

2024 中考数学常见几何模型归纳总结—圆中的重要模型之定角定高模型、米勒最大角模型

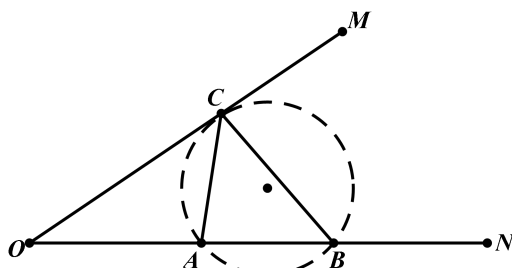
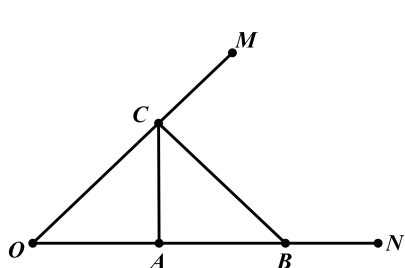
圆在中考数学几何模块中占据着重要地位，也是学生必须掌握的一块内容，本专题就圆形中的重要模型（米勒最大视角（张角）模型、定角定高（探照灯）模型）进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

近几年一些中考几何问题涉及了“最大视角”与“定角定高”模型，问题往往以动点为背景，与最值相结合，综合性较强，解析难度较大，学生难以找到问题的切入点，不能合理构造辅助圆来求解。实际上，这样的问题中隐含了几何的“最大视角”与“定角定高”模型，需要对其中的动点轨迹加以剖析，借助圆的特性来探究最值情形。而轨迹问题是近些年中考压轴题的热点和难点，既可以与最值结合考查，也可以与轨迹长结合考查，综合性较强、难度较大。

模型 1. 米勒最大张角（视角）模型

【模型解读】 已知点 A, B 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 C 是边 OM 上的动点，则当 C 在何处时， $\angle ACB$ 最大？对米勒问题在初中最值的考察过程中，也成为最大张角或最大视角问题。

米勒定理： 已知点 AB 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 C 是边 OM 上的一动点，则当且仅当三角形 ABC 的外圆与边 OM 相切于点 C 时， $\angle ACB$ 最大。



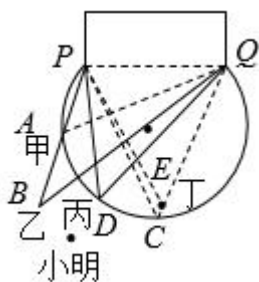
【模型证明】 如图 1，设 C' 是边 OM 上不同于点 C 的任意一点，连结 A, B ，因为 $\angle AC'B$ 是圆外角， $\angle ACB$ 是圆周角，易证 $\angle AC'B$ 小于 $\angle ACB$ ，故 $\angle ACB$ 最大。



【**解题关键**】常常以解析几何、平面几何和实际应用为背景进行考查。若能从题设中挖出隐含其中的米勒问题模型，并能直接运用米勒定理解题，这将会突破思维瓶颈、大大减少运算量、降低思维难度、缩短解题长度，从而使问题顺利解决。否则这类问题将成为考生的一道难题甚至一筹莫展，即使解出也费时化力。

- 【答案】D

【详解】解: 如图所示,

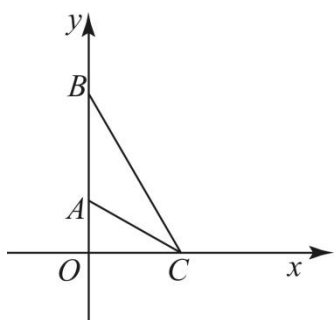


$$\because \angle PAQ = \angle PDQ = \angle PCQ, \angle PAB = \angle AQB + \angle B, \angle AEQ = \angle PCQ + \angle CPE$$

$\therefore \angle PEQ$ 最大, $\therefore$ 小明将球传给丁球员射门较好, 故选: D.

【点睛】本题考查了同弧所对的圆周角相等, 三角形外角的性质, 掌握以上知识是解题的关键.

例 2. (2023·四川宜宾·校考二模) 如图, 已知点 A 、 B 的坐标分别是 $(0,1)$ 、 $(0,3)$, 点 C 为 x 轴正半轴上一动点, 当 $\angle ACB$ 最大时, 点 C 的坐标是 ()



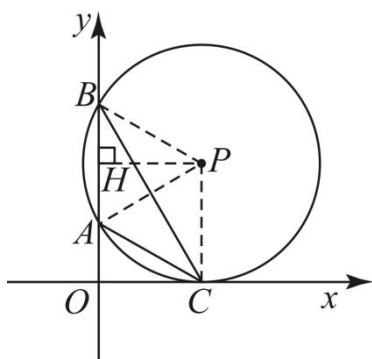
- A. $(2,0)$ B. $(\sqrt{3},0)$ C. $(\sqrt{2},0)$ D. $(1,0)$

【答案】B

【分析】过点 A 、 B 作 $\odot P$, 点 $\odot P$ 与 x 轴相切于点 C 时, 利用圆周角大于对应的圆外角得到此时 $\angle ACB$ 最大, 连接 PA 、 PB 、 PC , 作 $PH \perp y$ 轴于 H , 如图, 利用垂径定理得 $AH = BH = 1$, 则 $OH = 2$, 再根据切线的性质得 $PC \perp x$ 轴, 则四边形 $PCOH$ 为矩形, 所以 $PC = OH = 2$, 则 $PA = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle PAH$ 中, 利用勾股定理计算出 $PH = \sqrt{3}$, 于是可得到 C 点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$.

【详解】解: 过点 A 、 B 作 $\odot P$, 点 $\odot P$ 与 x 轴相切于点 C 时, $\angle ACB$ 最大,

连接 PA 、 PB 、 PC , 作 $PH \perp y$ 轴于 H , 如图,



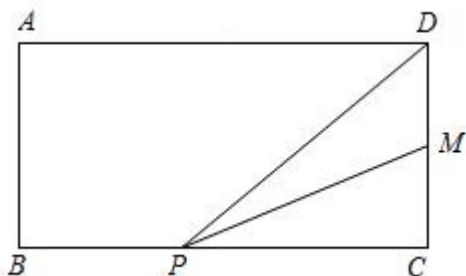
$\because$ 点 A 、 B 的坐标分别是 $(0, 1)$ 、 $(0, 3)$ ， $\therefore OA = 1$ ， $AB = 3 - 1 = 2$ ， $\because PH \perp AB$ ， $\therefore AH = BH = 1$ ， $\therefore OH = 2$ ，

$\because \odot P$ 与 x 轴相切于点 C ， $\therefore PC \perp x$ 轴， $\therefore$ 四边形 $PCOH$ 为矩形， $\therefore PC = OH = 2$ ， $\therefore PA = 2$ ，

在 $Rt\triangle PAH$ 中， $PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ， $\therefore C$ 点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$ 。故选：B。

【点睛】本题考查了圆的综合题，熟练掌握垂径定理、圆周角定理、勾股定理、坐标与图形，掌握相关定理性质是解题的关键。

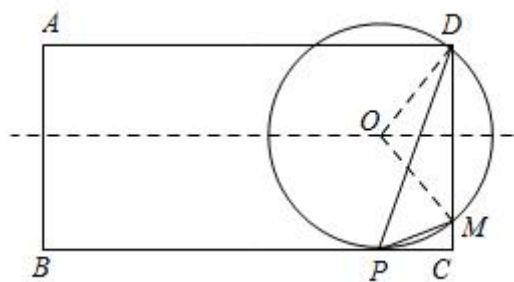
例 3. (2023·江苏南京·九年级统考期中) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 8$ ， M 是 CD 的中点，点 P 是 BC 上一个动点，若 $\angle DPM$ 的度数最大，则 $BP = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



【答案】 $8 - 2\sqrt{2} / -2\sqrt{2} + 8$

【分析】作 $\triangle PMD$ 的外接圆 $\odot O$ ，当 $\odot O$ 与 BC 相切时， $\angle DOM$ 最大，即 $\angle DPM$ 最大，根据相似三角形的性质求出 PC 即可。

【详解】解：作 $\triangle PMD$ 的外接圆，则圆心 O 在 DM 的中垂线上移动，



$\because \angle DOM = 2\angle DPM$, $\therefore$ 当 $\angle DOM$ 最大时, $\angle DPM$ 最大, 当 $\odot O$ 与 BC 相切时, $\angle DOM$ 最大,

$\because M$ 是 CD 的中点, $CD = 4$, $\therefore CM = DM = 2$,

$\because CP$ 是 $\odot O$ 的切线, PM 是弦, $\therefore \angle CPM = \angle CDP$,

又 $\because \angle PCM = \angle DCP = 90^\circ$, $\therefore \triangle PCM \sim \triangle DCP$,

$$\therefore \frac{PC}{DC} = \frac{MC}{PC}, \therefore PC^2 = MC \cdot DC = 2 \times 4 = 8, \therefore PC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BP = BC - PC = 8 - 2\sqrt{2}, \text{ 故答案为: } 8 - 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查切线的性质, 矩形的性质, 掌握矩形的性质和切线的性质是正确解答的前提, 理解 $\triangle PMD$ 的外接圆 $\odot O$ 与 BC 相切时, $\angle DPM$ 最大是解决问题的关键.

例 4. (2023·陕西西安·校考模拟预测) 足球射门时, 在不考虑其他因素的条件下, 射点到球门 AB 的张角越大, 射门越好. 当张角达到最大值时, 我们称该射点为最佳射门点. 通过研究发现, 如图 1 所示, 运动员带球在直线 CD 上行进时, 当存在一点 Q , 使得 $\angle CQA = \angle ABQ$ (此时也有 $\angle DQB = \angle QAB$) 时, 恰好能使球门 AB 的张角 $\angle AQB$ 达到最大值, 故可以称点 Q 为直线 CD 上的最佳射门点.

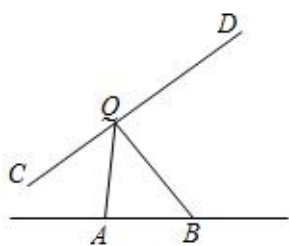


图1

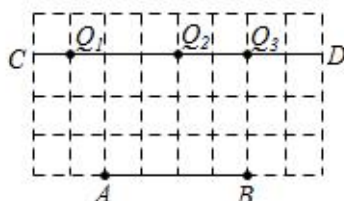


图2

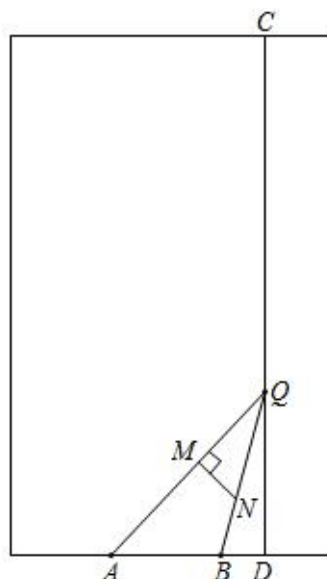


图3

(1)如图 2 所示, AB 为球门, 当运动员带球沿 CD 行进时, Q_1, Q_2, Q_3 为其中的三个射门点, 则在这三个射门点中, 最佳射门点为点_____; (2)如图 3 所示, 是一个矩形形状的足球场, AB 为球门, $CD \perp AB$ 于点 D , $AB = 3a$, $BD = a$. 某球员沿 CD 向球门 AB 进攻, 设最佳射门点为点 Q . ①用含 a 的代数式表示 DQ 的长度并求出 $\tan \angle AQB$ 的值; ②已知对方守门员伸开双臂后, 可成功防守的范围为 $\frac{\sqrt{5}}{4}a$, 若此时守门员站在张角 $\angle AQB$ 内, 双臂张开 MN 垂直于 AQ 进行防守, 求 MN 中点与 AB 的距离至少为多少时才能确保防守成功. (结果用含 a 的代数式表示)

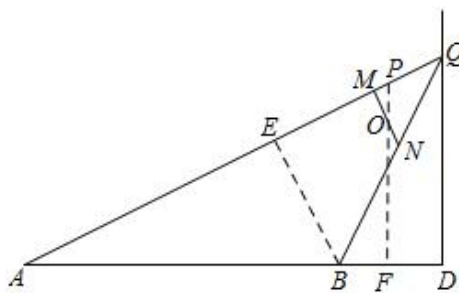
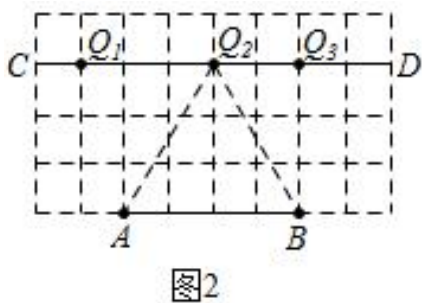
【答案】(1) Q_2 (2) ① $DQ = 2a$; $\tan \angle AQB = \frac{3}{4}$; ② $\frac{17}{12}a$.

【分析】(1) 连接 Q_2A 、 Q_2B , 根据平行线的性质得出 $\angle CQ_2A = \angle Q_2AB$, 再根据等腰三角形的性质得出 $\angle Q_2BA = \angle Q_2AB$ 即可判断; (2) ①根据最佳射门点为点 Q , 可证 $\triangle ADQ \sim \triangle QDB$, 列出比例式即可求出 DQ 的长度, 作 $BE \perp AQ$ 于 E , 求出线段长, 利用三角函数求解即可; ②根据题意可知 $MN = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, 过 MN 中点 O 作 $OF \perp AB$ 于 F , 交 AQ 于 P , 利用相似三角形的性质求出 EM , 再解直角三角形求出 MP 、 PF 、 PO 即可.

【详解】(1) 解: 连接 Q_2A 、 Q_2B , $\because CD \parallel AB$, $\therefore \angle CQ_2A = \angle Q_2AB$,

$$\because BQ_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad AQ_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad \therefore BQ_2 = AQ_2,$$

$\therefore \angle Q_2BA = \angle Q_2AB$, $\therefore \angle Q_2BA = \angle CQ_2A$, $\therefore$ 最佳射门点为 Q_2 故答案为: Q_2 .



(2) 解: ①作 $BE \perp AQ$ 于 E , $\therefore$ 最佳射门点为点 Q , $\therefore \angle BQD = \angle DAQ$,

$\therefore CD \perp AB$, $\therefore \angle BDQ = \angle ADQ = 90^\circ$, $\therefore \triangle ADQ \sim \triangle QDB$, $\therefore \frac{AD}{DQ} = \frac{DQ}{BD}$,

$\therefore AB = 3a$, $BD = a$, $\therefore AD = 4a$, 代入比例式得, $\frac{4a}{DQ} = \frac{DQ}{a}$,

解得, $DQ = 2a$ (负值舍去); $AQ = \sqrt{AD^2 + DQ^2} = 2\sqrt{5}a$,

$\therefore \tan \angle DAQ = \frac{DQ}{AD} = \frac{1}{2}$, $\sin \angle DAQ = \frac{DQ}{AQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BE = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$, $AE = \frac{6\sqrt{5}a}{5}$, 则 $QE = AQ - AE = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$, $\tan \angle AQB = \frac{BE}{EQ} = \frac{3}{4}$;

②过 MN 中点 O 作 $OF \perp AB$ 于 F , 交 AQ 于 P ,

$\therefore$ 守门员伸开双臂后, 可成功防守的范围为 $\frac{\sqrt{5}}{4}a$, $\therefore$ 当 $MN = \frac{\sqrt{5}}{4}a$ 时才能确保防守成功.

$\therefore MN \perp AQ$, $\therefore \tan \angle AQB = \frac{MN}{MQ} = \frac{3}{4}$, $\therefore MQ = \frac{\sqrt{5}}{3}a$, $ME = EQ - MQ = \frac{7\sqrt{5}}{15}a$,

$\therefore \angle MOP + \angle APF = 90^\circ$, $\angle QAD + \angle APF = 90^\circ$, $\therefore \angle MOP = \angle QAD$, $\therefore \frac{PM}{OM} = \frac{1}{2}$,

$\therefore OM = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{5}}{8}a$, $PM = \frac{1}{2}MO = \frac{\sqrt{5}}{16}a$,

$\therefore \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore PO = \frac{5}{16}a$, $AP = EM + AE + PM = \frac{83\sqrt{5}a}{48}$,

$\therefore \frac{FP}{AP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore PF = \frac{83a}{48}$, $OF = PF - OP = \frac{17}{12}a$;

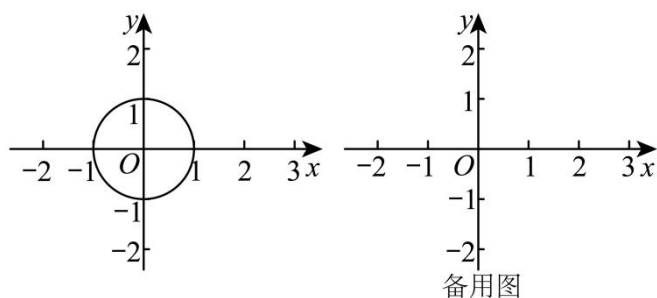
MN 中点与 AB 的距离至少为 $\frac{17}{12}a$ 时才能确保防守成功.

【点睛】本题考查解直角三角形应用, 解题关键恰当构建直角三角形, 熟练运用解直角三角形的知识求解.

例 5. (2023 上·北京东城·九年级校考阶段练习) 在平面直角坐标系 xOy 中, 给出如下定义:

对于 $\odot C$ 及 $\odot C$ 外一点 P , M, N 是 $\odot C$ 上两点, 当 $\angle MPN$ 最大, 称 $\angle MPN$ 为点 P 关于 $\odot C$ 的“视角”.

直线 l 与 $\odot C$ 相离，点 Q 在直线 l 上运动，当点 Q 关于 $\odot C$ 的“视角”最大时，则称这个最大的“视角”为直线 l 关于 $\odot C$ 的“视角”。



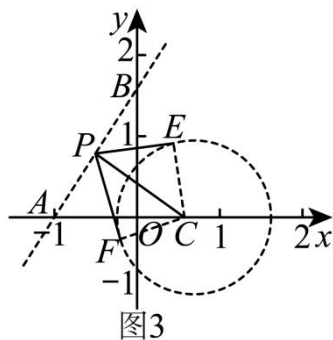
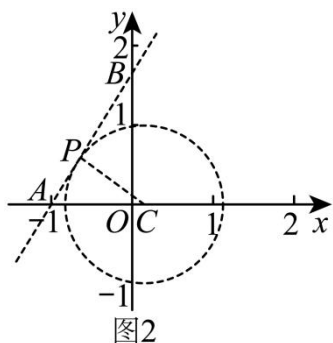
(1)如图， $\odot O$ 的半径为 1，①已知点 $A(1,1)$ ，直接写出点 A 关于 $\odot O$ 的“视角”；

已知直线 $y=2$ ，直接写出直线 $y=2$ 关于 $\odot O$ 的“视角”；②若点 B 关于 $\odot O$ 的“视角”为 90° ，直接写出一个符合条件的 B 点坐标；(2) $\odot C$ 的半径为 1，①点 C 的坐标为 $(1,2)$ ，直线 $l: y=kx+b(k>0)$ 经过点 $D(-2\sqrt{3}+1,0)$ ，若直线关于 $\odot C$ 的“视角”为 60° ，求 k 的值；②圆心 C 在 x 轴正半轴上运动，若直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 关于 $\odot C$ 的“视角”大于 120° ，直接写出圆心 C 的横坐标 x_c 的取值范围。

【答案】(1)① 90° ， 60° ；② $B(0,2)$ （答案不唯一）(2)① $k=\sqrt{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}-3}{3} < x_c < \frac{1}{3}$

【分析】(1) ①过 A 作 $\odot O$ 的切线，切点分别为 E 、 F ，可证四边形 $OEAF$ 是正方形，可得 A 关于 $\odot O$ 的“视角”是 $\angle EAF=90^\circ$ ，直线 $y=2$ 与 y 轴交于 P 点，过 P 点作 $\odot O$ 的切线，切点为 M 、 N ，由 $OP=2OM$ ， $OM \perp PM$ 即可求解；②由①得， P 关于 $\odot O$ 的“视角”为 60° ，可得 $B(0,2)$ ，由对称性可得 $(0,-2)$ 、 $(2,0)$ 、 $(-2,0)$ 都可以，取其一为答案，即可求解。(2) ①可求 $y=kx+2\sqrt{3}k-k$ ，可得点 P 在以 C 为圆心，2 为半径的圆上，点 P 是直线 l 上与圆心 C 的距离最短的点，直线 l 以 C 为圆心，2 为半径的圆的一条切线，作 $CH \perp x$ 轴于点 H ，可求 $H(1,0)$ ，由 $\tan \angle CDH = \frac{CH}{DH}$ ，可求 $\angle CDH=30^\circ$ ，从而可求 $y_p=3$ ， $x_p=1-\sqrt{3}$ ，即可求解；②如图，当 $\odot C$ 与直线 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 相切时，切点为 P ，连接 PC ，可求 $A(-1,0)$ ， $B(0,\sqrt{3})$ ，从而可求 $AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，直线 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 关于 $\odot C$ 的“视角”是 120° 时，作 $CP \perp AB$ 于 P ， PE 、 PF 是 $\odot C$ 的切线， E 、 F 是切点， $OC=AC-OA=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$ ，即可求解。

【详解】(1) 解：①如图，过 A 作 $\odot O$ 的切线，切点分别为 E 、 F ，



∴ 当 $y=0$ 时, $\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0$, 解得: $x=-1$, 当 $x=0$ 时, $y=\sqrt{3}$, ∴ $A(-1,0)$, $B(0,\sqrt{3})$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中: $\tan \angle BAO = \frac{BO}{OA} = \sqrt{3}$, ∴ $\angle BAO = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中: $\sin 60^\circ = \frac{PC}{AC}$, ∴ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{AC}$, 解得: $AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, ∴ $OC = AC - OA = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$,

如图, 直线 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 关于 $\odot C$ 的“视角”是 120° 时, 作 $CP \perp AB$ 于 P , PE 、 PF 是 $\odot C$ 的切线, E 、 F 是

切点, ∴ $\angle CPE = 60^\circ$, ∴ $\sin \angle CPE = \frac{CE}{PC}$, ∴ $\sin 60^\circ = \frac{1}{PC}$, 解得: $PC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

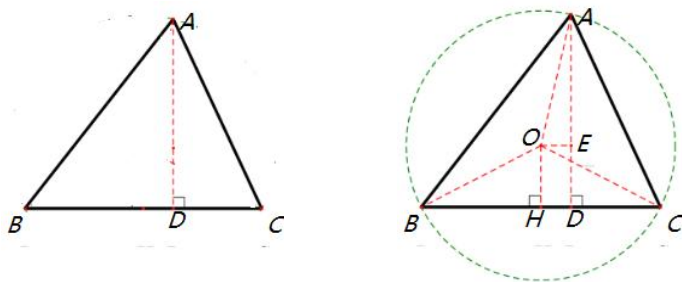
在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中, $\sin \angle CAP = \frac{PC}{AC}$, ∴ $\sin 60^\circ = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{AC}$, 解得: $AC = \frac{4}{3}$,

∴ $OC = AC - OA = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$; ∴ $\frac{2\sqrt{3}-3}{3} < x_c < \frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查了新定义“视角”，切线的性质，特殊角的三角函数，理解新定义：（1）圆外一点关于圆的视角就是：“过圆外一点向圆引两条切线，这两条切线的夹角就是这个点关于这个圆的视角”；（2）当直线和圆相离时，这条直线关于这个圆的视角就是“过圆心向这条直线作垂线，垂足关于这个圆的视角就是这条直线关于这个圆的视角”是解题的关键。

模型 2. 定角定高模型（探照灯模型）

定角定高模型：如图，直线 BC 外一点 A ， A 到直线 BC 距离为定值（定高）， $\angle BAC$ 为定角，则 AD 有最小值，即 $\triangle ABC$ 的面积有最小值。因为其形像探照灯，所以也叫**探照灯模型**。。



条件：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \alpha$ （定角）， AD 是 BC 边上的高，且 $AD = h$ （定高）。

结论：当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形（ $AB = AC$ ）时， BC 的长最小； $\triangle ABC$ 的面积最小； $\triangle ABC$ 的周长最小。

证明思路：如图，作 $\triangle ABC$ 的外接圆 e ，连接 OA ， OB ， OC ，

过点 O 作 $OE \perp BC$ 于点 E ，设 e 的半径为 r ，则 $\angle BOE = \angle BAC = \alpha$ ； $\therefore BC = 2BE = 2OB \cdot \sin \alpha = 2r \cdot \sin \alpha$ 。

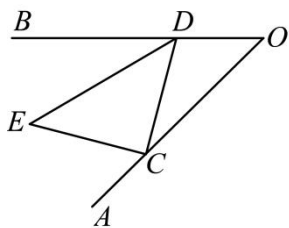
$\because OA + OE \geq AD$ （当且仅当点 A ， O ， E 三点共线时，等号成立）， $\therefore r + r \cos \alpha \geq h$ ，

当取等号时 r 有最小值，此时 BC 的长最小： $2r \cdot \sin \alpha$ ； $\triangle ABC$ 的面积最小： $AD \cdot r \cdot \sin \alpha$ ；

$\triangle ABC$ 的周长最小： $2r \cdot \sin \alpha + AD \cdot r \cdot \sin \alpha \sqrt{AD^2 + (r \sin \alpha)^2}$ 。

例1.（2023·贵州贵阳·九年级校考阶段练习）如图， $\angle AOB = 45^\circ$ ，边 OA 、 OB 上分别有两个动点 C 、 D ，

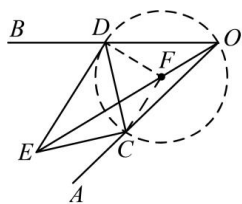
连接 CD ，以 CD 为直角边作等腰 $\text{Rt}\triangle CDE$ ，且 $CD = CE$ ，当 CD 长保持不变且等于1cm时，则 OE 长的最大值为_____cm.



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】利用直角三角形性质求解即可.

【详解】解：在 CD 右侧以 CD 为斜边作等腰 $\text{Rt}\triangle DFC$ ，则 O 、 C 、 D 在以点 F 为圆心， CF 为半径的圆上，



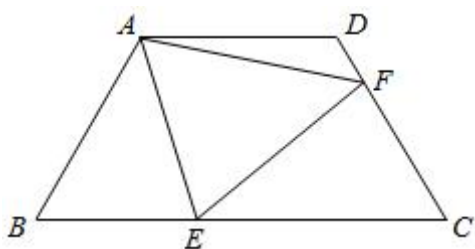
$\because CD=1$ ， $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore DE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad DF = CF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle FDE = 90^\circ, \quad \therefore EF = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore OF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \therefore OE = EF + OF = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{故答案为: } \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】本题考查直角三角形性质，灵活运用所学知识是解题的关键。

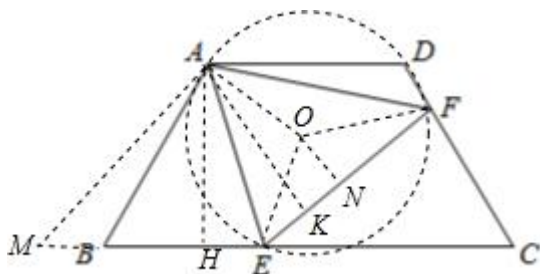
例 2. (2023·陕西西安·校考二模) 如图，在四边形 ABCD 中， $AB=AD=CD=4$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle B=60^\circ$ ，点 E、F 分别为边 BC、CD 上的两个动点，且 $\angle EAF=60^\circ$ ，则 $\triangle AEF$ 的面积的最小值是_____.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【分析】作辅助线，构建 $\triangle AME \cong \triangle AFE$ ，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 120° 到 $\triangle ABM$ ，根据角的关系证明 M、B、E 共线，再证明 $\triangle FAE \cong \triangle MAE$ ，则 $\angle MEA = \angle FEA$ ，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H，作 $AK \perp EF$ 于 K，根据角平分线的性质可知： $AH = AK = 2\sqrt{3}$ ，作 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot O$ ，由同弧所对的圆心角是圆周角的二倍得： $\angle NOF = 60^\circ$ ，设 $EF = 2x$ ，则 $NF = x$ ，根据 $OA + ON \geq AK$ ，列式为 $\sqrt{3}x \geq 2\sqrt{3}$ ，则 $x \geq 2$ ，可得 $\triangle AEF$ 面积的最小值是 $4\sqrt{3}$ 。

【详解】如图，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 120° 到 $\triangle ABM$ ，



由旋转得： $BM=DF$ ， $AM=AF$ ， $\angle ABM = \angle D = 120^\circ$ ， $\angle MAB = \angle FAD$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ， $\therefore \angle ABM + \angle ABC = 180^\circ$ ， $\therefore$ M、B、E 共线，

$$\because \angle MAE = \angle MAB + \angle BAE = \angle FAD + \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\angle EAF = 60^\circ, AE = AE, \therefore \triangle FAE \cong \triangle MAE \text{ (SAS)}, \therefore \angle MEA = \angle FEA,$$

$$\text{过 } A \text{ 作 } AH \perp BC \text{ 于 } H, \text{ 作 } AK \perp EF \text{ 于 } K, \therefore AH = AK = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3},$$

作 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot O$, 连接 OA 、 OE 、 OF , 过 O 作 $ON \perp EF$ 于 N ,

$$\because \angle EAF = 60^\circ, \therefore \angle EOF = 120^\circ, \therefore \angle NOF = 60^\circ, \text{ 设 } EF = 2x, \text{ 则 } NF = x,$$

$$\text{Rt}\triangle ONF \text{ 中, } ON = \frac{\sqrt{3}}{3}x, OF = \frac{2\sqrt{3}}{3}x, \therefore ON + OA = OF + ON = \sqrt{3}x,$$

$$\because OA + ON \geq AK, \therefore \sqrt{3}x \geq 2\sqrt{3}, \therefore x \geq 2,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x \geq 4\sqrt{3}, \therefore \triangle AEF \text{ 面积的最小值是 } 4\sqrt{3}.$$

【点睛】本题是四边形的综合题，考查了角平分线的性质、等边三角形、三角形和四边形的面积、三角形全等的性质和判定、直角三角形的性质、轴对称的最短路径问题等知识，确定其最值时动点的位置是解题的关键.

例 3. (2023·陕西·统考二模) 问题探究

(1) 如图 1. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 8$, D 为 BC 上一点, $AD = 6$. 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____.

(2) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, AG 为 BC 边上的高, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 若 $AG = 3$, 试判断 BC 是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

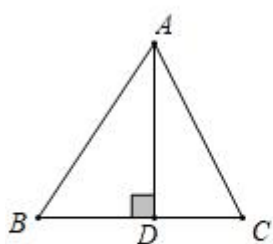


图1

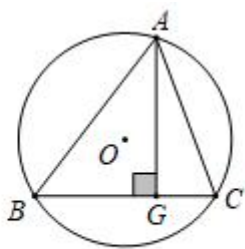


图2

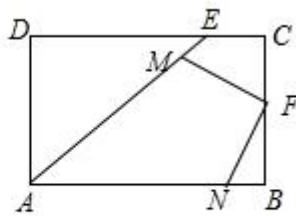


图3

问题解决: 如图 3, 王老先生有一块矩形地 $ABCD$, $AB = 6\sqrt{2} + 12$, $BC = 6\sqrt{2} + 6$, 现在他想利用这块地建一个四边形鱼塘 $AMFN$, 且满足点 E 在 CD 上, $AD = DE$, 点 F 在 BC 上, 且 $CF = 6$, 点 M 在 AE 上, 点 N

在 AB 上, $\angle MFN = 90^\circ$, 这个四边形 $AMFN$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出面积的最大值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】问题探究: (1) 24; (2) 存在, BC 的最小值为 $2\sqrt{3}$; 问题解决: 存在, 144

【分析】(1) 根据三角形的面积公式即可得到结论; (2) 如图 2 中, 连接 OA, OB, OC , 作 $OE \perp BC$ 于 E . 设 $OB = OC = 2x$. 求出 x 的最小值即可解决问题; (3) 如图 3 中, 连接 AF , 延长 BC 交 AE 的延长线于 G , 将 $\triangle EFM$ 顺时针旋转得到 $\triangle FBH$, 作 $\triangle FNH$ 的外接圆 $\odot O$. 由 (2) 可知, 当 $\triangle FNH$ 的外接圆的圆心 O 在线段 BF 上时, $\triangle FNH$ 的面积最小, 此时四边形 $ANFM$ 的面积最大.

【详解】解: (1) 当 $AD \perp BC$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最大,

则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$, 故答案为: 24;

(2) 如图中, 连接 OA, OB, OC , 作 $OE \perp BC$ 于 E . 设 $OA = OC = 2x$,

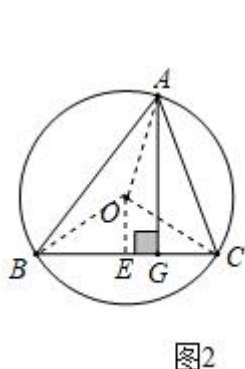


图2

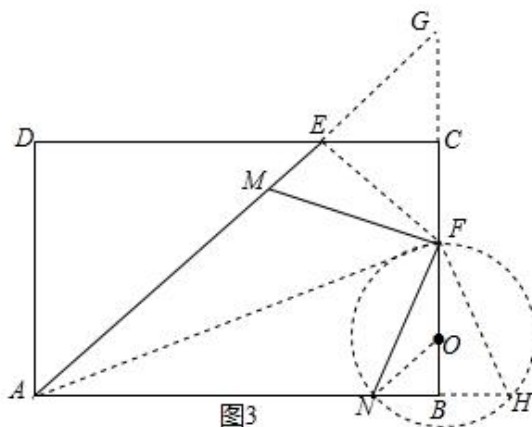


图3

$\therefore \angle COB = 2\angle CAB = 120^\circ$, $OC = OB$, $OE \perp CB$,

$\therefore CE = EB$, $\angle COE = \angle BOE = 60^\circ$, $\therefore OE = \frac{1}{2}OB = x$, $BE = \sqrt{3}x$.

$\therefore OC + OE \leq AG$, $\therefore 3x \leq 8$, $\therefore x \leq \frac{8}{3}$, $\therefore x$ 的最小值为 1, $\therefore BC = 2\sqrt{3}x$, $\therefore BC$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$;

(3) 如图中, 连接 AF , EF , 延长 BC 交 AE 的延长线于 G ,

$\therefore \angle D = 90^\circ$, $AD = DE = 6\sqrt{2} + 6$, $\therefore \angle DAE = \angle AED = 45^\circ$,

$\therefore CD = AB = 6\sqrt{2} + 12$, $\therefore CE = CF = 6$, $\therefore \angle CEF = \angle CFE = 45^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ, \therefore EF = 6\sqrt{2} = BF,$$

将 $\triangle EFM$ 顺时针旋转得到 $\triangle FBH$ ，作 $\triangle FHB$ 的外接圆 $\odot O$ 交 BC 于 N ，连接 ON ，

$$\because \angle AEF = \angle ABF = 90^\circ, AF = AF, EF = BF, \therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle ABF (HL), \therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABF},$$

$$\because \angle EFG = 45^\circ, \because \angle FEG = 90^\circ, \angle EFG = 45^\circ, \therefore EF = EG = 6\sqrt{2}, \therefore FG = \sqrt{2}EF = 12,$$

由 (2) 可知，当 $\triangle FHN$ 的外接圆的圆心 O 在线段 BF 上时， $\triangle FHN$ 的面积最小，此时四边形 $ANFE$ 的面积

最大，设 $OF = ON = r$ ，则 $OB = BN = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ ，

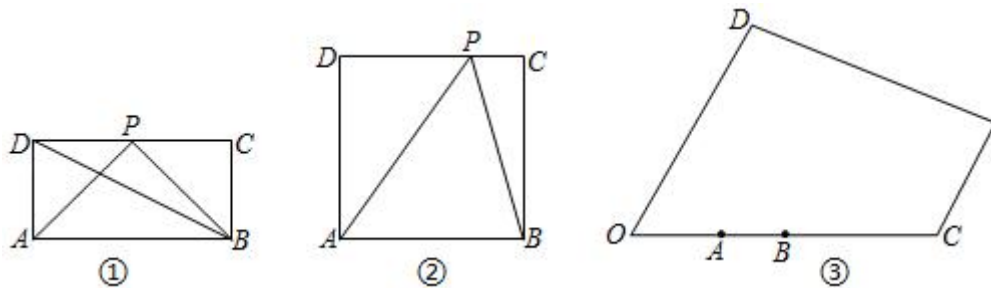
$$\therefore r + \frac{\sqrt{2}}{2}r = 6\sqrt{2}, \therefore r = 6\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}), \therefore NH = \sqrt{2}r = 12(2 - \sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{四边形 } ANFM \text{ 的面积的最大值} = 2 \times \frac{1}{2} \times (12 + 6\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 12(2 - \sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = 144.$$

【点睛】本题属于圆综合题，考查了三角形的外接圆，解直角三角形，最值问题等知识，解题的关键是学会转化的思想思考问题。

例 4. (2020·陕西·陕西师大附中校考二模) 问题探究，(1)如图①，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2AD$ ， P 为 CD 边上的中点，试比较 $\angle APB$ 和 $\angle ADB$ 的大小关系，并说明理由；(2)如图②，在正方形 $ABCD$ 中， P 为 CD 上任意一点，试问当 P 点位于何处时 $\angle APB$ 最大？并说明理由；

问题解决(3)某儿童游乐场的平面图如图③所示，场所工作人员想在 OD 边上点 P 处安装监控装置，用来监控 OC 边上的 AB 段，为了让监控效果最佳，必须要求 $\angle APB$ 最大，已知： $\angle DOC = 60^\circ$ ， $OA = 400$ 米， $AB = 200\sqrt{3}$ 米，问在 OD 边上是否存在一点 P ，使得 $\angle APB$ 最大，若存在，请求出此时 OP 的长和 $\angle APB$ 的度数；若不存在，请说明理由。



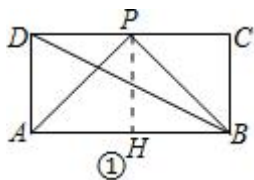
【答案】(1) 结论： $\angle APB > \angle ADB$ ，理由见解析；(2) 当点 P 位于 CD 的中点时， $\angle APB$ 最大，理由见解

析：(3) 当经过 A, B 的 $\odot T$ 与 OD 相切于 P 时， $\angle APB$ 的值最大，理由见解析

【分析】(1) 作 $PH \perp AB$ 于 H ，通过正方形和矩形的性质可得 $\angle APB = 90^\circ$ ，再根据 $\angle ADB < 90^\circ$ ，即可证明 $\angle APB > \angle ADB$ ；(2) 假设 P 为 CD 的中点，如图②中，作 $\triangle APB$ 的外接圆 $\odot O$ ，则此时 CD 切 $\odot O$ 于点 P ，在 CD 上取任意异于 P 点的点 E ，连接 AE ，与 $\odot O$ 交于点 F ，连接 BE, BF ，根据 $\angle AFB$ 是 $\triangle EFB$ 的外角，可得 $\angle AFB > \angle AEB$ ，再根据 $\angle AFB = \angle APB$ ，从而可得 $\angle APB > \angle AEB$ ，故点 P 位于 CD 的中点时， $\angle APB$ 最大；(3) 作 $TH \perp OC$ 于 H ，交 OD 于 Q ，连接 TA, TB, OT 。设 $TP = TA = TB = r$ ，根据等边三角形的性质可得 $AH = HB = 100\sqrt{3}$ (m)，再根据含 30° 角的直角三角形的性质可得 $AT = 200\sqrt{3}$ m，故 $AT = 2AH$ ，可得 $\angle ATH = 30^\circ$ ，即 $\angle ATB = 2\angle ATH = 60^\circ$ ，根据圆周角定理可得 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ATB = 30^\circ$ ，再根据含 30° 角的直角三角形的性质求出 OQ 和 PQ 的长度，再根据 $OP = OQ - PQ$ 求解 OP 的长度即可。

【详解】解：(1) 如图①中，结论： $\angle APB > \angle ADB$ 。

理由：作 $PH \perp AB$ 于 H 。



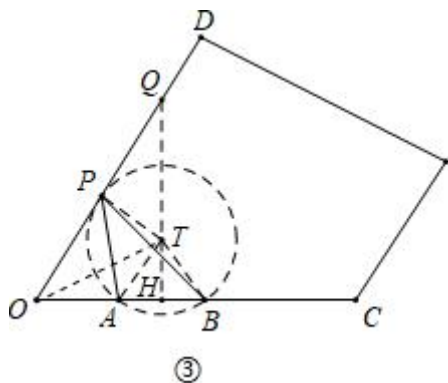
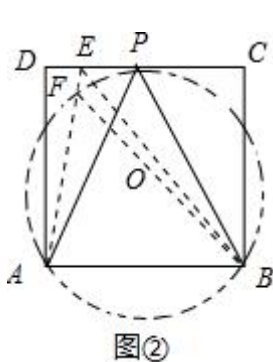
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $PH \perp AB$ ， $\therefore \angle ADP = \angle DAH = \angle AHP = 90^\circ$ ， $\therefore$ 四边形 $ADPH$ 是矩形，

$\because AB = CD = 2AD$ ， $DP = PC$ ， $\therefore DA = DP$ ， $\therefore$ 四边形 $ADPH$ 是正方形，

$\therefore \angle APH = 45^\circ$ ，同理可证 $\angle BPH = 45^\circ$ ， $\therefore \angle APB = 90^\circ$ ， $\because \angle ADB < 90^\circ$ ， $\therefore \angle APB > \angle ADB$ 。

(2) 当点 P 位于 CD 的中点时， $\angle APB$ 最大，理由如下：

假设 P 为 CD 的中点，如图②中，作 $\triangle APB$ 的外接圆 $\odot O$ ，则此时 CD 切 $\odot O$ 于点 P ，



在 CD 上取任意异于 P 点的点 E ，连接 AE ，与 $\odot O$ 交于点 F ，连接 BE ， BF ，

$\because \angle AFB$ 是 $\triangle EFB$ 的外角， $\therefore \angle AFB > \angle AEB$ ，

$\because \angle AFB = \angle APB$ ， $\therefore \angle APB > \angle AEB$ ，故点 P 位于 CD 的中点时， $\angle APB$ 最大。

(3) 如图③中，当经过 A ， B 的 $\odot T$ 与 OD 相切于 P 时， $\angle APB$ 的值最大，

作 $TH \perp OC$ 于 H ，交 OD 于 Q ，连接 TA ， TB ， OT 。设 $TP = TA = TB = r$ ，

$\because TA = TB$ ， $TH \perp AB$ ， $\therefore AH = HB = 100\sqrt{3}$ (m)，

$\because \angle OHQ = 90^\circ$ ， $\angle O = 60^\circ$ ， $OH = OA + AH = (400 + 100\sqrt{3})(m)$ ，

$\therefore QH = \sqrt{3} OH = (400\sqrt{3} + 300)(m)$ ， $\angle OQH = 30^\circ$ ， $\therefore TQ = 2PT = 2r$ ，

$\because TH = \sqrt{AT^2 - AH^2} = \sqrt{r^2 - (100\sqrt{3})^2}$ ， $\therefore 2r + \sqrt{r^2 - (100\sqrt{3})^2} = 400\sqrt{3} + 300$ ，

整理得： $3r^2 - (1600\sqrt{3} + 1200)r + 60000 + 240000\sqrt{3} = 0$ ，

$\therefore (r - 200\sqrt{3})(r - 1000\sqrt{3} - 1200) = 0$ ， $\therefore r = 200\sqrt{3}$ 或 $1000\sqrt{3} + 1200$ (舍弃)，

$\therefore AT = 200\sqrt{3} m$ ， $\therefore AT = 2AH$ ， $\therefore \angle ATH = 30^\circ$ ， $\angle ATB = 2\angle ATH = 60^\circ$ ， $\therefore \angle APB = \frac{1}{2} \angle ATB = 30^\circ$ ，

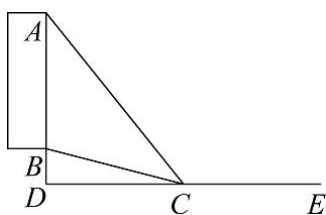
$\therefore OQ = 2OH = 800 + 200\sqrt{3} (m)$ ， $PQ = \sqrt{3}PT = \sqrt{3} \times 200\sqrt{3} = 600 (m)$

$\therefore OP = OQ - PQ = 800 + 200\sqrt{3} - 600 = (200 + 200\sqrt{3})(m)$ 。

【点睛】本题考查了圆的综合问题，掌握正方形和矩形的性质、切线的性质以及判定定理、含 30° 角的直角三角形的性质、圆周角定理、勾股定理是解题的关键。

课后专项训练

1. (2023·安徽合肥·统考一模) 如图, A 、 B 表示足球门边框(不考虑球门的高度)的两个端点, 点 C 表示射门点, 连接 AC 、 BC , 则 $\angle ACB$ 就是射门角, 在不考虑其它因素的情况下, 一般射门角越大, 射门进球的可能性就越大, 球员甲带球线路 ED 与球门 AB 垂直, D 为垂足, 点 C 在 ED 上, 当 $\angle ACB$ 最大时就是带球线路 ED 上的最佳射门角, 若 $AB=4$, $BD=1$, 则当球员甲在此次带球中获得最佳射门角时 DC 的长度为()



- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{15}$

【答案】C

【分析】构造 $\triangle ABC$ 的外接圆 O , 当 DE 为圆 O 的切线时, $\angle ACB$ 的角度最大, 易证 $OCDF$ 为矩形, 再通过圆周角和圆心角的关系转化为 $\angle AOF$, 通过勾股定理求得 OF 的长度, 从而得到结果.

【详解】解: 如图所示, 圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 当 DE 为圆 O 的切线时, $\angle ACB$ 的角度最大, (备注: 弧所对的角中, 圆周角 > 圆外角) 过 O 点作 $OF \perp AB$, 则 $AF=BF$,

$\because AB=4$, $BD=1$, $\therefore AF=2$, $DF=3$, $\because OC \perp AC$, $\angle D=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $OCDF$ 为矩形, $\therefore OC=DF=OA$,

$\therefore OF=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, $\therefore CD=\sqrt{5}$ 故选: C.



- 【答案】 D**

【详解】 设 AC 与 BD 的交点为点 F ，由矩形的性质可得 $FA = FB = FC = FD = 2$ ，

∴当 BE 是 $\odot O$ 的切线时, $\angle DBE$ 最大, ∴当 $\angle DBE$ 最大时, $BE \perp OE$,

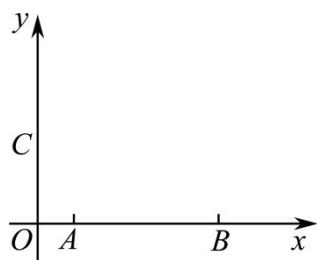
$$\because OE = OF = OD = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1, \therefore BO = BD - OD = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}. \text{ 故答案为 D.}$$

【点睛】本题考查了矩形的性质、切线的性质、圆的基本性质，关键在于确定 E 点运动轨迹，有一定难度.

3. (2023·江苏南京·九年级校考期末) 平面直角坐标系内，已知点 $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(0,t)$. 当 $t > 0$ 时，

若 $\angle ACB$ 最大，则 t 的值为 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】C

【分析】过 A 、 B 作与 y 轴相切的圆，设圆心为 M ，切点为 C ，连接 AC 、 BC ，取 C_l 为 y 轴上相异于 C 的一点，连接 C_lA 、 C_lB ，设 C_lB 交圆于 D ，利用圆周角定理和三角形外角性质可证得 $\angle ACB$ 最大，过 M 作 $MN \perp AB$ 于 N ，根据垂径定理证得 $AN=BN=\frac{1}{2}AB$ ，可证明四边形 $MNOC$ 为矩形，则有 $MA=MC=ON$, $t=MN$ ，利用勾股定理求解 MN 即可解答.

【详解】解：过 A 、 B 作与 y 轴相切的圆，设圆心为 M ，切点为 C ，连接 AC 、 BC ，取 C_l 为 y 轴上相异于 C 的一点，连接 C_lA 、 C_lB ，设 C_lB 交圆于 D ，如图，则 $\angle ADB = \angle ACB$,

$\because \angle ADB$ 是 $\triangle ADC_l$ 的外角， $\therefore \angle ADB > \angle AC_lB$, $\therefore \angle ACB > \angle AC_lB$ ，即 $\angle ACB$ 就是所求的最大角，

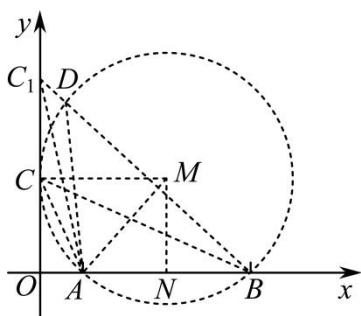
过 M 作 $MN \perp AB$ 于 N ，连接 MC 、 MA ，则 $MA=MC$, $AN=BN=\frac{1}{2}AB$, $MC \perp y$ 轴，

$\therefore$ 四边形 $MNOC$ 为矩形， $\therefore MC=ON$, $OC=MN$,

$\because A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(0,t)$, $t > 0$, $\therefore AB=4$, $OC=t$, $OA=1$, $\therefore AN=\frac{1}{2}AB=2$,

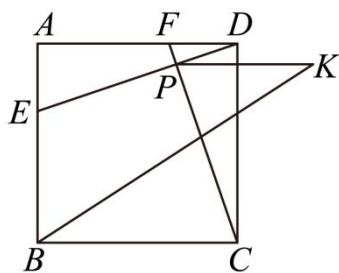
$\therefore MC=ON=OA+AN=3$ ，在 $Rt\triangle AMN$ 中， $MA=MC=3$,

由勾股定理得： $MN = \sqrt{MA^2 - AN^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, $\therefore OC=MN=\sqrt{5}$ ，即 $t=\sqrt{5}$ ，故选：C.



【点睛】本题考查切线性质、圆周角定理、三角形外角性质、矩形的判定与性质、垂径定理、坐标与图形、勾股定理，熟练掌握相关知识的联系与运用，得出过 A 、 B 、 C 三点的圆与 y 轴相切时 $\angle ACB$ 最大是解答的关键。

4. (2023·江苏苏州·校考二模) 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， E 、 F 分别是边 AB 、 AD 上的动点， $AE=DF$ ，连接 DE 、 CF 交于点 P ，过点 P 作 $PK \parallel BC$ ，且 $PK=3$ ，若 $\angle CBK$ 的度数最大时，则 AE 长为 ()



- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】A

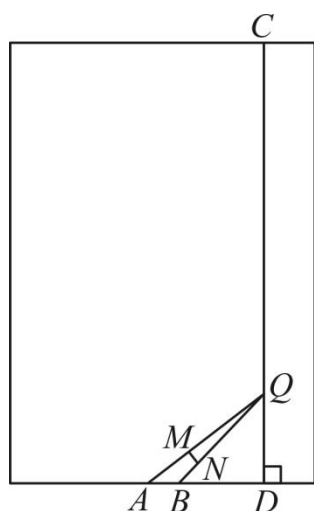
【分析】根据全等三角形的性质可得 $\angle ADE = \angle DFC$ ，求得 $\angle DPC = 90^\circ$ ，得到点 P 在以 CD 为直径的半圆上运动，过 O 作 $OM \perp CD$ ，并且点 M 在 CD 的右侧， $MO=3$ ，连接 OP ， KM ，推出四边形 $POMK$ 是菱形，于是得到点 K 在以 M 为圆心，半径为 3 的半圆上运动，当 BK 与 $\odot M$ 相切时， $\angle CBK$ 最大；证明 $\angle FCD = \angle MBC$ ，即可得 $\triangle BNM \sim \triangle CDF$ ，由相似三角形的性质，即可求出 DF 的长，即 AE 的长。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AE=DF$ ， $AD=CD$ ， $\angle EAD = \angle FDC = 90^\circ$ ，

在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle FDC$ 中 $\begin{cases} EA=FD \\ \angle EAD = \angle FDC, \therefore \triangle EAD \cong \triangle FDC (SAS), \therefore \angle ADE = \angle DCF, \\ AD=CD \end{cases}$

的判断，圆与直线的位置关系等知识，解题的关键是根据圆的定义判断当 BK 与圆相切时 $\angle CBK$ 最大.

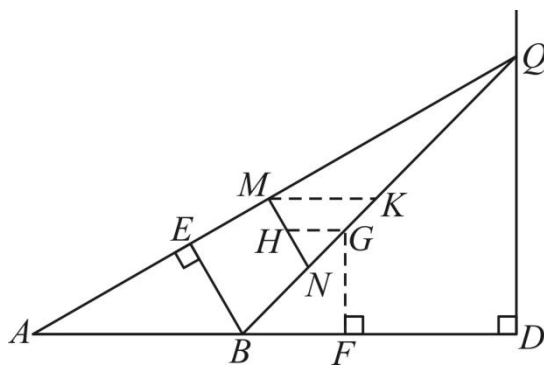
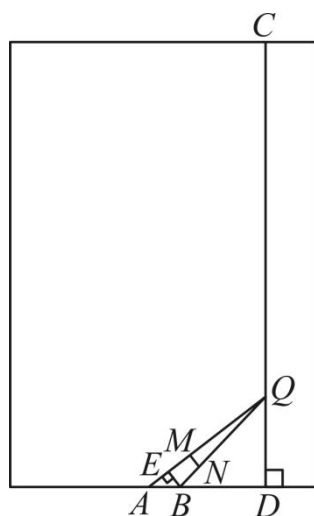
5. (2023·辽宁沈阳·校考三模) 如图是一个矩形足球球场， AB 为球门， $CD \perp AB$ 于点 D ， $AB = a$ 米. 某球员沿 CD 带球向球门 AB 进攻，在 Q 处准备射门，已知 $BD = 3a$ 米， $QD = 3a$ 米，对方门将伸开双臂后，可成功防守的范围大约为 $0.25a$ 米；此时门将站在张角 $\angle AQB$ 内，双臂伸开 MN 且垂直于 AQ 进行防守， MN 中点与 AB 距离_____米时，刚好能成功防守.



【答案】 $\frac{37}{20}a / \frac{37a}{20}$

【分析】过点 B 作 $BE \perp AQ$ ，证明 $\triangle AEB \sim \triangle ADQ$ ，作 $MK \parallel AD$ ， $HG \parallel AD$ ， $GF \perp AD$ ，依次证明 $\triangle ABQ \sim \triangle MKQ$ ， $\triangle HNG \sim \triangle MNK$ ，利用相似三角形的性质即可求解.

【详解】解：过点 B 作 $BE \perp AQ$ ，



$\because BE \perp AQ$ ， $CD \perp AB$ ， $\therefore \angle AEB = \angle ADQ = 90^\circ$ ，

$$\text{又} \because \angle EAB = \angle DAQ, \therefore \triangle AEB \sim \triangle ADQ, \therefore \frac{AB}{AQ} = \frac{BE}{DQ},$$

$$\because AD = AB + BD = a + 3a = 4a, DQ = 3a,$$

$$\therefore AQ = \sqrt{AD^2 + DQ^2} = 5a, BQ = \sqrt{BD^2 + DQ^2} = 3\sqrt{2}a, \therefore \frac{a}{5a} = \frac{BE}{3a}, \therefore BE = \frac{3a}{5},$$

$$\therefore EQ = \sqrt{BQ^2 - BE^2} = \sqrt{(3\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{3a}{5}\right)^2} = \frac{21a}{5}, \text{如图, 作 } MK \parallel AD, HG \parallel AD, GF \perp AD,$$

$$\because BE \perp AQ, MN \perp AQ, \therefore BE \parallel MN, \therefore \triangle BEQ \sim \triangle NMQ,$$

$$\because MN = 0.25a = \frac{a}{4}, \therefore \frac{BE}{MN} = \frac{EQ}{MQ} = \frac{BQ}{NQ} = \frac{\frac{3a}{5}}{\frac{a}{4}} = \frac{12}{5}, \therefore MQ = \frac{EQ}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{21a}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{7a}{4}, NQ = \frac{BQ}{\frac{12}{5}} = \frac{3\sqrt{2}a}{\frac{12}{5}} = \frac{5\sqrt{2}a}{4},$$

$$\because MK \parallel AD, \therefore \triangle ABQ \sim \triangle MKQ, \therefore \frac{AQ}{MQ} = \frac{BQ}{KQ} = \frac{5a}{\frac{7a}{4}} = \frac{3\sqrt{2}a}{KQ},$$

$$\therefore KQ = \frac{21\sqrt{2}a}{20}, \therefore NK = NQ - KQ = \frac{5\sqrt{2}a}{4} - \frac{21\sqrt{2}a}{20} = \frac{\sqrt{2}a}{5},$$

$$\because MK \parallel AD, HG \parallel AD, \therefore MK \parallel GH, \therefore \triangle HNG \sim \triangle MNK, \therefore \frac{HN}{MN} = \frac{NG}{NK},$$

$$\because HN = \frac{1}{2}MN, \therefore NG = \frac{1}{2}NK = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}a}{5} = \frac{\sqrt{2}a}{10},$$

$$\because BN = BQ - NQ = 3\sqrt{2}a - \frac{5\sqrt{2}a}{4} = \frac{7\sqrt{2}a}{4}, \therefore BG = BN + NG = \frac{7\sqrt{2}a}{4} + \frac{\sqrt{2}a}{10} = \frac{37\sqrt{2}a}{20},$$

$$\because BD = 3a, QD = 3a, CD \perp AB, \therefore \angle QBD = \angle BQD = 45^\circ,$$

$$\because GF \perp AD, \therefore FG = BG \cdot \sin \angle GBF = \frac{37\sqrt{2}a}{20} \cdot \sin 45^\circ = \frac{37\sqrt{2}a}{20} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{37}{20}a, \text{故答案为: } \frac{37}{20}a.$$

【点睛】本题主要考查锐角三角函数，相似三角形的判定与性质，勾股定理等，通过添加辅助线构造相似三角形是解题的关键。

6. (2023 浙江·九年级校考期中) 为了迎接新年的到来某市举办了迎新年大型灯光秀表演。其中一个镭射灯距地面 30 米，镭射灯发出的两根彩色光线夹角为 60° ，如图：若将两根光线(AB、AC)和光线与地面的两交点的连接的线段(BC)看作一个三角形，记为 $\triangle ABC$ ，三角形面积的最小值为_____平方米，其周长最小值为_____米。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/966205221203011000>