的 100 年, 是中国青年一代又一代接续奋斗、凯歌前行的 100 年, 是中口青年用青春之我创造青春之中国、青春之民族的 100 年.为继承和发扬五四精神在青年节到来之际, 学校组织“五四运动 100 周年”知识竞赛, 竞赛的一个环节由 10 道题目组成, 其中 6 道 A 类题、4 道 B 类题, 参赛者需从 10 道题目中随机抽取 3 道作答, 现有甲同学参加该环节的比赛.

(1) 求甲同学至少抽到 2 道 B 类题的概率;

(2) 若甲同学答对每道 A 类题的概率都是 $\frac{2}{3}$, 答对每道 B 类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 且各题答对与否相互独立.现已知甲同学恰好抽中 2 道 A 类题和 1 道 B 类题, 用 X 表示甲同学答对题目的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

19. (12 分) 某大学生在开学季准备销售一种文具套盒进行试创业, 在一个开学季内, 每售出 1 盒该产品获利 50 元, 未售出的产品, 每盒亏损 30 元.根据历史资料, 得到开学季市场需求量的频率分布直方图, 如图所示.该同学为这个开学季进了 160 盒该产品, 以 x (单位: 盒, $100 \leq x \leq 200$) 表示这个开学季内的市场需求量, y (单位: 元) 表示这个开学季内经销该产品的利润.



- (1) 根据直方图估计这个开学季内市场需求量 x 的平均数和众数；
- (2) 将 y 表示为 x 的函数；
- (3) 以需求量的频率作为各需求量的概率，求开学季利润不少于 4800 元的概率。

20. (12 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2 \sin \theta$ 。

- (1) 写出 C_1 的极坐标方程和 C_2 的直角坐标方程；
- (2) 已知点 M_1 、 M_2 的极坐标分别为 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $(2, 0)$ ，直线 M_1M_2 与曲线 C_2 相交于 P ， Q 两点，射线 OP 与曲线 C_1 相交于点 A ，射线 OQ 与曲线 C_1 相交于点 B ，求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值。

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，已知 $a=4$ ， $\frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{c-b}{c}$ 。

- (1) 求 A 的余弦值；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

22. (10 分) 已知 $\{a_n\}$ 为各项均为整数的等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 a_3 为 $\frac{1}{3}a_2$ 和 a_{13} 的等比中项， $S_7 = 49$ 。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $T_n = \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{2}{a_n a_{n+1}}$, 求最大的正整数 n , 使得 $T_n < \frac{2018}{2019}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

求得 $x(1+ax)^5$ 的二项展开式的通项为 $C_5^k \times a^k \cdot x^{k+1}$, 令 $k=2$ 时, 可得 x^3 项的系数为 90, 即 $C_5^2 \times a^2 = 90$, 求得 a , 即可得出结果.

【详解】

若 $a=3$ 则 $x(1+ax)^5 = x(1+3x)^5$ 二项展开式的通项为 $C_5^k \times 3^k \cdot x^{k+1}$, 令 $k+1=3$, 即 $k=2$, 则 x^3 项的系数为

$C_5^2 \times 3^2 = 90$, 充分性成立; 当 $x(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 90, 则有 $C_5^2 \times a^2 = 90$, 从而 $a = \pm 3$, 必要性不成立.

故选: B.

【点睛】

本题考查二项式定理、充分条件、必要条件及充要条件的判断知识, 考查考生的分析问题的能力和计算能力, 难度较易.

2、A

【解析】

利用复数的模的运算列方程, 解方程求得 a 的值.

【详解】

由于 $z = 1 + (1-a)i$ ($a \in R$), $|z| = \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{1^2 + (1-a)^2} = \sqrt{2}$, 解得 $a = 0$ 或 $a = 2$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查复数模的运算, 属于基础题.

3、C

【解析】

将函数 $f(x)$ 解析式化简, 并求得 $f'(x)$, 根据当 $x_1 \in [1, 3]$ 时 $f'(x) > 0$ 可得 $f(x_1)$ 的值域 由函数 $g(x) = -x + m + 2$

在 $x_2 \in [1, 3]$ 上单调递减可得 $g(x_2)$ 的值域, 结合存在性成立问题满足的集合关系, 即可求得 m 的取值范围.

【详解】

$$\text{依题意 } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} = \frac{x^2 + x + 2(x + 1) + 1}{x + 1}$$

$$= x + \frac{1}{x + 1} + 2,$$

$$\text{则 } f'(x) = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2},$$

当 $x \in [1, 3]$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

$$\text{当 } x_1 \in [1, 3] \text{ 时, } f(x_1) \in \left[\frac{7}{2}, \frac{21}{4} \right];$$

而函数 $g(x) = -x + m + 2$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减,

$$\text{故 } g(x_2) \in [m - 1, m + 1],$$

$$\text{则只需 } \left[\frac{7}{2}, \frac{21}{4} \right] \subseteq [m - 1, m + 1],$$

$$\text{故 } \begin{cases} m - 1 \leq \frac{7}{2} \\ m + 1 \geq \frac{21}{4} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{17}{4} \leq m \leq \frac{9}{2},$$

$$\text{故实数 } m \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{17}{4}, \frac{9}{2} \right].$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了导数在判断函数单调性中的应用, 恒成立与存在性成立问题的综合应用, 属于中档题.

4、C

【解析】

求出 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2, -3)$, 进而可求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$, 即能求出向量夹角.

【详解】

解: 由题意知, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2, -3)$. 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$

所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 90° .

故选:C.

【点睛】

本题考查了向量的坐标运算，考查了数量积的坐标表示.求向量夹角时，通常代入公式 $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 进行计算.

5、B

【解析】

由题得 $a_1 + d = -5$ ， $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$ ，解得 $a_1 = -7$ ， $d = 2$ ，计算可得 a_6 .

【详解】

$Q a_2 = -5$ ， $S_4 = -16$ ， $\therefore a_1 + d = -5$ ， $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$ ，解得 $a_1 = -7$ ， $d = 2$ ，

$\therefore a_6 = a_1 + 5d = 3$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，前 n 项和公式，考查了学生运算求解能力.

6、C

【解析】

利用建系，假设 AB 长度，表示向量 $\vec{AC}$ 与 $\vec{BD}$ ，利用向量的夹角公式，可得结果.

【详解】

由平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ， $AB \perp BD$

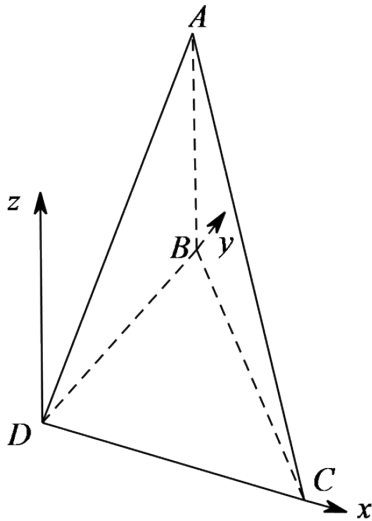
平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$ ， $AB \not\subset$ 平面 ABD

所以 $AB \perp$ 平面 BCD ，又 $DC \subset$ 平面 BCD

所以 $AB \perp DC$ ，又 $DB \perp DC$

所以作 z 轴 $\parallel AB$ ，建立空间直角坐标系 $B-xyz$

如图



设 $AB=1$ ，所以 $BD=1, DC=1, BC=\sqrt{2}$

则 $A(0,1,1), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,0,0)$

所以 $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-1), \overrightarrow{BD}=(0,-1,0)$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选：C

【点睛】

本题考查异面直线所成角的余弦值，一般采用这两种方法：（1）将两条异面直线作辅助线放到同一个平面，然后利用解三角形知识求解；（2）建系，利用空间向量，属基础题.

7、A

【解析】

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}>0$ 排除选项 B； $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2^{-\frac{1}{2}}<0$ 排除选项 C；由函数 $f(x)$ 有无数个零点，排除选项 D，从而可得结果.

【详解】

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}>0$ ，可排除选项 B， $f(-1)=-2^{-\frac{1}{2}}<0$ 可排除选项 C；由 $f(x)=0$ 可得 $2^x=2x \Rightarrow x=0, x \in \mathbb{R}$ ，

即函数 $f(x)$ 有无数个零点，可排除选项 D，故选 A.

【点睛】

本题通过对多个图象的选择考查函数的图象与性质，属于中档题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意的选项一一排除.

8、A

【解析】

阳数：1,3,5,7,9，阴数：2,4,6,8,10，然后分析阴数和阳数差的绝对值为5的情况数，最后计算相应概率.

【详解】

因为阳数：1,3,5,7,9，阴数：2,4,6,8,10，所以从阴数和阳数中各取一数差的绝对值有： $5 \times 5 = 25$ 个，满足差的绝对值为5的有： $(1,6), (3,8), (5,10), (7,2), (9,4)$ 共5个，则 $P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查实际背景下古典概型的计算，难度一般.古典概型的概率计算公式： $P = \frac{\text{目标事件的个数}}{\text{基本本事件的总个数}}$.

9、C

【解析】

原式由正弦定理化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$ ，由于 $\sin C \neq 0$ ， $0 < A < \pi$ 可求A的值.

【详解】

解：由 $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + c$ 及正弦定理得 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin C \sin A = \sin B + \sin C$.

因为 $B = \pi - A - C$ ，所以 $\sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ 代入上式化简得 $\sqrt{3} \sin C \sin A = \cos A \sin C + \sin C$.

由于 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

又 $0 < A < \pi$ ，故 $A = \frac{\pi}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查正弦定理解三角形，三角函数恒等变换等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，属于中档题.

10、C

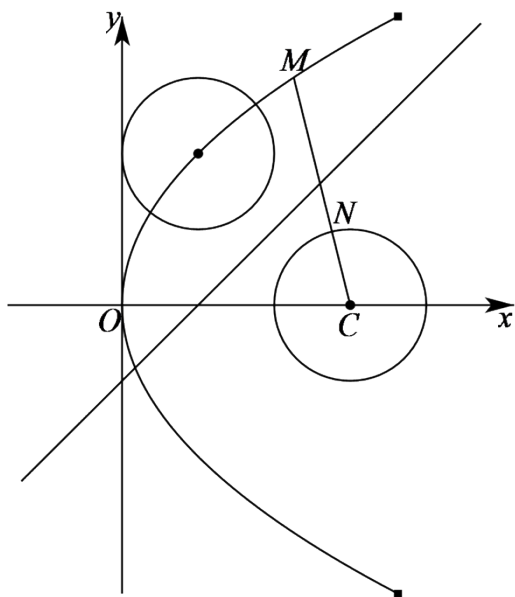
【解析】

求出点 $(1,2)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称点C的坐标，进而可得出圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的

对称圆 C 的方程，利用二次函数的基本性质求出 $|MC|$ 的最小值，由此可得出 $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1$ ，即可得解.

【详解】

如下图所示：



设点 $(1, 2)$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称点为点 $C(a, b)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b+2}{2} - 1 = 0 \\ \frac{b-2}{a-1} = -1 \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} a-b-3=0 \\ a+b-3=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}, \text{即点 } C(3, 0),$$

所以, 圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 关于直线 $x - y - 1 = 0$ 的对称圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$,

$$\text{设点 } M\left(\frac{y^2}{4}, y\right), \text{ 则 } |MC| = \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} - 3\right)^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{2} + 9} = \sqrt{\frac{1}{16}(y^2 - 4)^2 + 8},$$

当 $y = \pm 2$ 时, $|MC|$ 取最小值 $2\sqrt{2}$, 因此, $|MN|_{\min} = |MC|_{\min} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查抛物线上一点到圆上一点最值的计算, 同时也考查了两圆关于直线对称性的应用, 考查计算能力, 属于中等题.

11、C

【解析】

求出函数的导函数, 当 $t > 0$ 时, 只需 $f(-\ln t) = 0$, 即 $\ln t - \frac{1}{t} + 1 = 0$, 令 $g(t) = \ln t - \frac{1}{t} + 1$, 利用导数求其单调区间, 即可求出参数 t 的值, 当 $t = 0$ 时, 根据函数的单调性及零点存在性定理可判断;

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/958136041125007032>