

新疆哈密地区第二中学 2023-2024 学年高三下学期考试数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 m, n 和平面 α ，若 $m \perp \alpha$ ，则“ $m \perp n$ ”是“ $n // \alpha$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 不充分不必要

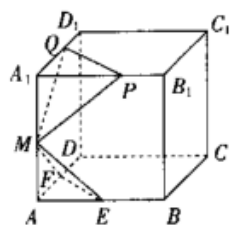
2. 已知复数 z 满足 $i(3+z)=1+i$ ，则 z 的虚部为（ ）

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=1$ ，且公比为 2，则 S_n 与 a_n 的关系正确的是（ ）

- A. $S_n = 4a_n - 1$ B. $S_n = 2a_n + 1$
C. $S_n = 2a_n - 1$ D. $S_n = 4a_n - 3$

4. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, M 分别是 AB, AD, AA_1 的中点，又 P, Q 分别在线段 A_1B_1, A_1D_1 上，且 $A_1P = A_1Q = m (0 < m < a)$ ，设平面 $MEF \cap$ 平面 $MPQ = l$ ，则下列结论中不成立的是（ ）



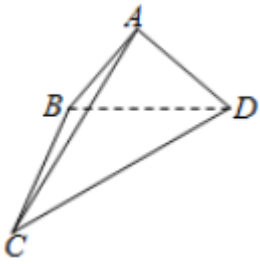
- A. $l //$ 平面 BDD_1B_1 B. $l \perp MC$
C. 当 $m = \frac{a}{2}$ 时，平面 $MPQ \perp MEF$ D. 当 m 变化时，直线 l 的位置不变

5. 已知函数 $f(x) = (e^x - a)\left(ax + \frac{1}{e}\right)$ ，若 $f(x) \geq 0 (x \in R)$ 恒成立，则满足条件的 a 的个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 如图，四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰直角三角形， $AB = \sqrt{2}$ ， $\angle BAD = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ，且二面角

$A-BD-C$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ，若四面体 $ABCD$ 的顶点都在球 O 上，则球 O 的表面积为（ ）

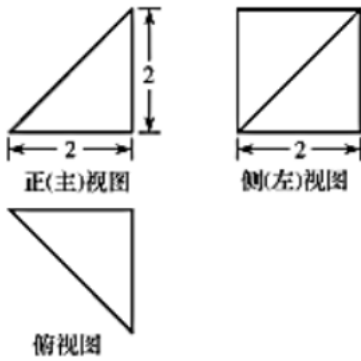


- A. $\frac{22\pi}{3}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边分别是 a, b, c ，若 $a=3, b=4, \angle C=120^\circ$ ，则 $c=$ ()

- A. 37 B. 13 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{37}$

8. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为 ()



- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. $8+2\sqrt{2}$ D. $8+4\sqrt{2}$

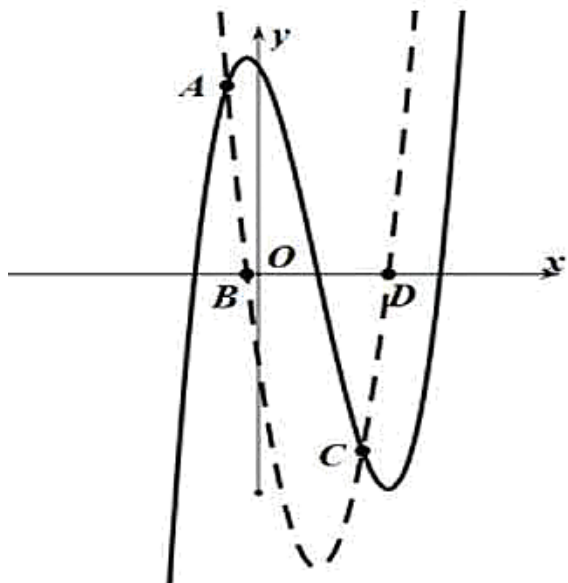
9. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(1)=1$ ，且 $f'(x) < 1$ ，则不等式 $f(\lg^2 x) < \lg^2 x$ 的解集为 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ B. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ C. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ D. $(10, +\infty)$

10. 若样本 $1+x_1, 1+x_2, 1+x_3, \dots, 1+x_n$ 的平均数是 10，方差为 2，则对于样本 $2+2x_1, 2+2x_2, 2+2x_3, \dots, 2+2x_n$ ，下列结论正确的是 ()

- A. 平均数为 20，方差为 4 B. 平均数为 11，方差为 4
C. 平均数为 21，方差为 8 D. 平均数为 20，方差为 8

11. 定义在 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，设 O 为坐标原点， A 、 B 、 C 、 D 四点的横坐标依次为 $-\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{6}$ 、 1 、 $\frac{4}{3}$ ，则函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的单调递减区间是 ()



- A. $\left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ D. $(1, 2)$

12. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | \ln x < 1\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | 0 < x < e\}$ B. $A \cap B = \{x | x < e\}$
 C. $A \cup B = \{x | 0 < x < e\}$ D. $A \cup B = \{x | -1 < x < e\}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率为_____.

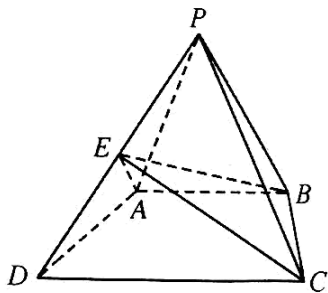
14. 已知角 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 的终边过点 $P(-1, -2\sqrt{2})$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

15. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AD = AC = BC = BD = 3$, $AB = CD = 2$, 则该三棱锥的外接球的表面积是_____.

16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F_1(-2, 0)$, 点 $A(0, \sqrt{5})$, 点 P 为双曲线右支上的动点, 且 $\triangle APF_1$ 周长的最小值为 8, 则双曲线的实轴长为_____, 离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB = 4$, $AD = \sqrt{2}$, $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形, $PA = PB$, 平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.



(1) 求证: $AE \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若平面 EBC 与平面 PAD 的交线为 l , 求二面角 $P-l-B$ 的正弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = |4x-1| - |x+2|$.

(1) 解不等式 $f(x) > 2$;

(2) 记函数 $y = f(x) + 5|x+2|$ 的最小值为 k , 正实数 a, b 满足 $a+6b = \frac{k}{9}$, 求证: $\sqrt{\frac{6b+a}{ab}} \geq 2\sqrt{6}$.

19. (12 分) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 设椭圆 Γ 的上顶点为 B , 右顶点和右焦点分别为 A, F ,

且 $\angle AFB = \frac{5\pi}{6}$.

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + n (n \neq \pm 1)$ 交椭圆 Γ 于 P, Q 两点, 设直线 BP 与直线 BQ 的斜率分别为 k_{BP}, k_{BQ} , 若

$k_{BP} + k_{BQ} = -1$, 试判断直线 l 是否过定点? 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = (ax-1)e^x + ax+1$, 其中 e 为自然对数的底数, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 平行, 求 a 的值;

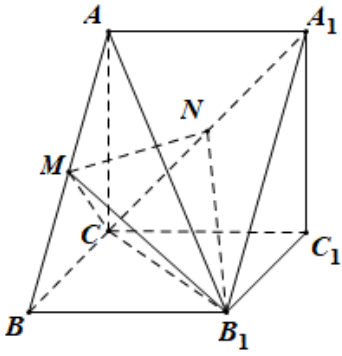
(2) 若 $a = \frac{1}{2}$, 问函数 $f(x)$ 有无极值点? 若有, 请求出极值点的个数; 若没有, 请说明理由.

21. (12 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = 3, a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4, b_4 = 20$, 且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

22. (10 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1A \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = C_1C = 1$, M, N 分别是 AB, A_1C 的中点.



- (1) 求证：直线 $MN \perp$ 平面 ACB_1 ；
- (2) 求点 C_1 到平面 B_1MC 的距离.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

由线面关系可知 $m \perp n$ ，不能确定 n 与平面 α 的关系，若 $n // \alpha$ 一定可得 $m \perp n$ ，即可求出答案.

【详解】

Q $m \perp \alpha, m \perp n$,

不能确定 $n \subset \alpha$ 还是 $n \not\subset \alpha$,

$\therefore m \perp n \not\Rightarrow n // \alpha$,

当 $n // \alpha$ 时，存在 $a \subset \alpha$ ， $n // a$ ，

由 $m \perp \alpha \Rightarrow m \perp a$,

又 $n // a$, 可得 $m \perp n$,

所以“ $m \perp n$ ”是“ $n // \alpha$ ”的必要不充分条件，

故选： B

【点睛】

本题主要考查了必要不充分条件，线面垂直，线线垂直的判定，属于中档题.

2、 C

【解析】

利用复数的四则运算可得 $z = -2 - i$ ，即可得答案.

【详解】

$$\because i(3+z) = 1+i, \therefore 3+z = \frac{1+i}{i} = 1-i,$$

$$\therefore z = -2-i, \therefore \text{复数 } z \text{ 的虚部为 } -1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的四则运算、虚部概念，考查运算求解能力，属于基础题.

3、C

【解析】

在等比数列中，由 $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$ 即可表示之间的关系.

【详解】

$$\text{由题可知，等比数列 } \{a_n\} \text{ 中 } a_1 = 1, \text{ 且公比为 } 2, \text{ 故 } S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} = \frac{1 - 2a_n}{1-2} = 2a_n - 1$$

故选：C

【点睛】

本题考查等比数列求和公式的应用，属于基础题.

4、C

【解析】

根据线面平行与垂直的判定与性质逐个分析即可.

【详解】

因为 $A_1P = A_1Q = m$, 所以 $PQ \perp B_1D_1$, 因为 $E、F$ 分别是 $AB、AD$ 的中点, 所以 $EF \parallel BD$, 所以 $PQ \perp EF$, 因为面 $MEF \perp$ 面 $MPQ = l$, 所以 $PQ \perp EF \parallel l$. 选项 A、D 显然成立;

因为 $BD \perp EF \parallel l, BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $l \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 因为 $MC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $l \perp MC$, 所以 B 项成立;

易知 $AC_1 \perp$ 平面 $MEF, A_1C \perp$ 平面 MPQ , 而直线 AC_1 与 A_1C 不垂直, 所以 C 项不成立.

故选：C

【点睛】

本题考查直线与平面的位置关系. 属于中档题.

5、C

【解析】

由不等式恒成立问题分类讨论：①当 $a = 0$ ，②当 $a < 0$ ，③当 $a > 0$ ，考查方程 $\ln a = -\frac{1}{ae}$ 的解的个数，综合①②③得解。

【详解】

①当 $a = 0$ 时， $f(x) = e^{x-1} > 0 \dots 0$ ，满足题意，

②当 $a < 0$ 时， $e^x - a > 0$ ， $\exists x_0 \in (-\frac{1}{ae}, +\infty)$ ， $ax + \frac{1}{e} < 0$ ，故 $f(x) \dots 0 (x \in R)$ 不恒成立，

③当 $a > 0$ 时，设 $g(x) = e^x - a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e}$ ，

令 $g(x) = e^x - a = 0$ ，得 $x = \ln a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e} = 0$ ，得 $x = -\frac{1}{ae}$ ，

下面考查方程 $\ln a = -\frac{1}{ae}$ 的解的个数，

设 $\varphi(a) = a \ln a$ ，则 $\varphi'(a) = 1 + \ln a$

由导数的应用可得：

$\varphi(a) = a \ln a$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 为减函数，在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 为增函数，

则 $\varphi(a)_{\min} = -\frac{1}{e}$ ，

即 $\ln a = -\frac{1}{ae}$ 有一解，

又 $g(x) = e^x - a$ ， $h(x) = ax + \frac{1}{e}$ 均为增函数，

所以存在 1 个 a 使得 $f(x) \dots 0 (x \in R)$ 成立，

综合①②③得：满足条件的 a 的个数是 2 个，

故选：C。

【点睛】

本题考查了不等式恒成立问题及利用导数研究函数的解得个数，重点考查了分类讨论的数学思想方法，属难度较大的题型。

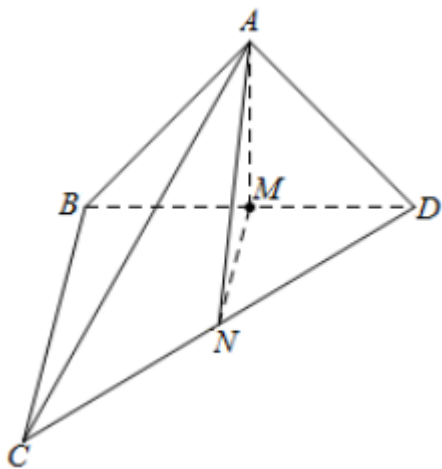
6、B

【解析】

分别取 BD 、 CD 的中点 M 、 N ，连接 AM 、 MN 、 AN ，利用二面角的定义转化二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AMN = \frac{2\pi}{3}$ ，然后分别过点 M 作平面 ABD 的垂线与过点 N 作平面 BCD 的垂线交于点 O ，在 $Rt\triangle OMN$ 中计算出 OM ，再利用勾股定理计算出 OA ，即可得出球 O 的半径，最后利用球体的表面积公式可得出答案。

【详解】

如下图所示，



分别取 BD 、 CD 的中点 M 、 N ，连接 AM 、 MN 、 AN ，

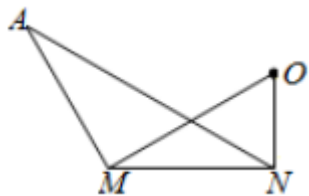
由于 $\triangle ABD$ 是以 $\angle BAD$ 为直角等腰直角三角形， M 为 BD 的中点， $\therefore AM \perp BD$ ，

$\angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ，且 M 、 N 分别为 BD 、 CD 的中点，所以， $MN \parallel BC$ ，所以， $MN \perp BD$ ，所以二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AMN = \frac{2\pi}{3}$ ，

$Q AB = AD = \sqrt{2}$ ，则 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2$ ，且 $BC = 2$ ，所以， $AM = \frac{1}{2}BD = 1$ ， $MN = \frac{1}{2}BC = 1$ ，

$Q \triangle ABD$ 是以 $\angle BAD$ 为直角的等腰直角三角形，所以， $\triangle ABD$ 的外心为点 M ，同理可知， $\triangle BCD$ 的外心为点 N ，

分别过点 M 作平面 ABD 的垂线与过点 N 作平面 BCD 的垂线交于点 O ，则点 O 在平面 AMN 内，如下图所示，



由图形可知， $\angle OMN = \angle AMN - \angle AMO = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，

在 $Rt\triangle OMN$ 中， $\frac{MN}{OM} = \cos \angle OMN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore OM = \frac{MN}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以， $OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ，

所以，球 O 的半径为 $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ，因此，球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28\pi}{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查球体的表面积，考查二面角的定义，解决本题的关键在于找出球心的位置，同时考查了计算能力，属于中等题.

7、D

【解析】

直接根据余弦定理求解即可.

【详解】

解：∵ $a=3, b=4, \angle C=120^\circ$,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 + 12 = 37,$$

$$\therefore c = \sqrt{37},$$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查余弦定理解三角形，属于基础题.

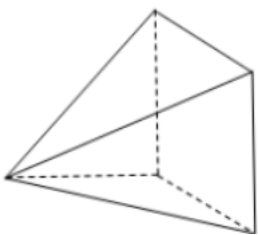
8、D

【解析】

根据三视图还原几何体为四棱锥，即可求出几何体的表面积.

【详解】

由三视图知几何体是四棱锥，如图，



且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，四棱锥的底面是正方形,边长为 2,棱锥的高为 2,

$$\text{所以 } S = 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2},$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查了由三视图还原几何体，棱锥表面积的计算，考查了学生的运算能力，属于中档题.

9、B

【解析】

构造函数 $g(x) = f(x) - x$, 利用导数研究函数的单调性, 即可得到结论.

【详解】

设 $g(x) = f(x) - x$, 则函数的导数 $g'(x) = f'(x) - 1$, $\because f'(x) < 1$, $\therefore g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 为减函数, $Q f(1) = 1$,

$\therefore g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$, 则不等式 $g(x) < 0$ 等价于 $g(x) < g(1)$,

则不等式的解集为 $x > 1$, 即 $f(x) < x$ 的解为 $x > 1$, $Q f(\lg^2 x) < \lg^2 x$, 由 $\lg^2 x > 1$ 得 $\lg x > 1$ 或 $\lg x < -1$, 解得

$$x > 10 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{10},$$

故不等式的解集为 $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$. 故选: B.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数单调性, 根据函数的单调性解不等式, 考查学生分析问题解决问题的能力, 是难题.

10、D

【解析】

由两组数据间的关系, 可判断二者平均数的关系, 方差的关系, 进而可得到答案.

【详解】

样本 $1 + x_1, 1 + x_2, 1 + x_3, \dots, 1 + x_n$ 的平均数是 10, 方差为 2,

所以样本 $2 + 2x_1, 2 + 2x_2, 2 + 2x_3, \dots, 2 + 2x_n$ 的平均数为 $2 \times 10 = 20$, 方差为 $2^2 \times 2 = 8$.

故选: D.

【点睛】

样本 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 则 $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots, ax_n + b$ 的平均数为 $a\bar{x} + b$, 方差为 $a^2 s^2$.

11、B

【解析】

先辨别出图象中实线部分为函数 $y = f(x)$ 的图象, 虚线部分为其导函数的图象, 求出函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 的导数为

$$y' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}, \text{ 由 } y' < 0, \text{ 得出 } f'(x) < f(x), \text{ 只需在图中找出满足不等式 } f'(x) < f(x) \text{ 对应的 } x \text{ 的取值范围}$$

即可.

【详解】

若虚线部分为函数 $y = f(x)$ 的图象，则该函数只有一个极值点，但其导函数图象（实线）与 x

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/966010214232011003>