

2023-2024 学年广东省汕头金山中学高三第一次大考数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 A 类产品共两件 A_1, A_2 , B 类产品共三件 B_1, B_2, B_3 , 混放在一起, 现需要通过检测将其区分开来, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件 A 类产品或者检测出 3 件 B 类产品时, 检测结束, 则第一次检测出 B 类产品, 第二次检测出 A 类产品的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{10}$

2. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 若实数 a 满足

$f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ D. $(4, +\infty)$

3. $(2^x - 1)(2 - 2^x)^5$ 的展开式中 8^x 的项的系数为 ()

- A. 120 B. 80 C. 60 D. 40

4. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{5}$

5. 已知函数 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 若函数 $g(x)$ 的图象的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍后, 得到的函数在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ B. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$
C. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ D. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$

6. 若 $(1-2x)^n$ 的二项展开式中 x^2 的系数是 40, 则正整数 n 的值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

7. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值是 ()

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 2

8. 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大, 则展开式中的常数项是 ()

- A. 180 B. 90 C. 45 D. 360

9. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$,

$\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 则椭圆 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

10. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$ 且 $f(a) + f(a+1) > 2$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1$, 将 $f(x)$ 的图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标保持不

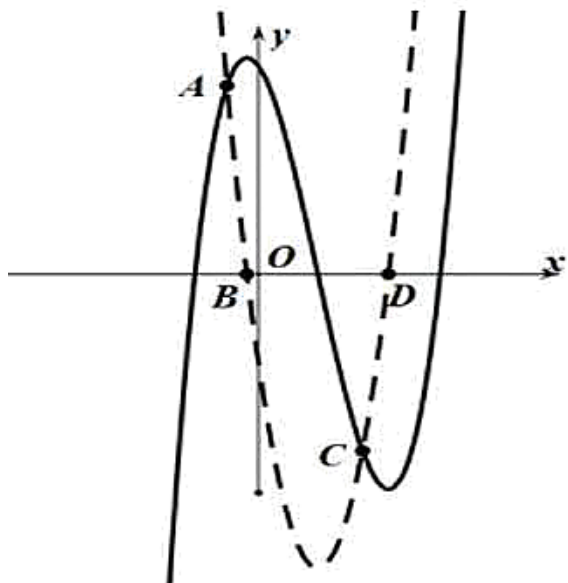
变; 再把所得图象向上平移 1 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 若 $g(x_1) \cdot g(x_2) = 9$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的值可能为

()

- A. $\frac{5\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$

12. 定义在 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 设 O 为坐标原点, A, B, C, D 四点的横

坐标依次为 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 1, \frac{4}{3}$, 则函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的单调递减区间是 ()



- A. $\left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ D. $(1, 2)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (x, 1)$, $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, 且 $\vec{u} \parallel \vec{v}$, 则实数 x 的值是_____.

14. 在 $\left(\frac{3}{x^2} + \sqrt{x}\right)^n$ 的二项展开式中，所有项的系数之和为 1024，则展开式常数项的值等于_____.

15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \log_3 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left[\frac{1}{3}f\left(\log_4 \frac{1}{3}\right)\right]$ 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, 对于任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为了整顿道路交通秩序，某地考虑将对行人闯红灯进行处罚.为了更好地了解市民的态度，在普通行人中随机选取了 200 人进行调查，当不处罚时，有 80 人会闯红灯，处罚时，得到如表数据：

处罚金额 x (单位：元)	5	10	15	20
会闯红灯的人数 y	50	40	20	10

若用表中数据所得频率代替概率.

- (1) 当罚金定为 10 元时，行人闯红灯的概率会比不进行处罚降低多少？
- (2) 将选取的 200 人中会闯红灯的市民分为两类：A 类市民在罚金不超过 10 元时就会改正行为；B 类是其他市民.现对 A 类与 B 类市民按分层抽样的方法抽取 4 人依次进行深度问卷，则前两位均为 B 类市民的概率是多少？

18. (12 分) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 函数 $f(x) = |2x + a| + |x - b|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求证： $a + 2b = 1$;

(2) 若 $2a+b \geq tab$ 恒成立, 求实数 t 的最大值.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b(a^2+c^2-b^2) = a^2c\cos C + ac^2\cos A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (t-2)x - t \ln x + 2$.

(1) 若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的极大值;

(2) 求实数 t 的范围, 使得 $f(x) \geq 2$ 恒成立.

21. (12 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + 2|x-a|$.

(1) 设 $a=1$, 求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集;

(2) 已知 $a > -1$, 且 $f(x)$ 的最小值等于 3, 求实数 a 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + bx$, 函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(1) 试用含有 a 的式子表示 b , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 对于函数 $f(x)$ 图象上的不同两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 如果在函数 $f(x)$ 图象上存在点

$M(x_0, y_0) (x_0 \in (x_1, x_2))$, 使得在点 M 处的切线 $l \parallel AB$, 则称 AB 存在“跟随切线”. 特别地, 当 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 时, 又称

AB 存在“中值跟随切线”. 试问: 函数 $f(x)$ 上是否存在两点 A, B 使得它存在“中值跟随切线”, 若存在, 求出 A, B 的坐标, 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据分步计数原理, 由古典概型概率公式可得第一次检测出 B 类产品的概率, 不放回情况下第二次检测出 A

类产品的概率，即可得解.

【详解】

A 类产品共两件 A_1, A_2 ， B 类产品共三件 B_1, B_2, B_3 ，

则第一次检测出 B 类产品的概率为 $\frac{3}{5}$ ；

不放回情况下，剩余 4 件产品，则第二次检测出 A 类产品的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

故第一次检测出 B 类产品，第二次检测出 A 类产品的概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ ；

故选：D.

【点睛】

本题考查了分步乘法计数原理的应用，古典概型概率计算公式的应用，属于基础题.

2、C

【解析】

根据题意，由函数的图象变换分析可得函数 $y = f(x)$ 为偶函数，又由函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，分

析可得 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2) \Rightarrow f(|\log_2 a|) < f(2) \Rightarrow |\log_2 a| < 2$ ，解可得 a 的取值范围，即可得答案.

【详解】

将函数 $y = f(x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位长度可得函数 $y = f(x)$ 的图象，

由于函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

即函数 $y = f(x)$ 为偶函数，由 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$ ，得 $f(|\log_2 a|) < f(2)$ ，

Q 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则 $|\log_2 a| < 2$ ，得 $-2 < \log_2 a < 2$ ，解得 $\frac{1}{4} < a < 4$.

因此，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数的单调性与奇偶性解不等式，注意分析函数 $y = f(x)$ 的奇偶性，属于中等题.

3、A

【解析】

化简得到 $(2^x - 1)(2 - 2^x)^5 = 2^x \cdot (2 - 2^x)^5 - (2 - 2^x)^5$ ，再利用二项式定理展开得到答案.

【详解】

$$(2^x - 1)(2 - 2^x)^5 = 2^x \cdot (2 - 2^x)^5 - (2 - 2^x)^5$$

展开式中 8^x 的项为 $2^x C_5^2 2^3 (-2^x)^2 - C_5^3 2^2 (-2^x)^3 = 120 \times 8^x$.

故选：A

【点睛】

本题考查了二项式定理，意在考查学生的计算能力.

4、A

【解析】

准确画图，由图形对称性得出P点坐标，代入圆的方程得到c与a关系，可求双曲线的离心率.

【详解】

设PQ与x轴交于点A，由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴，

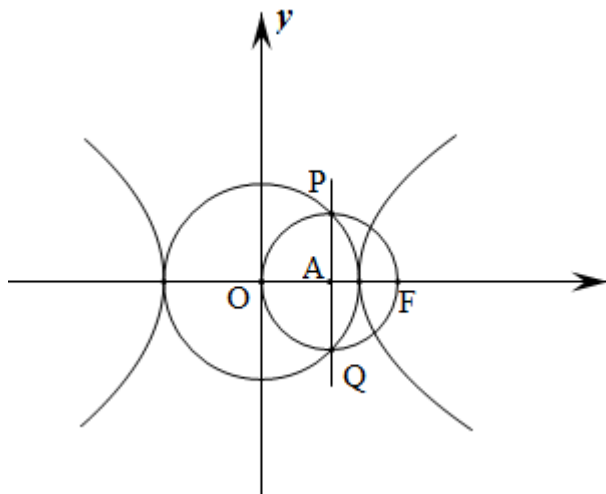
又 $Q|PQ| = |OF| = c$ ， $\therefore |PA| = \frac{c}{2}$ ， $\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径，

$\therefore A$ 为圆心 $|OA| = \frac{c}{2}$.

$\therefore P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ，又P点在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上，

$\therefore \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2$ ，即 $\frac{c^2}{2} = a^2$ ， $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$.

$\therefore e = \sqrt{2}$ ，故选A.



【点睛】

本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来。

5、A

【解析】

根据题意， $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right)$ ，求出 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，根据三角函数图像平移伸缩，即可求出 ω 的取值范围。

【详解】

已知 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，

$$\text{则 } \cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right),$$

$$\text{Q } \frac{2\pi}{3} + \varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right],$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

若函数 $g(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，则 $y = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，

$$\text{所以当 } x \in [0, 2\pi] \text{ 时， } 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} \right],$$

Q $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，

$$\therefore 5\pi, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} < 6\pi,$$

$$\therefore \frac{29}{24} < \omega < \frac{35}{24}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数图象的性质、三角函数的平移伸缩以及零点个数问题，考查转化思想和计算能力。

6、B

【解析】

先化简 $(1-2x)^n$ 的二项展开式中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r \cdot 1^{n-r} \cdot (-2x)^r$ ，然后直接求解即可

【详解】

$(1-2x)^n$ 的二项展开式中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r \cdot 1^{n-r} \cdot (-2x)^r$. 令 $r = 2$, 则 $T_3 = C_n^2 \cdot (-2x)^2$, $\therefore 4C_n^2 = 40$, $\therefore n = -4$ (舍) 或 $n = 5$.

【点睛】

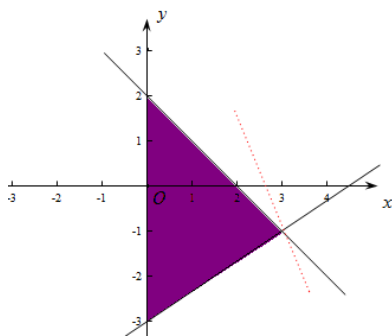
本题考查二项展开式问题, 属于基础题

7、B

【解析】

由约束条件作出可行域, 化目标函数为直线方程的斜截式, 数形结合得到最优解, 联立方程组求得最优解的坐标, 把最优解的坐标代入目标函数得结论.

【详解】



画出约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 表示的可行域, 如图,

由 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$,

将 $z = 2x + y$ 变形为 $y = -2x + z$,

平移直线 $y = -2x + z$,

由图可知当直 $y = -2x + z$ 经过点 $(3, -1)$ 时,

直线在 y 轴上的截距最大,

z 最大值为 $z = 2 \times 3 - 1 = 5$, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查线性规划中, 利用可行域求目标函数的最值, 属于简单题. 求目标函数最值的一般步骤是“一画、二移、三求”: (1) 作出可行域 (一定要注意是实线还是虚线); (2) 找到目标函数对应的最优解对应点 (在可行域内平移变形后的目标函数, 最先通过或最后通过的顶点就是最优解); (3) 将最优解坐标代入目标函数求出最值.

8、A

【解析】

试题分析：因为 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，所以 $n = 10$ ，

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (\sqrt{x})^{10-r} \cdot (\frac{2}{x^2})^r = 2^r C_{10}^r x^{5-\frac{5}{2}r}, \text{ 令 } 5 - \frac{5}{2}r = 0, \text{ 则 } r = 2, T_3 = 4C_{10}^2 = 180.$$

考点：1.二项式定理；2.组合数的计算.

9、C

【解析】

根据 $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$ 表示出线段长度，由勾股定理，解出每条线段的长度，再由勾股定理构造出 a, c 关系，求出离心率.

【详解】

$$\text{Q } \overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$$

设 $\overline{BF_2} = x$ ，则 $\overline{AF_2} = 2x$

由椭圆的定义，可以得到 $\overline{AF_1} = 2a - 2x, \overline{BF_1} = 2a - x$

$$\text{Q } \overline{AF_1} \cdot \overline{AF_2} = 0, \therefore \overline{AF_1} \perp \overline{AF_2}$$

在 $\text{Rt}\triangle AF_1B$ 中，有 $(2a - 2x)^2 + (3x)^2 = (2a - x)^2$ ，解得 $x = \frac{a}{3}$

$$\therefore \overline{AF_2} = \frac{2a}{3}, \overline{AF_1} = \frac{4a}{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，有 $\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = (2c)^2$

$$\text{整理得 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

故选 C 项.

【点睛】

本题考查几何法求椭圆离心率，是求椭圆离心率的一个常用方法，通过几何关系，构造出 a, c 关系，得到离心率.属于中档题.

10、B

【解析】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1$ ，判断出 $F(x)$ 的单调性和奇偶性，由此求得不等式 $f(a) + f(a+1) > 2$ 的解集.

【详解】

构造函数 $F(x) = f(x) - 1 = \ln \frac{1+x}{1-x} + x$, 由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 解得 $-1 < x < 1$, 所以 $F(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 且

$$F(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - x = -\ln \frac{1-x}{1+x} - x = -\left(\ln \frac{1-x}{1+x} + x\right) = -F(x), \text{ 所以 } F(x) \text{ 为奇函数, 而}$$

$$F(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x = \ln\left(-1 + \frac{2}{1-x}\right) + x, \text{ 所以 } F(x) \text{ 在定义域上为增函数, 且 } F(0) = \ln 1 + 0 = 0. \text{ 由}$$

$$f(a) + f(a+1) > 2 \text{ 得 } f(a) - 1 + f(a+1) - 1 > 0, \text{ 即 } F(a) + F(a+1) > 0, \text{ 所以 } \begin{cases} a + a + 1 > 0 \\ -1 < a < 1 \\ -1 < a + 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0.$$

故选: B

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性和奇偶性解不等式, 属于中档题.

11、C

【解析】

利用二倍角公式与辅助角公式将函数 $y = f(x)$ 的解析式化简, 然后利用图象变换规律得出函数 $y = g(x)$ 的解析式为

$$g(x) = 2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \text{ 可得函数 } y = g(x) \text{ 的值域为 } [-1, 3], \text{ 结合条件 } g(x_1) \cdot g(x_2) = 9, \text{ 可得出 } g(x_1)、g(x_2)$$

均为函数 $y = g(x)$ 的最大值, 于是得出 $|x_1 - x_2|$ 为函数 $y = g(x)$ 最小正周期的整数倍, 由此可得出正确选项.

【详解】

$$\text{函数 } f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

将函数 $y = f(x)$ 的图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 得 $y = 2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象;

再把所得图象向上平移 1 个单位, 得函数 $y = g(x) = 2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 的图象, 易知函数 $y = g(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$.

若 $g(x_1) \cdot g(x_2) = 9$, 则 $g(x_1) = 3$ 且 $g(x_2) = 3$, 均为函数 $y = g(x)$ 的最大值,

$$\text{由 } 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 解得 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z});$$

其中 $x_1、x_2$ 是三角函数 $y = g(x)$ 最高点的横坐标,

$$\therefore |x_1 - x_2| \text{ 的值为函数 } y = g(x) \text{ 的最小正周期 } T \text{ 的整数倍, 且 } T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/965134001044011332>