

专题 09 数列（选填题 8 种考法）

考法解读

数列

公式

等差数列
等比数列

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ 或 } a_n = a_m + (n-m)d$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \quad \rightarrow \quad S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m} (n, m \in \mathbb{N}^*) \quad \rightarrow \quad S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} (q \neq 1) \end{cases}$$

性质

等差数列

中项

$$\begin{cases} d \neq a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{项数相同} \\ \text{下标和同} \end{cases} \Leftrightarrow \text{下标 } m+n=p+q=2t \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q = 2a_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{项数可同可异} \\ \text{下标和同} \end{cases} \Leftrightarrow \text{下标 } m+n=p+q=2t \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q = 2a_t = a_{m+n} \end{cases}$$

前 n 项和的性质

$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \dots$ 成等差数列，公差 $n^2 d$

数列项数为奇数 $2n-1$ 时 (S_n, T_n 分别是等差数列 a_n, b_n 的前 n 项和)

$$(1) S_{2n-1} = (2n-1)a_n \quad (2) \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n} \xrightarrow{\text{约分}} \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

$\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，且首项为 a_1 ，公差为 $\frac{1}{2}d$

等比数列

中项性质

$$\begin{cases} q \neq a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{项数相同} \\ \text{下标和同} \end{cases} \Leftrightarrow \text{下标 } m+n=p+q=2t \Leftrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q = a_t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = a_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{项数可同可异} \\ \text{下标和同} \end{cases} \Leftrightarrow \text{下标 } m+n=p+q=2t \Leftrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q = a_t^2 = a_{m+n} \end{cases}$$

等比数列下标为奇数的正负相同，下标为偶数项的正负相同

前 n 项和的性质

$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \dots$ 成等比数列，公比 q^n

数列项数为 $2n$ 项，则 $\frac{S_{2n}}{S_n} = q$ ；数列项数为 $2n+1$ ，则 $\frac{S_{2n+1}-a_1}{S_n} = q$

通项

公式法
累加法
累乘法
构造等差数列
构造等比数列

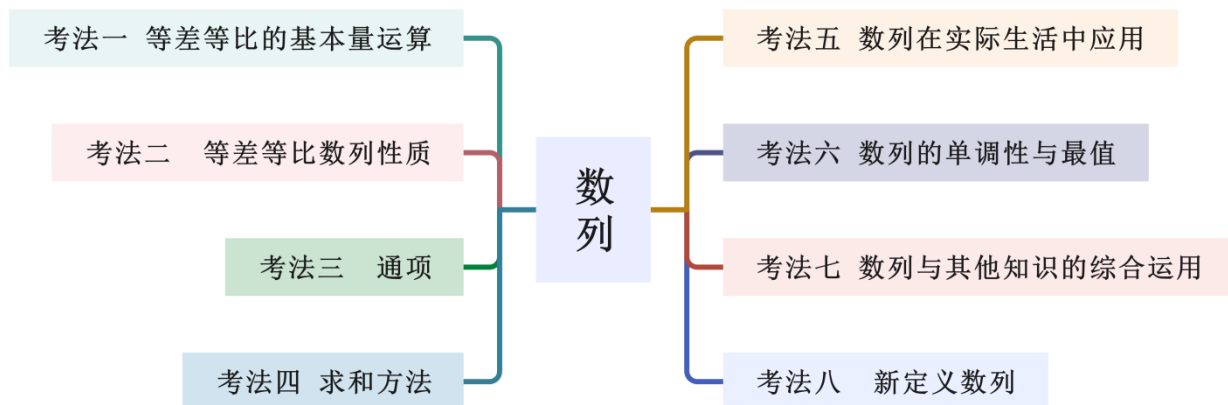
根据条件选择适当的方法

求和方法

公式法
裂项相消
错位相减
分组转化
奇偶并项

根据通项的特征选择求和的方法

典例剖析



考法一 等差等比的基本量运算

【例 1-1】(2023·全国·统考高考真题) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 + a_6 = 10, a_4 a_8 = 45$, 则 $S_5 =$ ()

- A. 25 B. 22 C. 20 D. 15

【答案】C

【解析】方法一：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 首项为 a_1 , 依题意可得,

$$a_2 + a_6 = a_1 + d + a_1 + 5d = 10, \text{ 即 } a_1 + 3d = 5,$$

$$\text{又 } a_4 a_8 = (a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = 45, \text{ 解得: } d = 1, a_1 = 2,$$

$$\text{所以 } S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} \times d = 5 \times 2 + 10 = 20.$$

故选: C.

$$\text{方法二: } a_2 + a_6 = 2a_4 = 10, \quad a_4 a_8 = 45, \text{ 所以 } a_4 = 5, \quad a_8 = 9,$$

$$\text{从而 } d = \frac{a_8 - a_4}{8 - 4} = 1, \text{ 于是 } a_3 = a_4 - d = 5 - 1 = 4,$$

$$\text{所以 } S_5 = 5a_3 = 20.$$

故选: C.

【例 1-2】(2023·全国·统考高考真题) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 前 n 项和 S_n , 若 $a_1 = 1$,

$$S_5 = 5S_3 - 4, \text{ 则 } S_4 = ()$$

- A. $\frac{15}{8}$ B. $\frac{65}{8}$ C. 15 D. 40

【答案】C

【解析】由题知 $1+q+q^2+q^3+q^4=5(1+q+q^2)-4$,

即 $q^3+q^4=4q+4q^2$, 即 $q^3+q^2-4q-4=0$, 即 $(q-2)(q+1)(q+2)=0$.

由题知 $q>0$, 所以 $q=2$. 所以 $S_4=1+2+4+8=15$. 故选:C.

【变式】

1. (2023·全国·统考高考真题) 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4=-5$, $S_6=21S_2$, 则 $S_8=(\quad)$.

A. 120

B. 85

C. -85

D. -120

【答案】C

【解析】方法一: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 首项为 a_1 ,

若 $q=-1$, 则 $S_4=0 \neq -5$, 与题意不符, 所以 $q \neq -1$;

若 $q=1$, 则 $S_6=6a_1=3 \times 2a_1=3S_2 \neq 0$, 与题意不符, 所以 $q \neq 1$;

由 $S_4=-5$, $S_6=21S_2$ 可得, $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5$, $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=21 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$ ①,

由①可得, $1+q^2+q^4=21$, 解得: $q^2=4$,

所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \times (1+q^4)=-5 \times (1+16)=-85$.

故选: C.

方法二: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $S_4=-5$, $S_6=21S_2$, 所以 $q \neq -1$, 否则 $S_4=0$,

从而, $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列,

所以有, $(-5-S_2)^2=S_2(21S_2+5)$, 解得: $S_2=-1$ 或 $S_2=\frac{5}{4}$,

当 $S_2=-1$ 时, $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$, 即为 $-1, -4, -16, S_8+21$,

易知, $S_8+21=-64$, 即 $S_8=-85$;

当 $S_2=\frac{5}{4}$ 时, $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_2)(1+q^2)=(1+q^2)S_2>0$,

与 $S_4=-5$ 矛盾, 舍去.

故选: C.

2. (2023·四川绵阳·绵阳中学校考一模) 公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = a_5 - 1$, a_1 , a_2 , a_6 成等比数列, 则 $S_n =$ ()

- A. $\frac{3n^2 - n}{2}$ B. $\frac{n^2 + n}{2}$ C. $3n - 2$ D. $\frac{5n - 3n^2}{2}$

【答案】A

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 由条件得 $\begin{cases} S_3 = a_5 - 1, \\ a_2^2 = a_1 a_6, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 3a_1 + 3d = a_1 + 4d - 1, \\ (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 5d), \end{cases}$ 则 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3, \end{cases}$ 故 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 3 = \frac{3n^2 - n}{2}$. 故选: A.

3 (2023·四川南充·四川省南充高级中学校考模拟预测) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_1 = 1$ 且

$\frac{S_2}{2} + \frac{S_4}{4} = 14$, 则 $a_n =$ ()

- A. $3n - 2$ B. $4n - 3$ C. $5n - 4$ D. $6n - 5$

【答案】D

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由等差数列的求和公式可得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

所以, $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$, 所以, $\frac{S_2}{2} + \frac{S_4}{4} = 2a_1 + \frac{1}{2}d + \frac{3}{2}d = 2a_1 + 2d = 2 + 2d = 14$,

解得 $d = 6$, 因此, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$. 故选: D.

考法二 等差等比数列性质

【例 2-1】(2023·四川成都·模拟预测) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_7 + a_{13} = 4\pi$, 则 $\tan(a_2 + a_{12})$ 的值为 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_7 + a_{13} = 3a_7 = 4\pi$, 可得 $a_7 = \frac{4\pi}{3}$,

因此, $\tan(a_2 + a_{12}) = \tan(2a_7) = \tan \frac{8\pi}{3} = \tan \left(3\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

故选: A.

【例 2-2】(2023·广东深圳·统考二模) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{10} = 20$, $S_{20} = 10$, 则 $S_{30} =$

()

- A. 0 B. -10 C. -30 D. -40

【答案】C

【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的性质可得： S_{10} ， $S_{20}-S_{10}$ ， $S_{30}-S_{20}$ 也成等差数列，

$\therefore 2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+(S_{30}-S_{20})$ ， $\therefore 2\times(10-20)=20+S_{30}-10$ ，解得 $S_{30}=-30$ 。故选：C。

【例 2-3】(2023·辽宁沈阳·沈阳铁路实验中学学校考二模) 设 S_n ， T_n 分别是两个等差数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项

和。若对一切正整数 n ， $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$ 恒成立， $\frac{a_6}{b_6}=(\quad)$

A. $\frac{12}{19}$

B. $\frac{11}{17}$

C. $\frac{9}{14}$

D. $\frac{5}{7}$

【答案】B

【解析】由等差数列的性质，可得

$$\frac{a_6}{b_6}=\frac{2a_6}{2b_6}=\frac{a_1+a_{11}}{b_1+b_{11}}=\frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1+b_{11})}{2}}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{2\times 11}{3\times 11+1}=\frac{22}{34}=\frac{11}{17}.$$
 故选：B

【例 2-4】(2023·黑龙江哈尔滨·哈尔滨市第六中学校校考二模) 设等比数列 $\{a_n\}$ ， a_3 ， a_7 是方程

$x^2+5x+4=0$ 的两根，则 a_5 的值是 $(\quad)$

A. ± 2 或 $\pm \frac{1}{2}$

B. 2 或 $\frac{1}{2}$

C. -2

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】因为 a_3 ， a_7 是方程 $x^2+5x+4=0$ 的两根，

所以 $a_3\cdot a_7=4$ ， $a_3+a_7=-5$ ，且 a_3 ， a_7 都是负数，

又因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_3\cdot a_7=a_5^2$ ，所以 $a_5=\pm 2$ ，

且 $a_3\cdot a_5=a_4^2>0$ ，所以 $a_5=-2$ 。

故选：C

【例 2-5】(2023·陕西榆林·统考模拟预测) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{7}$ ，则 $\frac{S_{12}}{S_4}=(\quad)$

A. 41

B. 45

C. 36

D. 43

【答案】D

【解析】设 $S_4=x(x\neq 0)$ ，则 $S_8=7x$ ，

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，根据等比数列的性质，

可得 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 仍成等比数列.

因为 $\frac{S_8 - S_4}{S_4} = \frac{7x - x}{x} = 6$, 所以 $S_{12} - S_8 = 36x$,

所以 $S_{12} = 43x$, 故 $\frac{S_{12}}{S_4} = 43$.

故选: D.

【变式】

1. (2023·四川绵阳·绵阳中学校考一模) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + 2a_4 + a_7 = 120$, 则 $S_7 - 6a_4 =$ ()

- A. 60 B. 30 C. 10 D. 0

【答案】B

【解析】Q 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + 2a_4 + a_7 = 120$,

$\therefore 4a_4 = 120$ 即 $a_4 = 30$,

$\therefore S_7 - 6a_4 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} - 6a_4 = 7a_4 - 6a_4 = a_4 = 30$.

故选: B.

2. (2023·福建厦门·统考模拟预测) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_9 = 18, S_3 = 3$, 则 $S_6 =$ ()

- A. 9 B. $\frac{21}{2}$ C. 12 D. $\frac{27}{2}$

【答案】A

【解析】由已知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$, 即 3, $S_6 - 3, 18 - S_6$ 成等差数列,

所以 $2 \times (S_6 - 3) = 3 + (18 - S_6)$, 所以 $S_6 = 9$,

故选: A.

3. (2023·海南·校考模拟预测) 已知等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 若 $(2n+3)S_n = nT_n$, 则

$\frac{a_5}{b_6} =$ ()

- A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{9}{21}$ D. $\frac{11}{25}$

【答案】A

【解析】 $(2n+3)S_n = nT_n$ 即 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+3}$, 又等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 形式满足

$S_n = an^2 + bn, (a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$,

故 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+3} = \frac{an^2}{a(2n+3)n} (a \neq 0)$. 则 $S_n = an^2, T_n = a(2n+3)n$,

故 $\frac{a_5}{b_6} = \frac{S_5 - S_4}{T_6 - T_5} = \frac{a(5^2 - 4^2)}{a[6(2 \times 6 + 3) - 5(2 \times 5 + 3)]} = \frac{9a}{25a} = \frac{9}{25}$.

故选: A

4. (2023·重庆·校联考三模) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 若 $a_2 + a_4 + a_6 = 4\pi$, $b_2 b_4 b_6 = 3\sqrt{3}$, 则

$\tan \frac{a_1 + a_7}{1 + b_2 b_6} = (\quad)$

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_2 + a_4 + a_6 = 3a_4 = 4\pi$, 故 $a_4 = \frac{4\pi}{3}$, 则 $a_1 + a_7 = 2a_4 = \frac{8\pi}{3}$,

因为 $\{b_n\}$ 是等比数列, 所以 $b_2 b_4 b_6 = b_4^3 = 3\sqrt{3}$, 故 $b_4 = \sqrt{3}$, 则 $b_2 b_6 = b_4^2 = 3$,

所以 $\tan \frac{a_1 + a_7}{1 + b_2 b_6} = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

故选: A

5. (2023·山西吕梁·统考二模) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = 4$, $S_6 = 364$, 则 S_4 为 ()

- A. 40 或 -36 B. -36 C. 40 D. 32

【答案】C

【解析】由题意知: S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列,

$\therefore (S_4 - 4)^2 = 4(364 - S_4)$, 解得: $S_4 = 40$ 或 $S_4 = -36$,

$\because S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_2 + a_1 q^2 + a_2 q^2 = S_2 (1 + q^2) = 4(1 + q^2) > 0$, $\therefore S_4 = 40$. 故选: C

考法三 通项

【例 3-1】(2023·山东菏泽·山东省鄄城县第一中学校考三模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若满足

$S_n = 4a_n - 3$, 则 $S_n = (\quad)$

- A. $4 \left[\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right]$ B. $4 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right]$ C. $3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1 \right]$ D. $4(3^n - 1)$

【答案】C

【解析】当 $n=1$ 时， $S_1=4a_1-3$ ， $S_1=4S_1-3$ ，得 $S_1=1$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $S_n=4(S_n-S_{n-1})-3$ ， $3S_n=4S_{n-1}+3$ ， $S_n=\frac{4}{3}S_{n-1}+1$ ，

$S_n+3=\frac{4}{3}(S_{n-1}+3)$ ，又 $S_1+3=4$ ，所以 $\{S_n+3\}$ 是首项为 4，公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列，

所以 $S_n+3=4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ ， $S_n=4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-3=3 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right]$. 故选：C

【例 3-2】(2023·江西鹰潭·贵溪市实验中学学校考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为零，且满足 $a_1=1$ ，

$a_n=\frac{a_{n-1}}{1+na_{n-1}}$ ($n \geq 2$ ， $n \in \mathbb{N}^*$)，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{n(n+1)}$

【解析】 $a_n=\frac{a_{n-1}}{1+na_{n-1}}$ ，则 $\frac{1}{a_n}=\frac{1+na_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+n$ ，

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$ ， $b_1=\frac{1}{a_1}=1$ ，则 $b_n-b_{n-1}=n$ ，

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\dots+(b_2-b_1)+b_1=n+n-1+\dots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$ ，

而 $b_1=1$ 也符合该式，故 $b_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ，故 $a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}$ 。

故答案为： $\frac{2}{n(n+1)}$

【例 3-3】(2023·河北秦皇岛·统考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数， $a_1=3$ ，且有 $a_{n+1}=3-\frac{2}{a_n}$ ，则 $a_n=$ ()

A. $\frac{1}{2^n-1}$

B. $\frac{3}{2^n-1}$

C. $4-\frac{1}{2^n-1}$

D. $\frac{1}{2^n-1}+2$

【答案】D

【解析】 $a_{n+1}=3-\frac{2}{a_n}$ ， $a_{n+1}-2=1-\frac{2}{a_n}=\frac{a_n-2}{a_n}$ ，

显然若 $a_n-2=0$ ，则 $a_{n+1}-2=0$ ，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_n=2$ ，与题意矛盾，

所以 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_n-2 \neq 0$ ，两边同时取倒数，得： $\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n}{a_n-2}=1+\frac{2}{a_n-2}$ ，

设 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$ ， $b_1=1$ ， $b_{n+1}=1+2b_n$ ， $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ ，

因为 $b_1+1=2 \neq 0$ ，故 $b_n+1 \neq 0$ ，故 $\frac{b_{n+1}+1}{b_n+1}=2$ ，所以 $\{b_n+1\}$ 为等比数列，

所以 $b_n+1=2 \times 2^{n-1}=2^n$ ，故 $b_n=2^n-1$ ，所以 $\frac{1}{a_n-2}=2^n-1$ ，

故 $a_n = \frac{1}{2^n - 1} + 2$ ，故选：D.

【变式】

1. (2023·河南·统考三模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ， $2nS_{n+1} - 2(n+1)S_n = n(n+1)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____.

【答案】 n

【解析】由 $\frac{2S_{n+1}}{n+1} - \frac{2S_n}{n} = 1$ ，而 $\frac{2S_1}{1} = 2$ ，故 $\{\frac{2S_n}{n}\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $\frac{2S_n}{n} = 2 + (n-1) \times 1 = n+1$ ，则 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，

又 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$ 且 $n \geq 2$ ，显然 $a_1 = 1$ 也满足上式，

所以 $a_n = n$. 故答案为： n

2. (2023·广东佛山·统考模拟预测) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n$ ， $a_{2n} = 2a_n + 1$ ，写出一个符合上述条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式_____.

【答案】 $a_n = n - 1$ (答案不唯一)

【解析】由 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 得： $a_{2n} + 1 = 2(a_n + 1)$ ，

则当 $a_n = n - 1$ 时， $a_n + 1 = n$ ， $\therefore a_{2n} + 1 = 2n$ ，故 $a_n = n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 满足递推关系，

又 $a_{n+1} - a_n = n - (n - 1) = 1 > 0$ ，满足 $a_{n+1} > a_n$ ，

$\therefore$ 满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为： $a_n = n - 1$.

故答案为： $a_n = n - 1$ (答案不唯一) .

3. (2023·广西南宁·南宁三中校考一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1} - (n+1)a_n = 2$ ， $a_1 = 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】 $a_n = 3n - 2$

【解析】 $na_{n+1} - (n+1)a_n = 2$ ，两边同除 $n(n+1)$ 得：

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $\frac{a_n}{n} - a_1 = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ ，即 $\frac{a_n}{n} - a_1 = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ，

化简得 $a_n = (2 + a_1)n - 2$ ， $\because a_1 = 1$ ， $\therefore a_n = 3n - 2$.

故答案为: $a_n = 3n - 2$.

考法四 求和方法

【例 4-1】(2023·宁夏石嘴山·平罗中学校考模拟预测) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $a_3 = 3, S_4 = 10$, 数列

$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 _____

【答案】 $\frac{2n}{n+1}$

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + 2d = 3 \\ 4a_1 + 6d = 10 \end{cases}, \text{解得 } a_1 = d = 1,$$

$$\text{所以 } S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{所以数列 } \left\{\frac{1}{S_n}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

故答案为: $\frac{2n}{n+1}$

【例 4-2】(2023·广东佛山·华南师大附中南海实验高中校考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$a_{n+2} - a_n = (-1)^n + 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项和为 _____.

【答案】 465

【解析】 当 n 为奇数时, $a_{n+2} - a_n = 1$, $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列;

当 n 为偶数时, $a_{n+2} - a_n = 3$, $\{a_{2n}\}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列;

$$S_{30} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{29}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{30})$$

$$= \frac{(1+15) \times 15}{2} + \frac{(2+44) \times 15}{2} = 465$$

故答案为：465

【例 4-3】(2023·河南·校联考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$ ，则

$$a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n = \underline{\quad\quad\quad}.$$

【答案】 $(2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$

【解析】由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$ 可得当 $n \geq 2$ 时， $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)^2$ ，

所以 $a_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1, n \geq 2$ ， $a_1 = 1$ 满足 $a_n = 2n-1$ ，故 $a_n = 2n-1, n \in \mathbf{N}^*$ 。

$$\text{令 } S_n = a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{则 } 2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减得：} -S_n = 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \cdot 2^{n+1} = 2 + \frac{8(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^{n+1} = (3-2n) \cdot 2^{n+1} - 6,$$

$$\text{所以 } S_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6.$$

故答案为： $(2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$

【变式】

1. (2023·河南·校联考模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \underline{\quad\quad\quad}.$$

【答案】 $\frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}$

【解析】当 $n \geq 2$ 时， $(2n-1)a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ ，

$$\therefore a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} (n \geq 2),$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15},$$

$$\text{满足 } a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{即 } a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+3) - (2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right],$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

故答案为: $\frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}.$

2. (2023·江西鹰潭·二模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_3 = 5$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足

$S_n = 2b_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{(-1)^n a_n b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

【答案】 $\frac{1 + (6n-1) \cdot (-2)^n}{9}$

【解析】 因为 $a_1 = 1$, $a_3 = 5$, 所以 $d = \frac{a_3 - a_1}{3-1} = 2$,

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$,

因为 $S_n = 2b_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 所以 $S_{n-1} = 2b_{n-1} - 1 (n \geq 2)$,

两式相减可得, $b_n = 2b_n - 2b_{n-1} (n \geq 2)$, 即 $b_n = 2b_{n-1} (n \geq 2)$,

又 $S_1 = 2b_1 - 1$, 可得 $b_1 = 1$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列,

故 $b_n = 2^{n-1}$,

令 $c_n = (-1)^n \cdot a_n b_n = (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot 2^{n-1} = (-2)^n \cdot \frac{2n-1}{2}$,

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times (-2)^1 + \frac{3}{2} \times (-2)^2 + \frac{5}{2} \times (-2)^3 + \dots + \frac{2n-3}{2} \cdot (-2)^{n-1} + \frac{2n-1}{2} \cdot (-2)^n,$$

$$-2T_n = \frac{1}{2} \times (-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2)^3 + \frac{5}{2} \times (-2)^4 + \dots + \frac{2n-3}{2} \cdot (-2)^n + \frac{2n-1}{2} \cdot (-2)^{n+1},$$

两式相减得:

$$3T_n = \frac{1}{2} \cdot (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + \dots + (-2)^n - \frac{2n-1}{2} \cdot (-2)^{n+1}$$

$$= -1 + \frac{4 - (-2)^n \cdot (-2)}{1 - (-2)} - \frac{2n-1}{2} \cdot (-2)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{6n-1}{6} (-2)^{n+1}$$

$$\therefore T_n = \frac{2 - (6n-1) \cdot (-2)^{n+1}}{18} = \frac{1 + (6n-1) \cdot (-2)^n}{9}.$$

故答案为: $\frac{1+(6n-1)\cdot(-2)^n}{9}$

3. (2023·河南·校联考模拟预测) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \frac{2^{2n-1}}{(2^{2n-1}-1)(2^{2n+1}-1)}$, 其前 n 项和为 S_n , 则

$3S_n =$ _____.

【答案】 $1 - \frac{1}{2^{2n+1}-1}$

【解析】 因为 $\frac{2^{2n-1}}{(2^{2n-1}-1)(2^{2n+1}-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{2n-1}-1} - \frac{1}{2^{2n+1}-1} \right)$,

所以 $S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^3-1} + \frac{1}{2^3-1} - \frac{1}{2^5-1} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}-1} - \frac{1}{2^{2n+1}-1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}-1} \right)$, 所以 $3S_n = 1 - \frac{1}{2^{2n+1}-1}$.

故答案为: $1 - \frac{1}{2^{2n+1}-1}$.

4. (2023·江西赣州·统考二模) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $S_1 = 1$, $2S_n = na_{n+1}$ 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$

的前 n 项和为 T_n , 满足 $b_n = \frac{(-1)^n \cdot 4a_n}{4a_n^2 - 1}$, 则 $T_{2023} =$ _____.

【答案】 $-\frac{4048}{4047}$

【解析】 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$,

$2S_n = na_{n+1}$ ①, 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_n$ ②,

两式相减得 $2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n$, 即 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$,

所以 $a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2}a_{n-2} = \dots = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \dots \frac{2}{1}a_1 = n$,

且 $a_n = n$ 对 $a_1 = 1$ 也适合, 综上, $a_n = n$,

故 $b_n = \frac{(-1)^n \cdot 4a_n}{4a_n^2 - 1} = \frac{(-1)^n \cdot 4n}{4n^2 - 1} = \frac{(-1)^n \cdot 4n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$,

$T_{2023} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2023} = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4045} - \frac{1}{4047} = -1 - \frac{1}{4047} = -\frac{4048}{4047}$.

故答案为: $-\frac{4048}{4047}$

考法五 数列在实际生活中应用

【例 5-1】

(2023·陕西安康·陕西省安康中学校考模拟预测) 中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题：“今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里”，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了700里路，则该马第五天走的里程数约为()

- A. 2.76 B. 5.51 C. 11.02 D. 22.05

【答案】D

【解析】设该马第 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 天行走的里程数为 a_n ,

由题意可知，数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $q = \frac{1}{2}$ 的等比数列，

$$\text{所以，该马七天所走的里程为 } \frac{a_1 \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127a_1}{64} = 700, \text{ 解得 } a_1 = \frac{2^7 \times 350}{127}.$$

$$\text{故该马第五天行走的里程数为 } a_5 = a_1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{2^7 \times 350}{127} \times \frac{1}{2^4} = \frac{2800}{127} \approx 22.05.$$

故选：D.

【变式】

1. (2023·贵州遵义·校考模拟预测) 公元前1650年的埃及莱因德纸草书上载有如下问题“十人分十斗玉米，从第二人开始，各人所得依次比前人少八分之一，问每人各得玉米多少斗？”在上述问题中，前五人得到的玉米总量为()

- A. $\frac{10 \times 8^5}{8^5 + 7^5}$ 斗 B. $\frac{10 \times 8^6}{8^5 + 7^5}$ 斗
C. $\frac{10 \times 8^5}{8^5 - 7^5}$ 斗 D. $\frac{10 \times 8^6}{8^5 - 7^5}$ 斗

【答案】A

【解析】由题意记10人每人所得玉米时依次为 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ，则 $n \geq 2$ 时， $a_n = \frac{7}{8}a_{n-1}$ ， $n = 2, 3, \dots, 10$ ，即 $\{a_n\}$

是等比数列，

$$\text{由已知 } \frac{a_1[1 - (\frac{7}{8})^{10}]}{1 - \frac{7}{8}} = 10, \quad a_1 = \frac{10 \times 8^9}{8^{10} - 7^{10}},$$

$$S_5 = \frac{a_1[1 - (\frac{7}{8})^5]}{1 - \frac{7}{8}} = \frac{10 \times 8^5}{8^5 + 7^5} \text{ (斗)}.$$

故选：A.

2. (2023·陕西榆林·统考三模) 现有 17 匹善于奔驰的马, 它们从同一个起点出发, 测试它们一日可行的路程. 已知第 i ($i=1,2,\dots,16$) 匹马的日行路程是第 $i+1$

匹马日行路程的 1.05 倍，且第 16 匹马的日行路程为 315 里，则这 17 匹马的日行路程之和约为（取 $1.05^{17} = 2.292$ ）（ ）

- A. 7750 里 B. 7752 里
C. 7754 里 D. 7756 里

【答案】B

【解析】 $\frac{315}{1.05} = 300$ ，依题意可得，第 17 匹马、第 16 匹马、……、第 1 匹马的日行路程里数依次成等比数列，且首项为 300，公比为 1.05，故这 17 匹马的日行路程之和为

$$\frac{300 \times (1 - 1.05^{17})}{1 - 1.05} = 6000 \times (1.05^{17} - 1) = 6000 \times (2.292 - 1) = 7752 \text{ (里)}. \text{ 故选: B.}$$

3 (2022·全国·统考高考真题) 图 1 是中国古代建筑中的举架结构， AA', BB', CC', DD' 是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举，图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图．其中 DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 是举， OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 是相等的步，相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5, \frac{CC_1}{DC_1} = k_1, \frac{BB_1}{CB_1} = k_2, \frac{AA_1}{BA_1} = k_3$ ．已知 k_1, k_2, k_3 成公差为 0.1 的等差数列，且直线 OA 的斜率为 0.725，则 $k_3 =$ ()

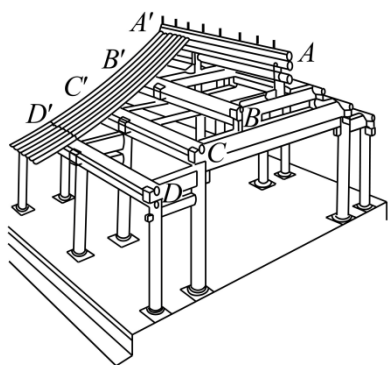


图1

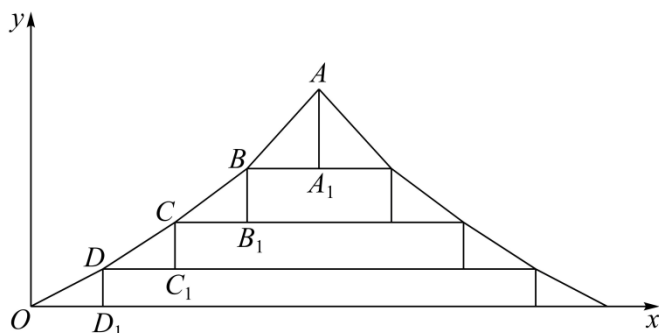


图2

- A. 0.75 B. 0.8 C. 0.85 D. 0.9

【答案】D

【解析】设 $OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1 = 1$ ，则 $CC_1 = k_1, BB_1 = k_2, AA_1 = k_3$ ，依题意，有 $k_3 - 0.2 = k_1, k_3 - 0.1 = k_2$ ，且 $\frac{DD_1 + CC_1 + BB_1 + AA_1}{OD_1 + DC_1 + CB_1 + BA_1} = 0.725$ ，所以 $\frac{0.5 + 3k_3 - 0.3}{4} = 0.725$ ，故 $k_3 = 0.9$ ，故选: D

考法六 数列的单调性与最值

【例 6-1】(2023·四川自贡·统考三模) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公差为 d ，若 $S_{10} < 0$ ， $S_{11} > 0$ ，则下

列四个命题正确个数为 () ① S_5 为 S_n 的最小值 ② $a_6 > 0$ ③ $a_1 < 0, d > 0$ ④ S_6 为 S_n 的最小值

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 中， $S_{11} = \frac{(a_1 + a_{11}) \times 11}{2} = 11a_6 > 0$ ，则 $a_6 > 0$ ，故②正确；

又 $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \times 10}{2} = 5(a_1 + a_{10}) = 5(a_5 + a_6) < 0$ ，所以 $a_5 < 0$ ，故 $d > 0$ ，则 $a_1 = a_5 - 4d < 0$ ，故③正确；

于是可得等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = d > 0$ ，其为递增数列，则 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < 0$ ，又 $a_6 > 0$ ，所以 S_5 为 S_n 的最小值，故①正确，④不正确；

则四个命题正确个数为3.

故选：C.

【例 6-2】(2023·江西赣州·统考一模) 若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，其前 n 项和为 S_n ，前 n 项积为 T_n ，并且 $0 < a_9 < 1 < a_8$ ，则下列正确的是 ()

A. $q > 1$ B. $0 < a_1 < 1$ C. S_n 的最大值为 S_8 D. T_n 的最大值为 T_8

【答案】D

【解析】由 $0 < a_9 < 1 < a_8$ 可知公比 $q = \frac{a_9}{a_8} \in (0, 1)$ ，所以A错误；

又 $a_8 = a_1 q^7 > 1$ ，且 $q \in (0, 1)$ 可得 $a_1 > 1$ ，即B错误；

由等比数列前 n 项和公式可知 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ ，由指数函数性质可得 S_n 为单调递增，

即 S_n 无最大值，所以C错误；

设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项积的最大值，则需满足 $\begin{cases} T_n \geq T_{n-1} \\ T_n \geq T_{n+1} \end{cases}$ ，可得 $a_{n+1} < 1 < a_n$ ，

又 $0 < a_9 < 1 < a_8$ 可得 $n = 8$ ，即 T_n 的最大值为 T_8 ，所以D正确.

故选：D

【变式】

1. (2023·山东烟台·校考模拟预测) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1 > 0, a_8, a_9$ 是方程 $x^2 + x - 2023 = 0$ 的两根，则能使 $S_n > 0$ 成立的 n 的最大值为 ()

A. 15

B. 16

C. 17

D. 18

【答案】A

【解析】因为 a_8, a_9 是方程 $x^2 + x - 2023 = 0$ 的根， $\therefore a_8 a_9 = -1, a_8 + a_9 = -2023$ ，

又 $Q a_1 > 0, \therefore a_8 > 0, a_9 < 0$ ，公差 $d = a_9 - a_8 < 0, (a_9 - a_8)^2 = (a_8 + a_9)^2 - 4a_8 a_9 = 8093 > 80^2, \therefore d = a_9 - a_8 < -80$ ，

由等差中项知： $a_8 + a_9 = a_1 + a_{16} = a_2 + a_{15} = \dots = a_7 + a_{10} = -1$ ， $\therefore S_{16} = a_1 + a_2 + \dots + a_{16} = -8 < 0$ ，

$a_{16} = a_9 + 7d < -560$ ， $S_{15} = S_{16} - a_{16} > 552 > 0$ ，即使得 $S_n > 0$ 的成立的最大 $n = 15$ ；故选：A.

2. (2023·宁夏石嘴山·石嘴山市第三中学校考一模) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，共前 n 项和为 S_n ，已知

$S_{16} > 0, S_{17} < 0$ ，则下列结论不正确的是 () .

A. $a_1 > 0, d < 0$

B. S_8 与 S_9 均为 S_n 的最大值

C. $a_8 + a_9 > 0$

D. $a_9 < 0$

【答案】B

【解析】依题意，

因为 $S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 8(a_8 + a_9) > 0$ ，

$S_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \frac{17 \times 2 \times a_9}{2} = 17a_9 < 0$ ，

所以 $a_8 + a_9 > 0, a_9 < 0$ ，所以 CD 正确；

由 $a_8 + a_9 > 0, a_9 < 0$ ，易得 $a_8 > 0$ ，

所以 $d = a_9 - a_8 < 0$ ，即 $d < 0$ ，

由 $a_8 = a_1 + 7d > 0$ ，得 $a_1 > -7d$ ，

所以 $a_1 > 0$ ，所以 A 正确；

对于 B：因为 $S_9 = S_8 + a_9 < S_8$ ，所以 $S_9 \neq S_8$ ，

因此， S_8 与 S_9 不可能同为 S_n 的最大值.

故选：B.

3. (2023·江苏盐城·盐城市伍佑中学校考模拟预测) (多选) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，其前 n 项和为 S_n ，

前 n 项积为 T_n ，并且满足条件 $a_1 > 1, a_6 a_7 > 1, \frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} < 0$ ，则下列结论正确的是 ()

A. $q > 1$

B. $0 < a_6 a_8 < 11$

C. S_n 的最大值为 S_7

D. T_n 的最大值为 T_6

【答案】BD

【解析】若 $q < 0$ ，则 $a_6 < 0$ ， $a_7 > 0$ ，所以 $a_6 a_7 < 0$ ，与 $a_6 a_7 > 1$ 矛盾；

若 $q \geq 1$ ，则因为 $a_1 > 1$ ，所以 $a_6 > 1$ ， $a_7 > 1$ ，则 $\frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} > 0$ ，与 $\frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} < 0$ 矛盾，因此 $0 < q < 1$ ，所以 A 不正确。

因为 $\frac{a_6 - 1}{a_7 - 1} < 0$ ，所以 $a_6 > 1 > a_7 > 0$ ，因此 $a_6 a_8 = a_7^2 \in (0, 1)$ ，故 B 正确。

因为 $a_n > 0$ ，所以 S_n 单调递增，即 S_n 的最大值不为 S_7 ，故 C 错误。

因为当 $n \geq 7$ 时， $a_n \in (0, 1)$ ，当 $1 \leq n \leq 6$ 时， $a_n \in (1, +\infty)$ ，所以 T_n 的最大值为 T_6 ，即 D 正确。故选：BD。

考法七 数列与其他知识的综合运用

【例 7-1】（2023·黑龙江哈尔滨·哈尔滨三中校考模拟预测）若 i 为虚数单位，则计算

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2021i^{2021} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $1010 + 1011i$

【解析】设 $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2021i^{2021}$ ，

$$iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2021i^{2022},$$

上面两式相减可得，

$$\begin{aligned} (1-i)S &= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2021} - 2021i^{2022} \\ &= \frac{i(1-i^{2021})}{1-i} - 2021i^{2022} = \frac{i(1-i)}{1-i} - 2021i^{2022} = i + 2021, \end{aligned}$$

$$\text{则 } S = \frac{2021+i}{1-i} = \frac{(2021+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2020 + 2022i}{2} = 1010 + 1011i.$$

故答案为： $1010 + 1011i$ 。

【例 7-2】（2023·山西阳泉·统考三模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = nC_{10}^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n}$ ，其前 n 项和为 S_n ，则

$$S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{20}{3} / 6\frac{2}{3}$

【解析】因为 $a_n = nC_{10}^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n} = 10C_9^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n} = \frac{20}{3} C_9^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-n}$ ，

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{20}{3} \left[C_9^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^9 + C_9^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^8 + \dots + C_9^9 \left(\frac{2}{3}\right)^9 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \right]$$

$$= \frac{20}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right)^9 = \frac{20}{3}.$$

故答案为: $\frac{20}{3}$.

【变式】

1. (2023·河北沧州·校考三模) 自然界中某些生物的基因型是由雌雄配子的基因组合而成, 这种生物在生育下一代时, 成对的基因相互分离形成配子, 配子随机结合形成下一代. 若某生物群体的基因型为 Aa, 在该生物个体的随机交配过程中, 基因型为 aa 的子代因无法适应自然环境, 会被自然界淘汰. 例如, 当亲代只有 Aa 基因型个体时, 其子 1 代的基因型如下表所示:

雌雄	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{2}a$
$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{4}AA$	$\frac{1}{4}Aa$
$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{4}Aa$	×

由上表可知, 子 1 代中 AA:Aa=1:2, 子 1 代产生的配子中 A 占 $\frac{2}{3}$, a 占 $\frac{1}{3}$. 以此类推, 则子 10 代中 Aa 个体所占比例为_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 由题, 设子 n 代中 Aa 占比为 a_n , 则 AA 占比为 $1-a_n$.

所以 A:a=[2(1- a_n)+ a_n]: a_n =(2- a_n): a_n , 则子(n+1)代的基因型如下表所示,

雌雄	$\frac{2-a_n}{2}A$	$\frac{a_n}{2}a$
$\frac{2-a_n}{2}A$	$\left(\frac{2-a_n}{2}\right)^2 AA$	$\frac{(2-a_n)a_n}{4} Aa$
$\frac{a_n}{2}a$	$\frac{(2-a_n)a_n}{4} Aa$	×

由表可得, 表格中总份数为 $\left(\frac{2-a_n}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{(2-a_n)a_n}{4}$ (其中淘汰了 $\frac{a_n^2}{4}$ 份),

因此子(n+1)代中 Aa 占比为 $\frac{\frac{(2-a_n)a_n}{2}}{\left(\frac{2-a_n}{2}\right)^2 + \frac{(2-a_n)a_n}{2}} = a_{n+1}$,

化简得 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+a_n}$ ，即 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$ ，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$ ，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}n + 1$ ， $a_n = \frac{2}{n+2}$ ，因此 $a_{10} = \frac{2}{10+2} = \frac{1}{6}$ 。

故答案为： $\frac{1}{6}$ 。

2. (2023·全国·模拟预测) 离子是指原子由于自身或外界的作用而失去或得到一个或几个电子后达到的稳定结构，得到电子为阴离子，失去电子为阳离子，在外界作用下阴离子与阳离子之间可以相互转化。科学家们在试验过程中发现，在特定外界作用下，1 个阴离子可以转化为 1 个阳离子和 1 个阴离子，1 个阳离子可以转化为 1 个阴离子，如果再次施加同样的外界作用，又能产生同样的转化。若一开始有 1 个阴离子和 1 个阳离子，则在 9 次该作用下，阴离子的个数为 ()

A. 87

B. 89

C. 91

D. 93

【答案】B

【解析】由题目知，作用后的阳离子个数是作用前阴离子个数，作用后的阴离子个数是作用前阴阳离子个数之和。

现在有 1 个阴离子和 1 个阳离子，经过逐次作用后：

作用次数	阳离子个数	阴离子个数
0	1	1
1	1	2
2	2	3
3	3	5
4	5	8
5	8	13
6	13	21
7	21	34

8	34	55
9	55	89

则在 9 次该作用下，阴离子的个数为 89.

故选：B.

考法八 新定义数列

【例 8-1】(2023·浙江·校联考模拟预测)(多选) 意大利著名数学家莱昂纳多·斐波那契 (Leonardo Fibonacci) 在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...，该数列的特点是：前两个数都是 1，从第三个数起，每一个数都等于它的前面两个数的和，人们把这样的一列数称为“斐波那契数列”。同时，随着 n 趋于无穷大，其前一项与后一项的比值越来越逼近黄金分割 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ ，因此又称“黄金分割数列”，记斐波那契数列为 $\{a_n\}$ ，则下列结论正确的有 ()

A. $\sum_{k=1}^{2022} a_k = a_{2024} - 1$

B. $\sum_{k=1}^{1011} a_{2k} = a_{2024} - 1$

C. $\sum_{k=1}^{2022} a_k^2 = a_{2022} a_{2023}$

D. $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = -(a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1})$

【答案】ACD

【解析】因为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，所以 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ ，所以

$$\sum_{k=1}^{2022} a_k = a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \dots + a_{2024} - a_{2023} = a_{2024} - a_2 = a_{2024} - 1 \text{ 故 A 正确；}$$

因为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，所以 $a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1}$ ，即 $a_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k-1}$ ，

所以 $\sum_{k=1}^{1011} a_{2k} = a_3 - a_1 + a_5 - a_3 + \dots + a_{2023} - a_{2021} = a_{2023} - a_1 = a_{2023} - 1$ ，而 $a_{2024} > a_{2023}$ ，故 B 错误；

$a_k^2 = a_k(a_{k+1} - a_{k-1}) = a_k a_{k+1} - a_{k-1} a_k (k \geq 2)$ ，所以

$$\sum_{k=1}^{2022} a_k^2 = 1 + \sum_{k=2}^{2022} (a_k a_{k+1} - a_{k-1} a_k) = 1 + a_2 a_3 - a_1 a_2 + a_3 a_4 - a_2 a_3 + \dots + a_{2022} a_{2023} - a_{2021} a_{2022} = a_{2022} a_{2023} \text{ 故 C 正确；}$$

$a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) - a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2$ ，故 D 正确

答案：ACD.

【例 8-2】(2023·江苏扬州·统考模拟预测)(多选) 定义：在数列的每相邻两项之间插入此两项的积，形成新的数列，这样的操作叫作该数列的一次“美好成长”。将数列 1、2 进行“美好成长”，第一次得到数列 1、

2、2；第二次得到数列1、2、2、4、2；L；设第 n 次“美好成长”后得到的数列为1、 x_1 、 x_2 、L、 x_k 、2，并记 $a_n = \log_2(1 \times x_1 \times x_2 \times L \times x_k \times 2)$ ，则（ ）

A. $a_2 = 5$

B. $k = 2^n + 1$

C. $a_{n+1} = 3a_n - 1$

D. 数列 $\left\{\frac{3^n}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3^{n+1} + 1}$

【答案】ACD

【解析】对于A选项， $a_2 = \log_2(1 \times 2 \times 2 \times 4 \times 2) = \log_2 2^5 = 5$ ，A对；

对于B选项，设第 n 次“美好成长”后共插入 b_n 项，即 $k = b_n$ ，共有 $b_n + 1$ 个间隔，且 $b_1 = 1$ ，

则第 $n+1$ 次“美好成长”后再插入 b_{n+1} 项，则 $b_{n+1} = b_n + (b_n + 1) = 2b_n + 1$ ，

可得 $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ ，且 $b_1 + 1 = 2 \neq 0$ ，

故数列 $\{b_n + 1\}$ 是以首项为2，公比为2的等比数列，

则 $b_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ，故 $k = b_n = 2^n - 1$ ，B错；

对于C选项，由题意可知： $a_{n+1} = \log_2 \left\{ (1 \times x_1 \times x_2 \times L \times x_k \times 2) [(1 \times x_1) \times (x_1 \times x_2) \times L \times (x_k \times 2)] \right\}$

$$= \log_2 \left[(1 \times x_1 \times x_2 \times L \times x_k \times 2) \times \frac{(1 \times x_1 \times x_2 \times L \times x_k \times 2)^2}{1 \times 2} \right]$$

$$= 3 \log_2 (1 \times x_1 \times x_2 \times L \times x_k \times 4) - 1 = 3a_n - 1, \text{ C对；}$$

对于D选项，因为 $a_{n+1} = 3a_n - 1$ ，且 $a_1 = \log_2(1 \times 2 \times 2) = 2$ ，

$$\text{所以， } a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3 \left(a_n - \frac{1}{2} \right), \text{ 且 } a_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

所以数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，公比为3的等比数列，

$$\text{所以， } a_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}, \text{ 故 } a_n = \frac{3^n + 1}{2},$$

$$\text{所以， } \frac{3^n}{a_n a_{n+1}} = \frac{3^n}{\frac{(3^n + 1)(3^{n+1} + 1)}{4}} = \frac{4 \cdot 3^n}{(3^n + 1)(3^{n+1} + 1)} = \frac{2[(3^{n+1} + 1) - (3^n + 1)]}{(3^n + 1)(3^{n+1} + 1)} = \frac{2}{3^n + 1} - \frac{2}{3^{n+1} + 1},$$

$$\text{所以，数列 } \left\{ \frac{3^n}{a_n a_{n+1}} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } \left(\frac{2}{3+1} - \frac{2}{3^2+1} \right) + \left(\frac{2}{3^2+1} - \frac{2}{3^3+1} \right) + L + \left(\frac{2}{3^n+1} - \frac{2}{3^{n+1}+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3^{n+1}+1}, \text{ D对.}$$

故选：ACD.

【变式】

1. (2023·广东广州·统考三模) 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中, 研究了二阶等差数列. 若 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列. 现有一个“三角垛”, 共有 40 层, 各层小球个数构成一个二阶等差数列, 第一层放 1 个小球, 第二层放 3 个小球, 第三层放 6 个小球, 第四层放 10 个小球, $\dots$, 则第 40 层放小球的个数为 ()

A. 1640

B. 1560

C. 820

D. 780

【答案】C

【解析】设第 n 层放小球的个数为 a_n , 由题意 $a_2-a_1=2$, $a_3-a_2=3$, $\dots$, 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,

所以 $a_n-a_{n-1}=2+(n-2)=n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$.

故 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+\dots+(a_n-a_{n-1})=1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$,

故 $a_{40}=\frac{1}{2} \times 40 \times 41=820$.

故选: C.

2. (2023·河南·河南省内乡县高级中学校考模拟预测) “角谷猜想”首先流传于美国, 不久便传到欧洲, 后来一位名叫角谷静夫的日本人又把它带到亚洲, 因而人们就顺势把它叫作“角谷猜想”. “角谷猜想”是指一个正整数, 如果是奇数就乘以 3 再加 1, 如果是偶数就除以 2, 这样经过若干次运算, 最终回到 1. 对任意正整数 a_0 , 按照上述规则实施第 n 次运算的结果为 $a_n (n \in \mathbb{N})$, 若 $a_5=1$, 且 $a_i (i=1,2,3,4)$ 均不为 1, 则 $a_0=()$

A. 5 或 16

B. 5 或 32

C. 5 或 16 或 4

D. 5 或 32 或 4

【答案】B

【解析】由题知 $a_{n+1}=\begin{cases} 3a_n+1, a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2}, a_n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 因为 $a_5=1$, 则有:

若 a_4 为奇数, 则 $a_5=3a_4+1=1$, 得 $a_4=0$, 不合题意, 所以 a_4 为偶数, 则 $a_4=2a_5=2$;

若 a_3 为奇数, 则 $a_4=3a_3+1=2$, 得 $a_3=\frac{1}{3}$, 不合题意, 所以 a_3 为偶数, $a_3=2a_4=4$;

若 a_2 为奇数, 则 $a_3=3a_2+1=4$, 得 $a_2=1$, 不合题意, 所以 a_2 为偶数, 且 $a_2=2a_3=8$;

若 a_1 为奇数, 则 $a_2=3a_1+1=8$, 得 $a_1=\frac{7}{3}$, 不合题意, 所以 a_1 为偶数, 且 $a_1=2a_2=16$;

若 a_0 为奇数, 则 $a_1 = 3a_0 + 1 = 16$, 可得 $a_0 = 5$; 若 a_0 为偶数, 则 $a_0 = 2a_1 = 32$.

综上所述: $a_0 = 5$ 或 32 .

故选: B

3. (2023·河南安阳·统考二模) 如果有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ (m 为正整数) 满足条件 $a_1 \cdot a_m = t$,

$a_2 \cdot a_{m-1} = t, \dots, a_m \cdot a_1 = t$, 即 $a_i \cdot a_{m-i+1} = t$ (t 为常数) ($i = 1, 2, \dots, m$), 则称其为“倒序等积数列”. 例如, 数

列 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 是“倒序等积数列”. 已知 $\{c_n\}$ 是 80 项的“倒序等积数列”, $t = 2$, 且 $c_{41}, c_{42}, \dots, c_{80}$

是公比为 2, $c_{80} = 2$ 的等比数列, 设数列 $\{\log_2 c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{50} =$ ().

A. 210

B. 445

C. 780

D. 1225

【答案】B

【解析】由题可知当 $n \geq 41$ 时, $c_n = c_{80} \cdot 2^{n-80} = 2^{n-79}$.

根据定义, 当 $1 \leq n \leq 40$ 时, $c_n c_{81-n} = 2 \Rightarrow c_n = \frac{2}{c_{81-n}} = \frac{2}{2^{2-n}} = 2^{n-1}$.

则 $\log_2 c_n = \begin{cases} n-1, 1 \leq n \leq 40 \\ n-79, n \geq 41 \end{cases}$.

故 $S_{50} = c_1 + c_2 + \dots + c_{40} + c_{41} + c_{42} + \dots + c_{50}$

$= 0 + 1 + 2 + \dots + 39 - (38 + 37 + \dots + 29)$

$= \frac{39 \times 40}{2} - \frac{67 \times 10}{2} = \frac{890}{2} = 445$.

故选: B

4. (2023·广西南宁·南宁三中校考模拟预测) 意大利数学家斐波那契以兔子繁殖数量为例, 引入数列:

1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 该数列从第三项起, 每一项都等于前两项的和, 即递推关系式为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \in \mathbb{N}^*$, 故此数列

称为斐波那契数列, 又称“兔子数列”. 已知满足上述递推关系式的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, 其中 A, B 的值可由 a_1 和 a_2 得到, 比如兔子数列中 $a_1 = 1, a_2 = 1$ 代入解得

$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. 利用以上信息计算 $\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5\right] =$ (). ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数) ()

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

【答案】B

【解析】由题意可令 $A=B=1$,

所以将数列 $\{a_n\}$ 逐个列举可得:

$$a_1=1, a_2=3, a_3=a_1+a_2=4, a_4=a_3+a_2=7, a_5=a_4+a_3=11,$$

$$\text{故 } a_5 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 = 11,$$

$$\text{因为 } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 \in (-1, 0),$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 \in (11, 12),$$

$$\text{故 } \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5\right] = 11.$$

故选:B

强化训练

一、单选题

1. (2023·天津·统考高考真题) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 则 a_4 的值为 ()

A. 3

B. 18

C. 54

D. 152

【答案】C

【解析】由题意可得: 当 $n=1$ 时, $a_2 = 2a_1 + 2$, 即 $a_1q = 2a_1 + 2$, ①

当 $n=2$ 时, $a_3 = 2(a_1 + a_2) + 2$, 即 $a_1q^2 = 2(a_1 + a_1q) + 2$, ②

联立①②可得 $a_1 = 2, q = 3$, 则 $a_4 = a_1q^3 = 54$.

故选: C.

2. (2023·江西九江·统考一模) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_4 = 8$, $S_7 = 35$, 则 $a_5 =$ ()

A. 3

B. 5

C. 7

D. 9

【答案】C

【解析】由题意得 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 8 \\ 7a_1 + 21d = 35 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = -1 \\ d = 2 \end{cases}$, $\therefore a_5 = a_1 + 4d = 7$, 故选: C.

3. (2023·四川南充·模拟预测) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 10, a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$, 则 S_n

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/966032234025010123>