最小作用量原理

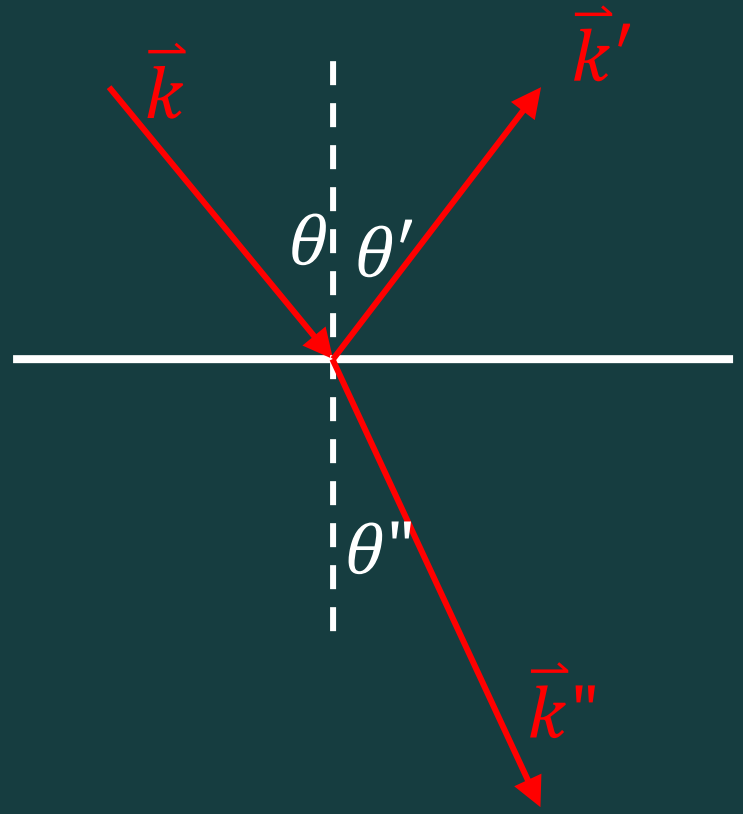
(Principle of Least Action)

有些书上称“哈密顿原理”

王伟良

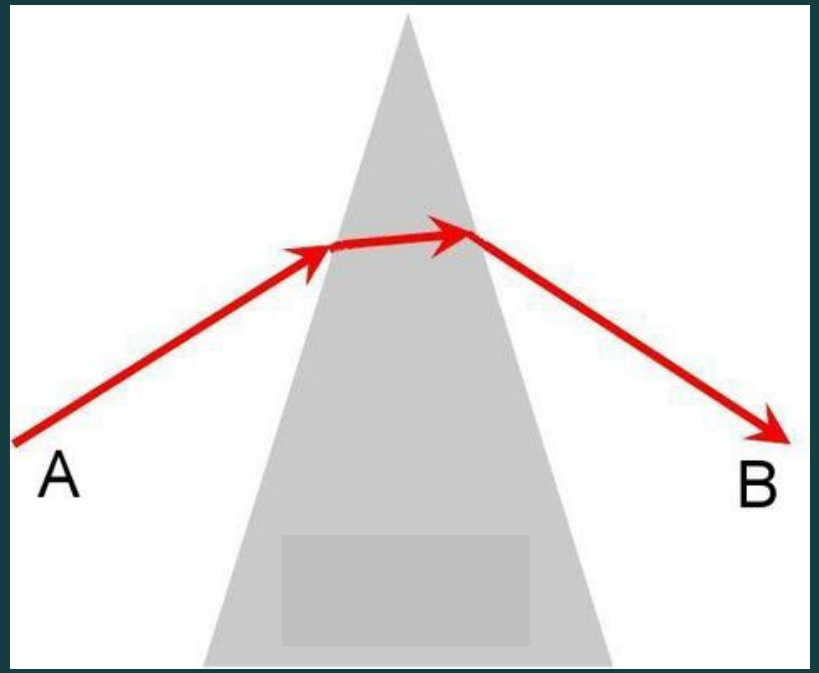
局部与全局

$$\vec{F}(\vec{r},t)=m\vec{a}(\vec{r},t)$$



费马原理

- 光线 在空间两点之间的传播，将沿着光程为极值的路径传播。



提纲

- 保守力场中质点运动的最小作用量原理。
- 静电学的最小作用量原理。

力学中的最小作用量原理

已知：质点在一个保守力场中运动，

t_1时刻在A处，t_2时刻在B处；

问：它在这段时间中每一时刻的速度。

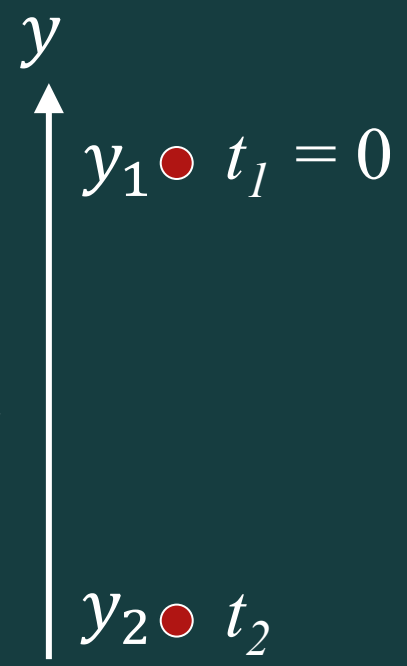
作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}mv^2 - \mathrm{V}(\vec{r})\right] \mathrm{d}t$　　取极值

重力场中的一维运动

已知：质点在重力场中运动，

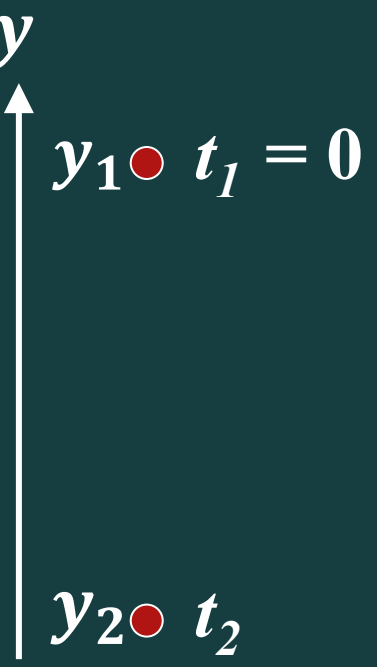
t_1时刻在y_1处，t_2时刻在y_2处；

问：它在这段时间中每一时刻的速度或位置。



重力场中的一维运动（牛顿力学）

$$y(t) = y_1 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

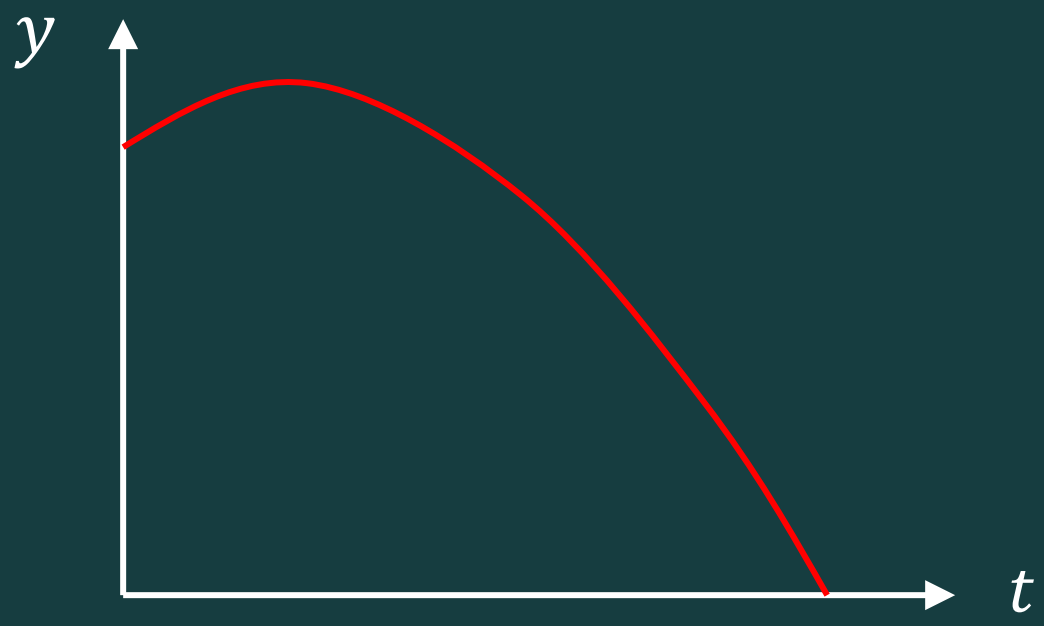


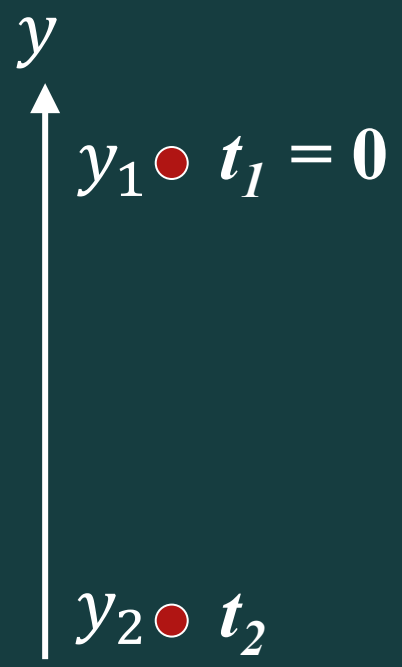
$$y(t_2) = y_1 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = y_2$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{y_2 - y_1 + \frac{1}{2} g t_2^2}{t_2}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1 + \frac{y_2 - y_1 + \frac{1}{2} g t_2^2}{t_2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

重力场中的一维运动（牛顿力学）

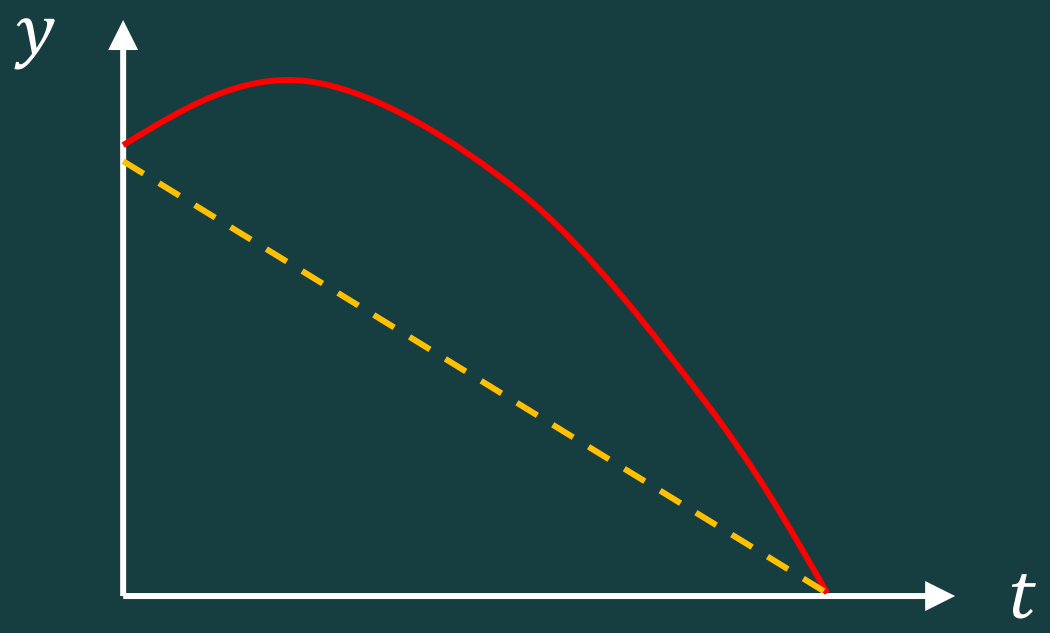


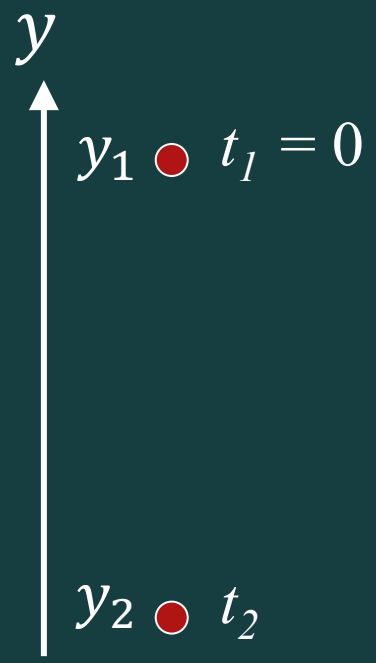


$$y(t) = y_1 + \frac{y_2 - y_1 + \frac{1}{2}gt_2^2}{t_2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

重力场中的一维运动（最小作用量原理）

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2-mgy\right]\mathrm{d}t$$





能量守恒？

真实运动

$$\underline{y(t)} = y_1 + \frac{y_2 - y_1 + \frac{1}{2}gt_2^2}{t_2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\underline{S} = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgy\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{y_2 - y_1 + gt_2^2/2}{t_2} - gt\right)^2 - mg\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1 + gt_2^2/2}{t_2}t - gt^2/2\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{m}{6g}\left(gt_2 - \frac{y_2 - y_1 + gt_2^2/2}{t_2}\right)^3 - mgy_1t_2 - \frac{1}{2}mg\frac{y_2 - y_1 + gt_2^2/2}{t_2}t_2^2 + \frac{1}{6}mg^2t_2^3$$

$$+\frac{m}{6g}\left(\frac{y_2 - y_1 + gt_2^2/2}{t_2}\right)^3 = \boxed{\frac{m(y_2 - y_1)^2}{2t_2} - mgy_1t_2 - \frac{1}{2}mgt_2(y_2 - y_1) - \frac{1}{24}mg^2t_2^3}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/966140004112010104